Revisión conceptos acerca de Taylor para función escalar de una variable

Orden de contacto entre curvas

Dadas dos curvas de ecuaciones $y = f(x)$ e $y = p(x)$ con $x \in E(x_0)$, suponiendo que las funciones f y p admiten derivadas sucesivas, cuando se cumple que:

$$y_0 = f(x_0) = p(x_0)\,,\ f'(x_0) = p'(x_0)\,, \cdots,\ f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) \quad y \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq p^{(n+1)}(x_0)\,,$$

se dice que **las curvas tienen orden de contacto *n*** en el punto (x_0, y_0).

Es decir, en x_0 tienen igual valor las funciones y sus derivadas sucesivas hasta el orden *n* inclusive, siendo distintas las derivadas de orden *n*+1.

Interesa particularmente, dada la función *f* , construir un polinomio que cumpla con dicha propiedad. Para facilitar los cálculos, conviene plantear el polinomio respetando el siguiente formato:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n\,.$$

En este caso:

$f(x_0) = p(x_0) = a_0 \ \Rightarrow\ a_0 = f(x_0)$.

………………………………………

$f'(x_0) = p'(x_0) =$
$$= [a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}(x - x_0)^{n-2} + n\,a_n(x - x_0)^{n-1}]_{x = x_0} = a_1$$

De donde: $a_1 = f'(x_0)$.

………………………………………

$f''(x_0) = p''(x_0) =$
$$= [2a_2 + 3\cdot 2\, a_3(x - x_0) + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}(x - x_0)^{n-3} + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}]_{x = x_0} = 2a_2$$

De donde: $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$.

………………………………………

$f'''(x_0) = p'''(x_0) =$
$$= [3\cdot 2\, a_3 + \cdots + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}(x - x_0)^{n-4} + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}]_{x = x_0} = 3\cdot 2\, a_3$$

De donde: $a_3 = \frac{1}{3\cdot 2} f'''(x_0)$

………………………………………

Si continuamos con el proceso, se puede demostrar que $a_k = \frac{1}{k!}$, donde:

$$1! = 1,\ 2! = 2\cdot 1 = 2,\ 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6,\ \cdots,\ n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

son los **factoriales** de los números naturales.

Por ejemplo, $6!$ se lee “6 factorial”, $6! = 720$.

También se define $0! \doteq 1$.

¿Qué logramos hasta ahora?

Teniendo como dato la curva de ecuación $y = f(x)$ con $x \in E(x_0)$ y suponiendo que f admite derivadas sucesivas , obtuvimos la curva de ecuación $y = p(x)$ con $x \in E(x_0)$, donde

$$p(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x - x_0)^k$$

y ambas curvas tienen orden de contacto de por lo menos ***n*** en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Polinomio de Taylor

Dada $f: D \subset \Re \to \Re$, si f es derivable hasta el orden $\boldsymbol{n}$ en un punto x_0 interior a D, para todo punto $x_0 + h$ de un entorno de x_0 se puede expresar:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + [\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\, h^k] + T_n(x_0+h).$$

Si ahora denotamos $x = x_0 + h$, resulta $h = x - x_0$, reemplazando en la anterior obtenemos:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}_{p_n(x)} + T_n(x) \qquad (1)$$

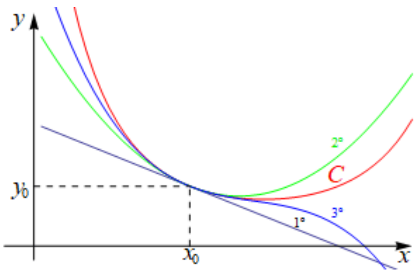
que representa el desarrollo de Taylor de orden $\boldsymbol{n}$ para f en un $E(x_0)$, donde $T_n(x)$ se denomina **término complementario** de dicho desarrollo.

Por lo visto en la página anterior, p_n es un polinomio cuya gráfica tiene orden de contacto de por lo menos $\boldsymbol{n}$ con la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

En el gráfico de la derecha se representa en color rojo la curva de ecuación $y = f(x)$ en un cierto dominio.

En color negro $y = p_1(x)$, que no es más que la recta tangente a C en (x_0, y_0).

En verde $y = p_2(x)$, y en azul $y = p_3(x)$.



Cerca de x_0, a mayor orden de contacto, más "parecido" es el gráfico del polinomio al de la curva *C*.

Cuando se aproxima por Taylor de orden *n*, se desprecia $T_n(x)$ de (1) y resulta:

$$\boxed{f(x) \cong \underbrace{f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}_{p_n(x)} \quad \text{para } x \in E(x_0)}, \qquad (2)$$

es decir, se toma como valor aproximado de $f(x)$ el de $p_n(x)$. La aproximación mejora cuanto más cerca está x de x_0.

Se dice que se realiza una **aproximación lineal** cuando se usa la ecuación de la recta tangente en lugar de la ecuación de la curva, quedando:

$$\boxed{f(x) \cong \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)}_{p_1(x)} \text{ para } x \in E(x_0)}. \qquad (3)$$

Cuando se realiza una aproximación por Taylor de orden $\boldsymbol{n}$, el error que se comete es $T_n(x)$, lo que se ha despreciado. Se puede demostrar que $\dfrac{T_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Por otra parte, si la función admite $f^{(n)}$ continua y $f^{(n+1)}$ en un $E(x_0)$, se puede demostrar que existe por lo menos un punto $\alpha = x_0 + \theta\,(x - x_0)$ con $0 < \theta < 1$ tal que $T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha)(x-x_0)^{n+1}$, que es la expresión de Lagrange del término complementario. Esta última, es una de las expresiones que permiten acotar el error de la aproximación.

Ejemplo: Siendo $f(x)=1+e^{2x}\ln(x^2+1)$, muestre el comportamiento de las aproximaciones por Taylor desde 1º hasta 4º orden alrededor de $x_0=0$. Por ejemplo, para $-0.2<x<0.2$.

En este caso:

$$f(x)=1+e^{2x}\ln(x^2+1) \quad\rightarrow\quad f(0)=1$$

$$f'(x)=2e^{2x}\ln(x^2+1)+e^{2x}\frac{2x}{x^2+1} \quad\rightarrow\quad f'(0)=0$$

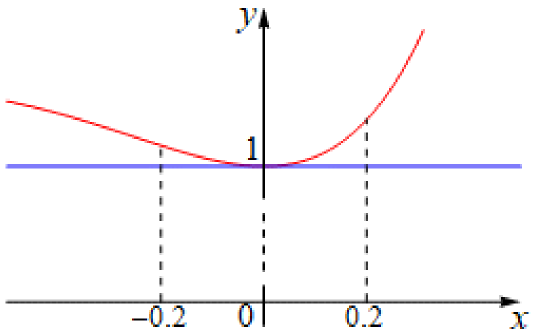
Si sigue derivando, podrá verificar que: $f''(0)=2$, $f'''(0)=12$ y $f^{(4)}(0)=36$.

Dada (2) con $x_0=0$, tenemos que: $f(x)\cong \underbrace{f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)\,x^k}_{p_n(x)}$, $x\in E(0)$

De donde surgen las siguiente expresiones y gráficos comparativos. En todos casos $y=f(x)$ se representa en color rojo, y el polinomio aproximante en color azul.

1º orden, $p_1(x)=1+0\cdot x$

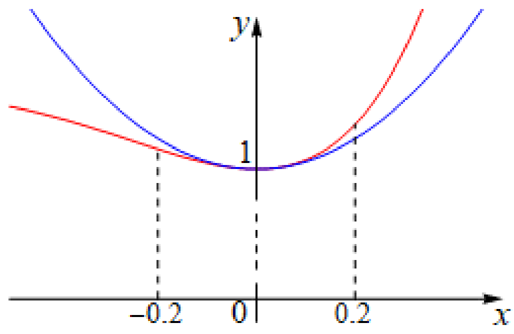
$f(x)\cong 1$



Como la recta tangente es horizontal, se estima función constante alrededor de 0.

2º orden, $p_2(x)=1+0\cdot x+x^2$

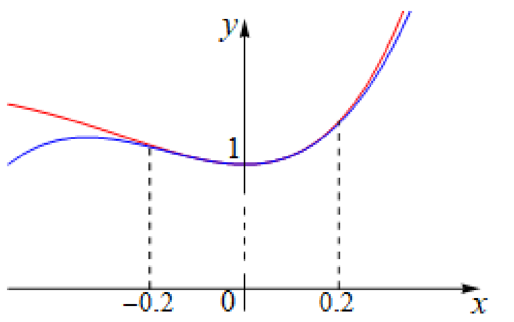
$f(x)\cong 1+x^2$



Ahora se aproxima mediante una parábola, la curva azul es más parecida a la roja

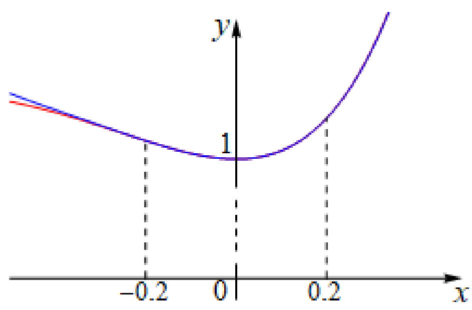
3º orden, $p_3(x)=1+0\cdot x+x^2+2x^3$

$f(x)\cong 1+x^2+2x^3$



4º orden, $p_3(x)=1+0\cdot x+x^2+2x^3+\frac{3}{2}x^4$

$f(x)\cong 1+x^2+2x^3+\frac{3}{2}x^4$



Aquí se muestra que, con n creciente, las curvas $y=f(x)$ e $y=p_n(x)$ son cada vez más parecidas alrededor de 0. Además, la aproximación por izquierda no es necesariamente igual que por derecha. Sólo por curiosidad, para este ejemplo:

$$p_1(0.12)=1.12,\ p_2(0.12)=1.0144,\ p_3(0.12)=1.01786 \text{ y } p_4(0.12)=1.01817$$

mientras que, con mayor precisión: $f(0.12)\cong 1.018175436$.

Ejemplo: Siendo $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$, calcule aproximadamente $f(2.98)$ con Taylor de 2º orden.

Comenzamos por elegir $x_0 = 3$, donde podemos calcular fácilmente el valor de la función y del cual 2.98 "es cercano".

Entonces, usando (2), planteamos:

$$f(x) \cong f(3) + f'(3)(x-3) + \tfrac{1}{2} f''(3)(x-3)^2 \quad \text{para } x \in E(3)$$

$f(3) = 9\sqrt{4} = 18$

$f'(x) = 2x\sqrt{x+1} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \rightarrow \quad f'(3) = 6\sqrt{4} + 3^2 \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{57}{4}$

$f''(x) = 2\sqrt{x+1} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + x^2\,\tfrac{1}{2}(-1/2)(x+1)^{-3/2}$

De donde $f''(3) = 4 + 3/2 + 3/2 + 9\tfrac{1}{2}(-1/2)(4)^{-3/2} = 7 - 9/32 = 215/32$

Con lo cual:

$$f(x) \cong 18 + \tfrac{57}{4}(x-3) + \tfrac{215}{64}(x-3)^2 \quad \text{para } x \in E(3)$$

Entonces:

$$f(2.98) \cong 18 + \tfrac{57}{4}(2.98-3) + \tfrac{215}{64}(2.98-3)^2 = 17.7163.$$

Si quisiéramos una **aproximación lineal**, **Taylor de 1º orden**, tendríamos:

$$f(x) \cong f(3) + f'(3)(x-3) \quad \text{para } x \in E(3)$$

entonces,

$f(x) \cong 18 + \tfrac{57}{4}(x-3)$ para $x \in E(3)$, resultando $f(2.98) \cong 18 + \tfrac{57}{4}(2.98-3) = 17.715$