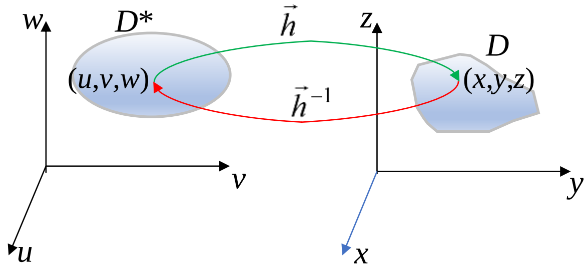
Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Cambio de variables en integrales triples

Dada la integral $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, se desea calcularla aplicando el cambio de variables definido por:

$$(x,y,z) = \underbrace{(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))}_{\vec{h}(u,v,w)}$$



Denotando $J(u,v,w) = \det(D\vec{h}(u,v,w))$ al ***jacobiano de la transformación***, si se cumple que:

(a) f es integrable en D.
(b) $\vec{h} \in C^1$ en un conjunto abierto que incluya a D^*.
(c) $J(u,v,w) \neq 0$ en todo punto de D^*.
(d) Existe $\vec{h}^{-1}$ tal que $\forall (x,y,z) \in D$, $\vec{h}^{-1}(x,y,z) = (u,v,w) \in D^*$.

Entonces,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\vec{h}(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw, \tag{1}$$

que es la denominada ***fórmula de cambio de variables en integrales triples***.

<u>Nota</u>: La fórmula (1) es válida, aunque las hipótesis (c) y/o (d) no se cumplan, siempre que eso ocurra en conjunto de volumen nulo de D^*.

El jacobiano es el determinante de la matriz jacobiana de $\vec{h}$ y también se lo denota $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$, es decir:

$$J(u,v,w) \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{vmatrix}.$$

Para hallar la región D^* del espacio *uvw*, teniendo como dato la región de integración D del *xyz*.

Bajo las hipótesis indicadas:

- Los puntos frontera de D^* tienen como imagen, a través de $\vec{h}$, los puntos frontera de D. Es decir, $\partial D = \vec{h}(\partial D^*)$. También $\partial D^* = \vec{h}^{-1}(\partial D)$, o sea, ∂D^* es la imagen de ∂D a través de $\vec{h}^{-1}$.
- Los puntos interiores de D^* tienen como imagen –a través de $\vec{h}$ – puntos interiores de D y, dada la correspondencia entre fronteras, también el exterior de D^* se corresponden con el de D.

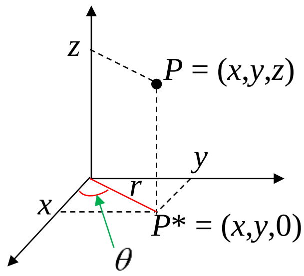
Así, partiendo de ∂D en el espacio *xyz*, se obtiene ∂D^* en el espacio *uvw*. Dado que el interior de D se corresponde con el de D^*, y también sus exteriores, con ello se determina D^*.

Coordenadas cilíndricas

Dado un punto $P=(x,y,z)$ del espacio *xyz*, para ubicarlo en coordenadas cilíndricas se procede de la siguiente manera:

1. Se proyecta ortogonalmente el punto contra uno de los planos coordenados, generando el punto *P**.
2. Las coordenadas cilíndricas del punto son las polares de *P** en el plano de proyección y la cartesiana del eje perpendicular a dicho plano.

En el esquema de la derecha se muestra el caso en que se proyecta contra el plano *xy*.



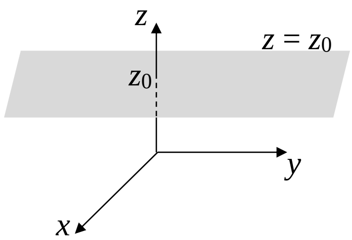
En este caso corresponde: $(x,y,z)=\underbrace{(r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta),\, z)}_{\vec{h}(\theta,r,z)}$. Con $r\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi,\ z\in\Re$.

Por su parte, haciendo los cálculos correspondientes resulta $|J(\theta,r,z)|\equiv\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,r,z)}\right|=r$.

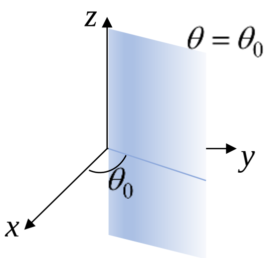
La fórmula de cambio de variables queda:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_{D^*} f(r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta),\, z)\; r\,d\theta\,dr\,dz\,.$$

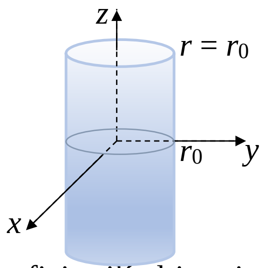
Se denominan ***superficies coordenadas de cilíndricas*** en el espacio *xyz*, a las que resultan de dejar una de las coordenadas de cilíndricas constante. En este caso son:



Plano paralelo al plano *xy*



Semiplano que contiene al eje *z*



Superficie cilíndrica circular recta con eje *z* y radio $r_0\neq 0$

En particular, los puntos de $r=0$ son los del eje *z*. Para ellos no queda definido el valor de θ.

Si bien puede utilizarse las superficies coordenadas para visualizar los límites de una integral triple en coordenadas cilíndricas, lo más práctico es:

- Comenzar en cartesianas, haciendo la primera integral simple.
- La integral doble siguiente, si conviene, la pasamos a polares en el plano de proyección.

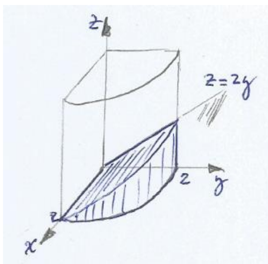
Esto es equivalente a trabajar en cilíndricas (polares en el plano de proyección).

<u>Ejemplo</u>: Calcule el volumen del cuerpo *D* definido por $x^2+y^2\leq 4,\ z\leq 2y,\ z\geq 0,\ x\geq 0$.

El cuerpo se representa en el esquema aproximado de la derecha.

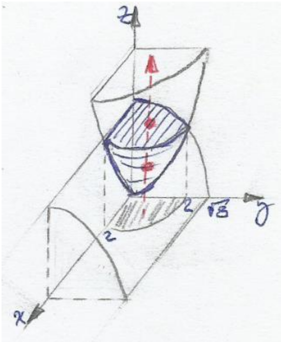
$$\mathrm{vol}(D)=\iiint_D dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}} dx\,dy\underbrace{\int_0^{2y} dz}_{=2y}=\iint_{D_{xy}} 2y\,dx\,dy$$

$$\mathrm{vol}(D)=2\int_0^{\pi/2} d\theta\underbrace{\int_0^2 r\,\mathrm{sen}(\theta)\,r\,dr}_{\frac{1}{3}[\mathrm{sen}(\theta)r^3]_0^2}=\tfrac{16}{3}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta}_{-[\cos(\theta)]_0^{\pi/2}}=\frac{16}{3}\,.$$



La integral doble en el plano *xy* (círculo de radio 2, centro (0,0), $x\geq 0, y\geq 0$) se resolvió pasándola a polares.

Ejemplo: Calcule la masa del cuerpo $D = \{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, 2x^2 + y^2 \le z \le 8 - y^2\}$, si su densidad de masa en cada punto es $\delta(x,y,z) = k$ con $k > 0$ constante.



En el esquema, para facilitar la representación, se muestra la forma aproximada del cuerpo para $x, y, z \in \Re_0^+$.

La curva C, intersección de $z = 2x^2 + y^2$ con $z = 8 - y^2$, proyectada contra el plano *xy* genera el borde del D_{xy}. Sólo debemos recordar que es "toda la vuelta", no sólo $x, y \in \Re_0^+$. [1]

$$C = \begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ z = 8 - y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 8 - y^2 = 2x^2 + y^2 \\ z = 8 - y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 8 - y^2 \end{cases}$$

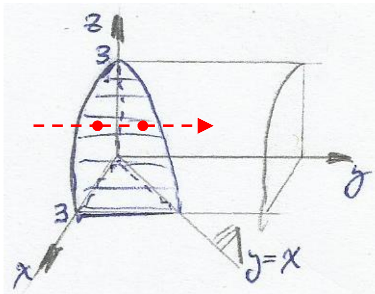
Vemos que C también se puede representar como intersección de $z = 8 - y^2$ con $x^2 + y^2 = 4$. Esta última es perpendicular al plano *xy*, con lo cual dicha ecuación se sostiene como la de la proyección de *C* como borde de D_{xy}.
Entonces:

$$\text{Masa}(D) = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \underbrace{\int_{2x^2+y^2}^{8-y^2} k\,dz}_{k\,(8-2x^2-2y^2)} = 2k \iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy\,.$$

Ahora conviene pasar a polares pues D_{xy} está definido por $x^2 + y^2 \le 4$, con lo cual:

$$\text{Masa}(D) = 2k \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (4 - r^2)\, r\,dr}_{[2r^2 - \frac{1}{4}r^4]_0^2} = 8k \int_0^{2\pi} d\theta = 16 k\pi\,.$$

Ejemplo: Calcule el volumen del cuerpo *D*, en el 1º octante, con $x^2 + z^2 \le 9$ e $y \le x$.



De acuerdo a la representación de la derecha, podemos proyectar el cuerpo contra el plano *xz* resultando:

$$\text{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xz}} dx\,dz \underbrace{\int_0^x dy}_{=x} = \iint_{D_{xz}} x\,dx\,dz$$

Ahora planteamos polares con $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ z = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$, con lo cual:

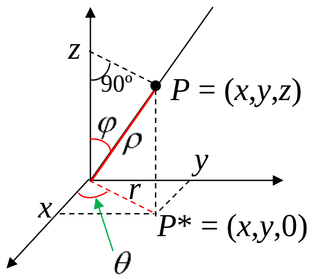
$$\text{vol}(D) = \iint_{D_{xz}} x\,dx\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^3 r\cos(\theta)\, r\,dr}_{\frac{1}{3}[\cos(\theta)\, r^3]_0^3} =$$

$$= 9 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\,d\theta}_{[\text{sen}(\theta)]_0^{\pi/2}} = 9.$$

[1] Observe que, para proyectar la curva contra el plano *xy*, la regla práctica es buscar un sistema equivalente tal que en una de las ecuaciones no figure la variable *z*. Con ello se obtiene la superficie proyectante contra el plano *xy*.

Coordenadas esféricas

Considere un punto $P=(x,y,z)$ del espacio *xyz*, que lo proyectamos ortogonalmente contra el plano *xy* generando el punto *P**. [(2)]
Observe en el dibujo la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ que, con origen en $(0,0,0)$ pasa por el punto P, y el ángulo φ que forma con z^+.
Por último, denotaremos con ρ a la distancia entre *P* y el origen.
Las coordenadas esféricas del punto son ρ,θ y φ, donde θ es el mismo ángulo que el de cilíndricas (el de polares en el plano de proyección).



Es claro que la distancia desde *P* al eje *z*, es igual a la que hay desde *P** a dicho eje, su valor es r.
Por otra parte, $z=\rho\cos(\varphi)$ y $r=\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$. Con lo cual resulta:

$$(x,y,z)=\underbrace{(\overbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)}^{r}\cos(\theta),\ \overbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)}^{r}\mathrm{sen}(\theta),\ \rho\cos(\varphi))}_{\vec{h}(\rho,\varphi,\theta)}\ \text{con}\ \rho\ge 0,\ 0\le\theta<2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\,.$$

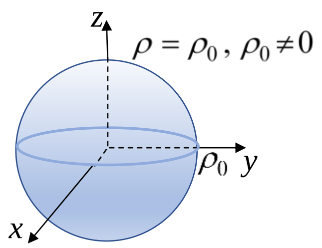
En la expresión anterior se resalta que $\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)=r$, para facilitar la asociación de las expresiones de polares en el plano *xy*.
Realizando las derivadas y cálculos correspondientes, resulta:

$$|\,J(\rho,\varphi,\theta)\,|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right|=\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,,$$

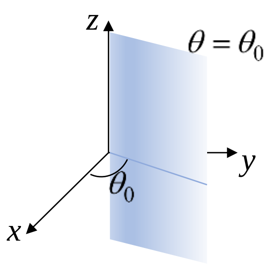
con lo cual la fórmula de cambios de variables de cartesianas a esféricas es:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\ =\ \iiint_{D^*} f(\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta),\ \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta),\ \rho\cos(\varphi))\ \rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\,.$$

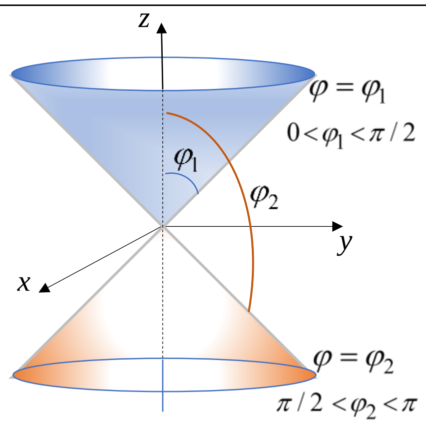
En este caso tiene importante práctica conocer las superficies coordenadas de esféricas en el espacio *xyz*.



Superficie esférica con centro en el origen y radio $\rho_0\neq 0$.
$\rho=0$: el origen del *xyz*.



ídem cilíndricas, semiplano que contiene al eje *z*



Para las superficies coordenadas de φ constante, analizando la imagen a través de $\vec{h}$, corresponde:

- $\varphi=0$: $(0,0,\rho)$, degenera en el semieje positivo de z incluyendo al origen.
- $\varphi=\pi$: $(0,0,-\rho)$, degenera en el semieje negativo de z incluyendo al origen.
- $\varphi=\pi/2$: $z=0$ con $x,y\in\Re$, es el plano *xy*.
- $\varphi\neq 0\wedge\varphi\neq\pi/2\wedge\varphi\neq\pi$: semicono de ecuación $z=\mathrm{cotg}(\varphi)\sqrt{x^2+y^2}$, observe el gráfico.

[(2)] Lo presentamos proyectando contra el plano *xy*, análogamente podría comenzarse proyectando contra *xz* o *yz*.

<u>Ejemplo</u>: Calcule el volumen del cuerpo D definido por $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{8-x^2-y^2}$.

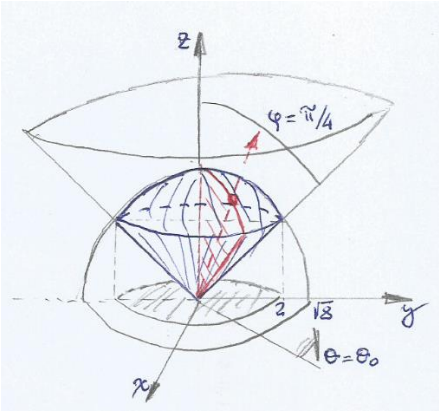
Comenzamos analizando cuáles son las superficies que limitan al cuerpo.

- $z=\sqrt{x^2+y^2} \to z^2 = x^2+y^2$ es una superficie cónica. Volviendo hacia el dato, de esta última resulta $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, pero el dato es $z=\sqrt{x^2+y^2}$ semicono con $z\ge 0$.
- $z=\sqrt{8-x^2-y^2} \to z^2 = 8-x^2-y^2 \to x^2+y^2+z^2=8$ es una superficie esférica. Volviendo hacia el dato, de esta última resulta $z=\pm\sqrt{8-x^2-y^2}$, pero el dato es $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ semiesfera con $z\ge 0$.

Conclusión: $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{sup.semic.}} \le z \le \underbrace{\sqrt{8-x^2-y^2}}_{\text{sup.semies}}$, el cuerpo tiene el aspecto del dibujo.

El cuerpo se parece a un "cucurucho con helado", vemos que un semiplano de $\theta=\theta_0$ constante lo corta en forma de "oblea" introducida en el "helado", que tiene –por simetría– la misma forma para todo θ_0.

En cada posición, como la dibujada, φ se "abre" desde $\varphi=0$ hasta $\varphi=\pi/4$. Note que el semicono tiene ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y, por ejemplo, cortado con $x=0$ resulta $z=|\,y\,|$ en el plano yz (de allí el ángulo de 45º respecto de z^+). (3)



Por último, para cada $\theta\in[0,2\pi)$ y cada $\varphi\in[0,\pi/4]$, vemos que –por el interior del cuerpo– los puntos del mismo se encuentran con $\rho\in[0,\sqrt{8}]$, es decir, desde el origen hasta el radio de la esfera. Con ello, el volumen resulta:

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \underbrace{\int_0^{\sqrt{8}} \rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\rho}_{\frac{1}{3}\mathrm{sen}(\varphi)[\rho^3]_0^{\sqrt{8}}} = \tfrac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi}_{.-[\cos(\varphi)]_0^{\pi/4}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}\,(1-\sqrt{2}/2)}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{32}{3}\pi\,(\sqrt{2}-1).$$

También se podría haber trabajado comenzando el razonamiento en cartesianas, en ese caso, la curva C "más externa" del cuerpo es la que resulta de la intersección de ambas superficies:

$$C = \begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2+x^2+y^2=8 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Con lo cual proyecta contra el plano xy en la región sombreada $x^2+y^2\le 4$. De donde:

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dz = \iint_{D_{xy}} (\sqrt{8-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

Pasando ahora la integral doble a polares:

(3) También podría trabajar desde la ecuación de la superficie coordenada $z=\mathrm{cotg}(\varphi)\sqrt{x^2+y^2}$ para $0<\varphi<\pi/2$. En este caso corresponde $\mathrm{cotg}(\varphi)=1 \to 1/\mathrm{tg}(\varphi)=1 \to \mathrm{tg}(\varphi)=1 \to \varphi=\pi/4$.

$$\text{vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (\sqrt{8-r^2} - r)\, r\, dr}_{[-\frac{1}{3}(8-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3} r^3]_0^2} = \tfrac{16(\sqrt{2}-1)}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{32}{3}\pi(\sqrt{2}-1).$$

El planteo completo en cilíndricas es $\text{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr \int_r^{\sqrt{8-r^2}} dz$ que, claramente, lleva al mismo resultado que comenzar en cartesianas y luego pasar a polares.

<u>Ejemplo</u>: Calcule la masa del cuerpo D definido por $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge -\sqrt{3x^2 + 3y^2}$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

En este caso la densidad es $\delta(x,y,z) = k|z|$ con $k > 0$ constante, debemos calcular:

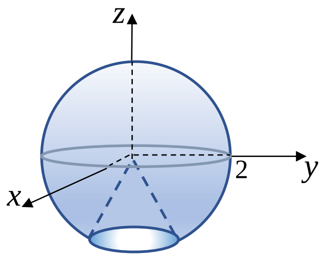
$$\text{masa}(D) = \iiint_D k|z|\,dx\,dy\,dz\,.$$

Según se indica en el dibujo el cuerpo es el interior de la esfera de radio 2 con centro en el origen, pero por encima (hacia z$^+$) del semicono de ecuación

$$z = -\sqrt{3x^2 + 3y^2} = -\sqrt{3}\,\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

que es la superficie coordenada de esféricas con $\text{cotg}(\varphi) = -\sqrt{3}$.

Es decir, $\text{tg}(\varphi) = -1/\sqrt{3} \to \varphi = \pi - \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = 5\pi/6$. [4]



Entonces, pasando a esféricas queda:

$$\text{masa}(D) = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{5\pi/6} d\varphi \underbrace{\int_0^2 \overbrace{|\rho\cos(\varphi)|}^{\rho|\cos(\varphi)|} \rho^2 \,\text{sen}(\varphi)\,d\rho}_{|\cos(\varphi)|\frac{1}{4}[\rho^4]_0^2} = 4k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{5\pi/6} |\cos(\varphi)|\,\text{sen}(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Dado que para $\pi/2 < \varphi \le 5\pi/6$ resulta $\cos(\varphi) < 0$ (en la zona de $z < 0$), debemos subdividir en dos partes la integral respecto de φ .

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi)\,\text{sen}(\varphi)\,d\varphi}_{\frac{1}{2}[\text{sen}^2(\varphi)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{5\pi/6} (-\cos(\varphi))\,\text{sen}(\varphi)\,d\varphi}_{-\frac{1}{2}[\text{sen}^2(\varphi)]_{\pi/2}^{5\pi/6} = \frac{3}{8}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{7}{8}\,.$$

De donde:

$$\text{masa}(D) = 4k\tfrac{7}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = 7k\pi\,.$$

---

[4] Siendo la tangente negativa, $\text{tg}(\varphi) = -1/\sqrt{3}$ con $0 \le \varphi \le \pi \wedge \varphi \ne \pi/2$, resulta $\varphi = \pi - \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$. Es decir, calculamos el ángulo del semicono superior ($\varphi_1 = \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$) y –por simetría– obtenemos $\varphi = \pi - \varphi_1$.