

1. Ejercicio 1.1, *Composición de funciones.*

Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , calcule sin realizar la composición la matriz jacobiana de  $h = \vec{f} \circ \vec{g}$  en el punto que se indica.

$$b) \vec{f}(u, v) = (uv, u + v^2, \ln(v)), \quad \vec{g}(x, y) = (x^2 - y^2, xy), \quad A = (1, 2).$$

*Solución.*

Notar que como  $\vec{g}$  es diferenciable en  $A$  y  $\vec{f}$  es diferenciable en  $\vec{g}(A) = \vec{g}(1, 2) = (-3, 2)$ , por el teorema de Regla de la Cadena sabemos que  $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$  es diferenciable en  $A$  y su derivada viene dada por la matriz

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(A) = D\vec{f}(\vec{g}(A)) D\vec{g}(A). \quad (1)$$

Por lo tanto, sólo tenemos que calcular las respectivas matrices y multiplicarlas.

$$\bullet D\vec{g} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}. \text{ Evaluándola en } A, D\vec{g}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\bullet D\vec{f} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 2v \\ 0 & 1/v \end{pmatrix}. \text{ Evaluándola en } \vec{g}(A) = (-3, 2), D\vec{f}(\vec{g}(A)) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(Recordar que a la matriz  $D\vec{f}$  la evaluamos en  $\vec{g}(A) = (-3, 2)$  y NO en  $A = (1, 2)$ .)

• Ahora reemplazamos las matrices en (1):

$$\begin{aligned} D\vec{h}(A) &= D\vec{f}(\vec{g}(A)) D\vec{g}(A) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 10 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Es decir, la matriz jacobiana pedida es } D\vec{h}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 10 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Dada  $h(u) = f(\vec{g}(u))$ , calcule  $h'(0)$  sabiendo que  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

y  $\vec{g}(u) = (3u, 2u)$ .

¿Pudo aplicar la regla de la cadena?

*Solución.*

Si quisiéramos utilizar la regla de la cadena, primero tendríamos que verificar que  $\vec{g}$  es diferenciable en  $u = 0$  (lo cual claramente sucede) y que  $f$  es diferenciable en  $\vec{g}(0) = (0, 0)$ . Ahora bien, en el ejercicio 40.a) de la práctica III se probó que  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$  y que  $f$  NO es diferenciable en  $(0, 0)$ . Con lo cual, NO podemos aplicar la regla de la cadena para hallar  $h'(0)$ .

Halleemos la expresión de  $h$  para intentar calcular  $h'(0)$ .

$$\begin{aligned} h(u) = f(\vec{g}(u)) &= \begin{cases} \frac{(3u)^2 2u}{(3u)^2 + (2u)^2} & \text{si } (3u, 2u) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (3u, 2u) = (0, 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{18u^3}{13u^2} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{18}{13} u & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(¿Estaría mal decir que  $h(u) = \frac{18}{13}u$ ?)

Con lo cual,  $h'(0) = \frac{18}{13}$ .

Observación: Veamos qué hubiera sucedido si nos olvidábamos de verificar las hipótesis y aplicábamos la fórmula:

$$Df(\vec{g}(0))D\vec{g}(0) = Df(0, 0)D\vec{g}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Es decir, hubiéramos llegado a que  $h'(0) = 0$ .

Por lo tanto, siempre tenemos que verificar las hipótesis antes de aplicar un teorema. Tener esto presente al resolver el Ejercicio 1.6, Composición de funciones.

3. Ejercicio 1.9, *Composición de funciones*. Resueltos por Martín Maulhardt en

<https://www.youtube.com/watch?v=1k1vNn-IIQU>

4. Ejercicio 1.12, 1.13, *Composición de funciones*.

Campo escalar en puntos de una curva: Sea  $f$  un campo escalar diferenciable,  $C$  una curva regular parametrizada mediante la función  $\vec{g}$  y considere que los puntos de  $C$  son interiores al dominio de  $f$ . Demuestre que si  $\vec{g}(t_0) \in C$ ,

$$(f \circ \vec{g})'(t_0) = \nabla f(\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}'(t_0). \quad (2)$$

Indique cómo ha utilizado las hipótesis enunciadas.

*Solución.*

Como nos piden encontrar la derivada de  $f \circ \vec{g}$ , veamos si se cumplen las hipótesis del teorema de regla de la cadena.

Consideremos  $\vec{g}(t_0) \in C$ .

- Por un lado, como  $C$  es una curva regular parametrizada mediante la función  $\vec{g}$ , sabemos que  $\vec{g}$  es diferenciable en  $t_0$ .
- Además, también nos dicen que los puntos de  $C$  son interiores al dominio de  $f$  y que  $f$  es diferenciable, luego podemos asegurar que  $f$  es diferenciable en  $\vec{g}(t_0)$ .

Es decir, se verifican las hipótesis del teorema y por lo tanto la derivada de la composición viene dada por:

$$\begin{aligned} (f \circ \vec{g})'(t_0) &= Df(\vec{g}(t_0)) \quad D\vec{g}(t_0) \\ &= \overbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(t_0)) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(t_0)) \right)}^{\text{MATRIZ jacobiana de } f \text{ en } \vec{g}(t_0)} \begin{pmatrix} g'_1(t_0) \\ g'_2(t_0) \\ \vdots \\ g'_n(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{g}(t_0)) \quad g'_j(t_0). \end{aligned}$$

Ahora veamos qué sucede cuando calculamos  $\nabla f(\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}'(t_0)$ :

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}'(t_0) &= \overbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(t_0)), \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(t_0)) \right)}^{\text{VECTOR gradiente } f \text{ en } \vec{g}(t_0)} \cdot \left( g'_1(t_0), \quad \cdots, \quad g'_n(t_0) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{g}(t_0)) \quad g'_j(t_0). \end{aligned}$$

Notar que en ambos casos llegamos a la misma expresión, por lo tanto, podemos decir que se cumple la igualdad (2), es decir que  $(f \circ \vec{g})'(t_0) = \nabla f(\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}'(t_0)$ .

¿Era esperable esta igualdad? ¿Hay alguna interpretación geométrica que podamos hacer?

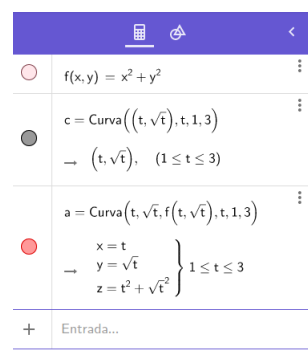
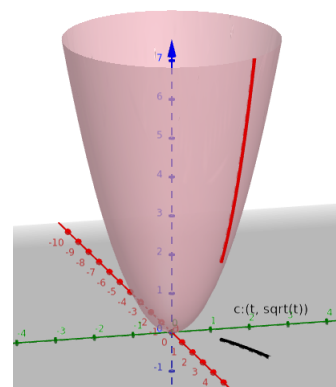
Quizás mirar qué sucede en un ejemplo pueda ayudar.

Consideremos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\vec{g}(t) = (t, \sqrt{t}) \text{ con } t \in [1, 3].$$

Pensar qué información nos está aportando  $(f \circ \vec{g})'(2)$ . A partir de ahí ver cómo se puede extender esa idea.



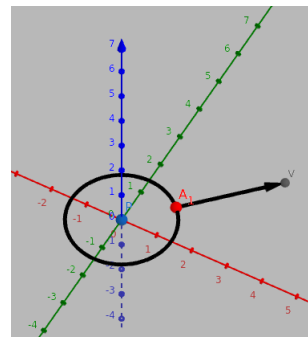
Pueden probar con otras funciones y otras curvas usando el Geogebra. En este caso la imagen de  $\vec{g}$  es la curva dibujada en color negro y la imagen de  $f \circ \vec{g}$  es la curva dibujada en color rojo.

Veamos ahora qué sucede si trabajamos con las hipótesis propuestas en el ejercicio 13.

Comencemos estudiando el ejemplo propuesto:

$f(x, y) = x^2 + y^2$  y el punto  $A = (1, 1)$  perteneciente a la curva de nivel 2, es decir  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$ .

Claramente  $\nabla f(1, 1)$  es perpendicular a la curva de nivel.



Gráficamente lo que está sucediendo es que si estamos en un punto  $P$  de un gráfico y caminamos sobre este en una curva de nivel, levantada a dicho punto, por definición de curva de nivel, los valores de la función no habrán cambiado durante el recorrido. Es decir, caminado por una curva de nivel, los valores de la función se mantienen constantes, y por lo tanto, es esperable que la derivada de la función en esa dirección, sea cero (porque mide la velocidad de la variación de la función en ese punto en dicha dirección). Y esto es equivalente a que el gradiente sea perpendicular a esa dirección.

Ahora formalicemos este hecho. Sean  $f \in C^1(D)$  una función escalar de dos variables,  $A$  un punto interior a  $D$  tal que  $\nabla f(A) \neq \vec{0}$  y  $C$  a la curva de nivel que pasa por  $A$ , es decir,  $C = \{(x, y) \in D : f(x, y) = f(A)\}$ . Como  $\nabla f(A) \neq \vec{0}$  y  $f \in C^1(D)$ , sabemos que existe  $\vec{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $I$  es un intervalo abierto que contiene al 0,  $\vec{g}(0) = A$ ,  $\vec{g} \in C^1(I)$  y  $\vec{g}(t) \in C$  para todo  $t \in I$ . Esto último quiere decir que

$$f(\vec{g}(t)) = f(A)$$

para todo  $t \in I$ . Ahora bien, como  $f$  es diferenciable en  $A = \vec{g}(0)$  y  $\vec{g}$  es diferenciable en 0, sabemos que la composición es diferenciable en 0 y que además, por (2),

$$(f \circ \vec{g})'(0) \underset{(2)}{=} \nabla f(\vec{g}(0)) \cdot \vec{g}'(0) = \nabla f(A) \cdot \vec{g}'(0).$$

Por otro lado como  $f(\vec{g}(t)) = f(A)$  para todo  $t$ , se tiene que  $(f \circ \vec{g})'(t) = 0$ . En consecuencia,  $\nabla f(A) \cdot \vec{g}'(0) = 0$ .

Notar que probamos que  $\nabla f(A)$  es perpendicular al vector tangente a  $C$  en  $A$  " $\vec{g}'(0)$ ". ¿Alcanza esto para probar que  $\nabla f(A)$  es perpendicular a cualquier vector tangente a  $C$  en  $A$ ?

5. Ejercicio 3 del parcial tomado el 11-05-2019. *Composición de funciones*. Resuelto por C. Unger, S. Gigola, E. Zitto, R.O. Sirne.

Sean  $f, \vec{g}$  definidos en  $\mathbb{R}^2$  con  $f(u, v) = u^2v + v^3$  y  $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y-2) & x \cos(y-2) \\ 3 & 2y \end{pmatrix}$  la matriz jacobiana de  $\vec{g}$ . Sabiendo que  $\vec{g}(1, 2) = (3, 1)$  y que  $h = f \circ \vec{g}$ , **halle** los versores según los cuales la función  $h$  tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en el punto  $(1, 2)$  y **calcule** los versores de dichas derivadas.

*Solución.*

Dado que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  por ser polinómica (gradiente continuo) y  $\vec{g} \in C^1(\mathbb{R}^2)$  pues  $D\vec{g}$  tiene elementos continuos, ambas son diferenciables en todo punto. Entonces  $h = f \circ \vec{g}$  resulta diferenciable, en particular en el punto  $(1, 2)$ , con lo cual la máxima derivada direccional se produce en la dirección del  $\nabla h(1, 2)$ , la mínima en la dirección opuesta y la nula en las ortogonales.

Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} Dh(1, 2) &= Df(\vec{g}(1, 2))D\vec{g}(1, 2) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 + 3v^2 \end{pmatrix} \Big|_{(3,1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces  $\nabla h(1, 2) = (36, 54)$ , siendo  $\|\nabla h(1, 2)\| = 18\sqrt{13}$ , con lo cual:

Dirección deriv. máxima:  $\check{r}_{\text{máx}} = \frac{\nabla h(1,2)}{\|\nabla h(1,2)\|} = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$ . Valor derivada máxima:  $18\sqrt{13}$ .

Dirección deriv. mínima:  $\check{r}_{\text{mín}} = -\frac{\nabla h(1,2)}{\|\nabla h(1,2)\|} = (-2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$ . Valor derivada mínima:  $-18\sqrt{13}$ .

Direcciones de derivada nula:  $\check{r}_{\text{nula}_1} = (-3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$  y  $\check{r}_{\text{nula}_2} = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$ . En ambas direcciones la derivada resulta igual a 0.

6. Ejercicio 2.19, *Funciones definidas en forma implícita*.

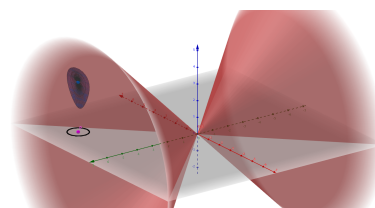
Demuestre que las ecuaciones dadas definen implícitamente la variable  $z$  en función de las variables  $x$  e  $y$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0)$ , cuyo gráfico pasa por  $A = (x_0, y_0, z_0)$ . Calcule  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

a)  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ,  $A = (4, 5, z_0)$ ,  $z_0 > 0$ .

*Solución.*

Comencemos notando que para que el gráfico pase por  $A$ , y teniendo en cuenta que  $z_0 > 0$ , se debe cumplir que  $z_0 = 3$ .

Si miramos el gráfico de la superficie con la que estamos trabajando (es decir,  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ) podemos ver fácilmente que existe un entorno del  $(4, 5)$  en el que la variable  $z$  puede ser definida en función de  $x$  e  $y$ .



Para demostrar esto, consideremos ahora la función  $G(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ . Notar que

- $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ,
- $G(4, 5, 3) = 0$ ,
- $\frac{\partial G}{\partial z}(4, 5, 3) = G'_z(\vec{A}) = 2z|_{(4,5,3)} = 6 \neq 0$ .

Es decir, se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función implícita. Y éste nos garantiza que la ecuación define implícitamente a la variable  $z$  en función de  $x$  e  $y$ , en un entorno del punto  $(4, 5)$ .

Además, llamando  $f$  a dicha función, el Teorema nos dice que:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 5) = -\frac{G'_x(4, 5, 3)}{G'_z(4, 5, 3)} = -\frac{2x}{6}|_{(4,5,3)} = -\frac{4}{3}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 5) = -\frac{G'_y(4, 5, 3)}{G'_z(4, 5, 3)} = -\frac{-2y}{6}|_{(4,5,3)} = \frac{5}{3}$

Por lo tanto,  $\nabla f(x_0, y_0) = \nabla f(4, 5) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ .

7. Ejercicio similar al 2.20 , *Funciones definidas en forma implícita*. Resuelto por Martín Maulhardt en

<https://www.youtube.com/watch?v=MptdugJW1cg>

8. Ejercicio 3 del parcial tomado el 17-11-2018. *Funciones definidas en forma implícita*. Resuelto por C. Unger, S. Gigola, E. Zitto, R.O. Sirne.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy + e^{uz-2} + z - 4 = 0 \\ xz + e^{yz-2} + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

se cumple en  $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, 1, 2, 1)$ .

**Verifique** que dicho sistema define implícitamente  $z = f(x, y)$  y  $u = g(x, y)$  en un entorno de  $(1, 1)$  y **halle** una ecuación para el plano tangente a la superficie  $\Sigma$  de ecuación  $z = f(x, y)$  en  $(1, 1, f(1, 1))$ .

*Solución.*

Dado que el sistema es de dos ecuaciones y se desea que las variables independientes sean  $x$  e  $y$ , las dependientes serán  $u$  y  $z$ .

Denotando  $F(x, y, z, u) = xy + e^{uz-2} + z - 4$  y  $G(x, y, z, u) = xz + e^{yz-2} + 2y - 5$ , veamos si se cumplen las siguientes tres propiedades:

- $\begin{cases} F(1, 1, 2, 1) = 1 + e^0 + 2 - 4 = 0 \\ G(1, 1, 2, 1) = 2 + e^0 + 2 - 5 = 0 \end{cases}$ , se cumplen, tal como se indica en el enunciado.
- $\begin{cases} \nabla F(x, y, z, u) = (y, x, ue^{uz-2} + 1, ze^{uz-2}) \\ \nabla G(x, y, z, u) = (z, ze^{yz-2} + 2, x + ye^{yz-2}, 0) \end{cases}$ , ambos gradientes son continuos en  $\mathbb{R}^4$ , es decir,  $F, G \in C^1(\mathbb{R}^4)$ , por tener componentes polinómicas o con producto de funciones continuas (polinómica compuesta con exponencial) y suma de continuas. Se cumple  $F, G \in C^1$  en un entorno de  $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, 1, 2, 1)$ .
- $\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)}(1, 1, 2, 1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ , se cumple.

Con lo cual se puede afirmar que el sistema dado define implícitamente  $z = f(x, y)$  y  $u = g(x, y)$ , siendo ambas diferenciables en el punto  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

En particular, la superficie de ecuación  $z = f(x, y)$  admite plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$  cuya ecuación es:

$$z = f(1, 1) + f'_x(1, 1)(x - 1) + f'_y(1, 1)(y - 1) \quad (3)$$

donde  $f(1, 1) = z_0 = 2$ , y las derivadas son:

$$f'_x(1, 1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, u)}(1, 1, 2, 1)}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)}(1, 1, 2, 1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-4}{-4} = -1.$$

$$f'_y(1, 1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, u)}(1, 1, 2, 1)}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)}(1, 1, 2, 1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-8}{-4} = -2.$$

Con lo cual, reemplazando en (3), una ecuación del plano tangente es

$$z = 2 - (x - 1) - 2(y - 1).$$

9. Ejercicio 4 del parcial tomado el 22-10-2018. *Funciones definidas en forma implícita*. Resuelto por C. Unger, S. Gigola, E. Zitto, R.O. Sirne.

**Analice** si la intersección de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &: z = 2y^2 - x^2 \\ \Sigma_2 &: x \ln(yz) + y \ln(xz) = z - 1\end{aligned}$$

define una curva  $C$  en un entorno del punto  $A = (1, 1, 1)$ . En caso afirmativo, **determine** si existe algún punto en el que la recta tangente a  $C$  en  $A$  interseca al eje  $x$ .

*Solución.*

Comenzamos expresando la curva como la intersección de las dos superficies expresadas en forma implícita, es decir:

$$\begin{cases} 0 = \overbrace{2y^2 - x^2 - z}^{F(x,y,z)} \\ 0 = \underbrace{x \ln(yz) + y \ln(xz) - z + 1}_{G(x,y,z)} \end{cases}$$

Ahora vemos si se cumplen las siguientes tres propiedades: • en  $A$  se cumplen ambas ecuaciones, • los gradientes de  $F$  y  $G$  son continuos en un entorno de  $A$  y • el producto vectorial  $\nabla F(A) \times \nabla G(A) \neq \vec{0}$ .

- $F(A) = 2 - 1 - 1 = 0$  y  $G(A) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$ , se cumplen.

- $\nabla F(x, y, z) = (-2x, 4y, -1)$ ,  
 $\nabla G(x, y, z) = (\ln(yz) + \frac{yz}{xz}, \frac{xz}{yz} + \ln(xz), \frac{xy}{yz} + \frac{yx}{xz} - 1)$ .

Ambos continuos en un entorno de  $A$ .

- $\vec{d} = \nabla F(A) \times \nabla G(A) = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 1, -6) \neq \vec{0}$ , se cumple.

Como se cumplen las tres propiedades se puede afirmar que la intersección de las dos superficies define una curva  $C$  en un entorno del punto  $A = (1, 1, 1)$ . Es más, la curva es regular en  $A$  y el vector  $\vec{d}$  calculado para verificar la tercera propiedad es un vector director de la recta tangente a  $C$  en  $A$ .

Entonces, una ecuación para dicha recta es:

$$\vec{X} = (1, 1, 1) + \lambda(5, 1, -6) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Es decir, los puntos  $\vec{X} = (x, y, z)$  que pertenecen a la recta son tales que:

$$(x, y, z) = (1 + 5\lambda, 1 + \lambda, 1 - 6\lambda) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si la recta tuviera algún punto en común con el eje  $x$ , de puntos  $(x_0, 0, 0)$ , debería existir un valor de  $\lambda$  para el cual resulten  $\begin{cases} 1 + \lambda = 0 \\ 1 - 6\lambda = 0 \end{cases}$ . De la primera ecuación surge  $\lambda = -1$ , pero este valor no satisface a la segunda. Por ello se concluye que la recta NO interseca al eje  $x$ .