FIUBA 2020 ANÁLISIS MATEMÁTICO II (81.01) y II "A" (61.03)

Ejemplos **Ejemplos resueltos del TP I**

Observe que todas las respuestas están **debidamente justificadas**.

1. Dados 3 puntos del espacio $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (3, 2, -1)$. Se pide:

   a) Calcular la norma de los vectores $\vec{AC}, \vec{AB}$ e indicar el ángulo que forman entre ellos expresado en radianes.

   b) Hallar una ecuación cartesiana del plano π que pase por dichos puntos y la de un plano β paralelo a él que pase por el punto $D = (2, 3, -2)$.

   c) Hallar la ecuación vectorial de una recta L perpendicular al plano π que pase por el punto D. ¿Puede expresar la recta L como intersección de dos planos? En caso afirmativo, hacerlo.

Solución

a) Para obtener las coordenadas del vector $\vec{AC}$ hacemos:$\vec{AC} = C - A$ y sabemos por la definición de norma de un vector que:
$\left\|\vec{AC}\right\| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$
Idem $\left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$
Por otro lado podemos escribir el producto escalar de dos vectores como:
$\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = \vec{AC}.\vec{AB} = \left\|\vec{AC}\right\| \left\|\vec{AB}\right\| cos(\alpha)$, donde α es el ángulo que forman dichos vectores. Entonces:
$\langle (2, 1, -1), (-1, 1, 1) \rangle = (2, 1, -1)(-1, 1, 1) = \sqrt{6}\sqrt{3}cos(\alpha)$. Entonces:
$cos(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{18}}$. Ahora busque en su calculadora el ángulo cuyo coseno es el valor indicado expresado en RADIANES.

b) Para hallar la ecuación del plano π, necesitamos el vector normal al plano, el cual podemos obtener realizando el producto vectorial entre los vectores $\vec{AB}$y $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\check{i} + \check{j} - 3\check{k}.$$

Por lo tanto

π: $(-2, 1, -3)(\vec{X} - \vec{A}) = 0$

π: $(-2, 1, -3)(x - 1, y - 1, z - 0) = 0$

π: $-2x + y - 3z = -1$

M. Sassano, C. Unger, E. Zitto

Para hallar la ecuación del plano β, necesitamos un vector normal a dicho plano, el cual podemos obtener como cualquier múltiplo del vector normal al plano π que es el vector $(-2, 1, -3)$, luego un múltiplo puede ser: $N = 1.(-2, 1, -3)$. Por lo tanto
β: $(-2, 1, -3)(\vec{X} - \vec{D}) = 0$
β: $(-2, 1, -3)(x - 2, y - 3, z + 2) = 0$
β: $-2x + y - 3z = 5$. Verifique las cuentas.

c) La recta L que es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector $(-2, 1, -3)$. Como sabemos que la recta debe pasar por el punto $E = (2, 3, -2)$.Armamos la ecuación de la recta como: L: $(x, y, z) = \lambda.(-2, 1, -3) + (2, 3, -2), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$. Que es la ecuación vectorial de la recta pedida. Para escribir la recta como intersección de dos planos podemos escribir la recta como:

$$\begin{cases} x = -2\lambda + 2 \\ y = \lambda + 3 \\ z = -3\lambda - 2 \end{cases}$$

Por lo tanto despejando λ de cada ecuación tenemos: $\frac{x-2}{-2} = y - 3 = \frac{z+2}{-3} = \lambda$. Con la primera igualdad armamos un plano y con la segunda el otro, obteniendo:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3y + z = 7 \end{cases}$$

2. Dados los Conjuntos: $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 0 < |x| + |2y| \leq 1\}$ y
$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 + 4z^2 < 4, z \geq 0\}$. Se pide:

a) Graficar A y B.

b) Describir mediante inecuaciones el conjunto de puntos interiores y el conjunto frontera.

c) Decir si A y B son abiertos o cerrados, compactos y/o arco conexos. Justificar.

Solución

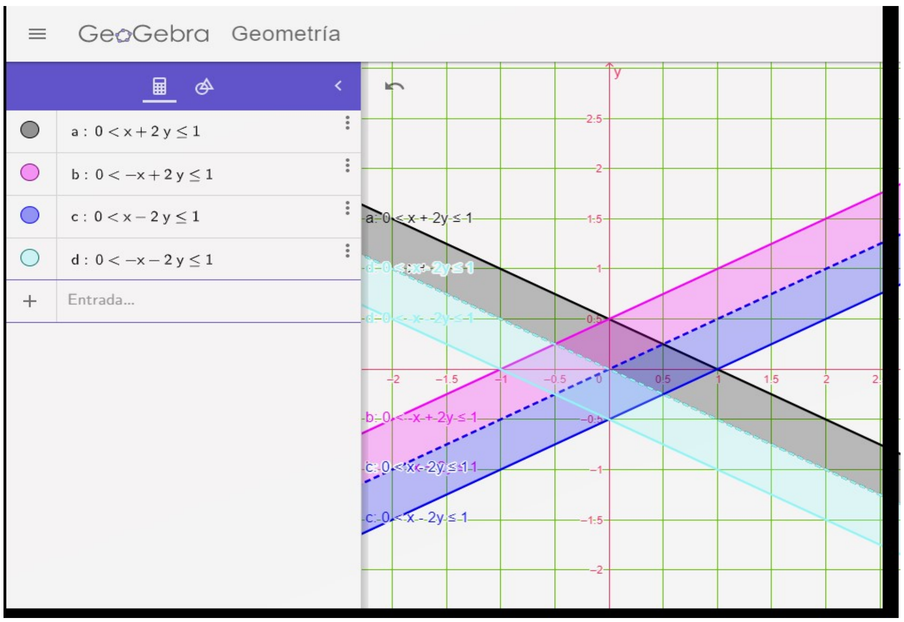
a) La definición del módulo de un número real es la siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } & x \geq 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto A puede describirse mediante las siguientes incecuaciones:

$$\begin{cases} 0 < x + 2y \leq 1 & \text{si } \ x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ 0 < -x + 2y \leq 1 & \text{si } \ x < 0 \quad y \geq 0 \\ 0 < x - 2y \leq 1 & \text{si } \ x \geq 0 \quad y < 0 \\ 0 < -x - 2y \leq 1 & \text{si } \ x < 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

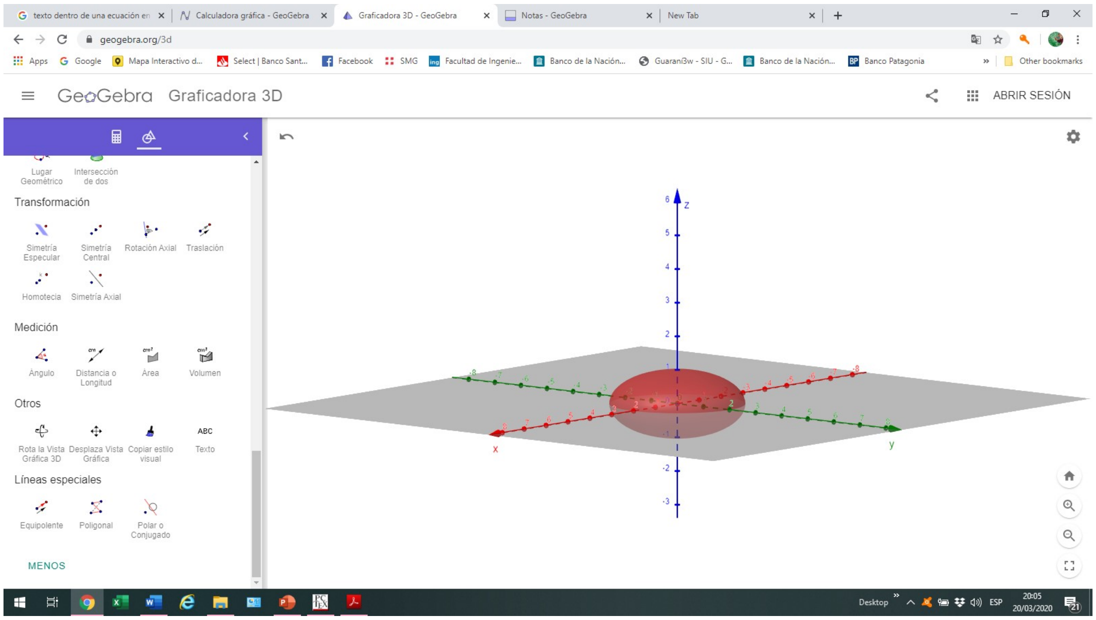
En la figura se representa la región correspondiente al conjunto A. El gráfico fue realizado con *Geogebra*, cuyo link es: *https://www.geogebra.org/geometry*



b) Se pide el conjunto de puntos interiores y el conjunto frontera, llamaremos A°, al conjunto de los puntos interiores y ∂A al conjunto de los puntos frontera.
Recordando las definiciones de puntos interior:
Un punto x se dice interior a un conjunto A si existe un entorno de x totalmente contenido en A.
Como así también la de punto frontera: *Un punto x se llama punto frontera de un conjunto A si cada entorno de x contiene tanto puntos que pertenecen a A, como puntos que no pertenecen a A.*Tenemos: $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 0 < |x| + |2y| < 1\}$.
$\partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 0 = |x| + |2y| \quad \text{o} \quad |x| + |2y| = 1\}$.

c) Se pide decidir si el conjunto A es abierto o cerrado, compacto y/o arco conexo. El conjunto A no es abierto dado que sus puntos no son todos puntos interiores. Tampoco es cerrado dado que no contiene a su frontera. Trate de justificar con las definiciones leídas que A no es compacto y es arco conexo.
Hacemos lo mismo con el conjunto B
$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 + 4z^2 < 4, z \geq 0\}$.

En la figura se representa la región correspondiente al conjunto B.
El gráfico fue realizado con *Geogebra*, cuyo link es: *https://www.geogebra.org/geometry*



Dado que $z \geq 0$ contiene al piso es decir a la parte del elipsoide que corta al plano xy y como $x^2 + y^2 + 4z^2 < 4$ la parte superior del elipsoide deberia estar punteada.

$B^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 + 4z^2 < 4, z > 0\}$.

$\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \quad \text{con} \quad z \geq 0 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 + 4z^2 \geq 4 \text{ con } \quad z = 0\}$.

En el ítem c se pide decidir si el conjunto B es abierto o cerrado, compacto y/o arco conexo. El conjunto B no es abierto dado que sus puntos no son todos puntos interiores. Tampoco es cerrado dado que no contiene a su frontera. Trate de justificar con las definiciones leídas que B no es compacto y si es arco conexo.