PRÁCTICA VI

Ecuaciones diferenciales ordinarias – 1ra parte

Ej. 3) En los siguientes casos, para cada EDO (ecuación diferencial ordinaria) se indica su SG (solución general). Verifique que la SG dada es correcta y grafique a mano alzada la solución particular (SP) que satisface las condiciones dadas.

a) $y' - 3y = -3$ *SG:* $y = 1 + Ce^{3x}$ *SP:* $y(0) = 2$

En primer lugar, verificamos que la EDO es de orden 1 (la máxima derivada es la primera) por lo que debemos tener una constante en la SG y, efectivamente, tenemos una constante C.

Ahora debemos verificar que al reemplazar la SG en la EDO la igualdad se cumpla. Por lo tanto, derivamos:

$$y' = 0 + Ce^{3x}.3 = 3Ce^{3x}$$

Y reemplazamos:

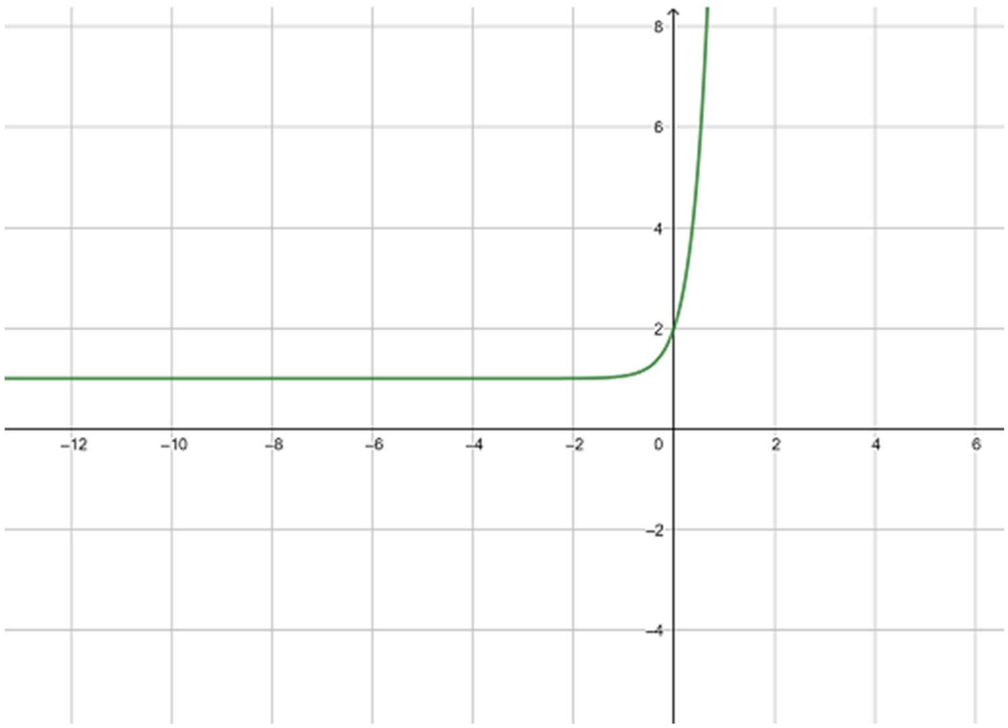
$$3Ce^{3x} - 3(1 + Ce^{3x}) = 3Ce^{3x} - 3 - 3Ce^{3x} = -3$$

Vemos que cumple, por lo tanto $y = 1 + Ce^{3x}$ es SG.

Para encontrar la SP simplemente reemplazamos y despejamos la constante:

$$y(0) = 1 + Ce^{3.0} = 1 + C = 2$$

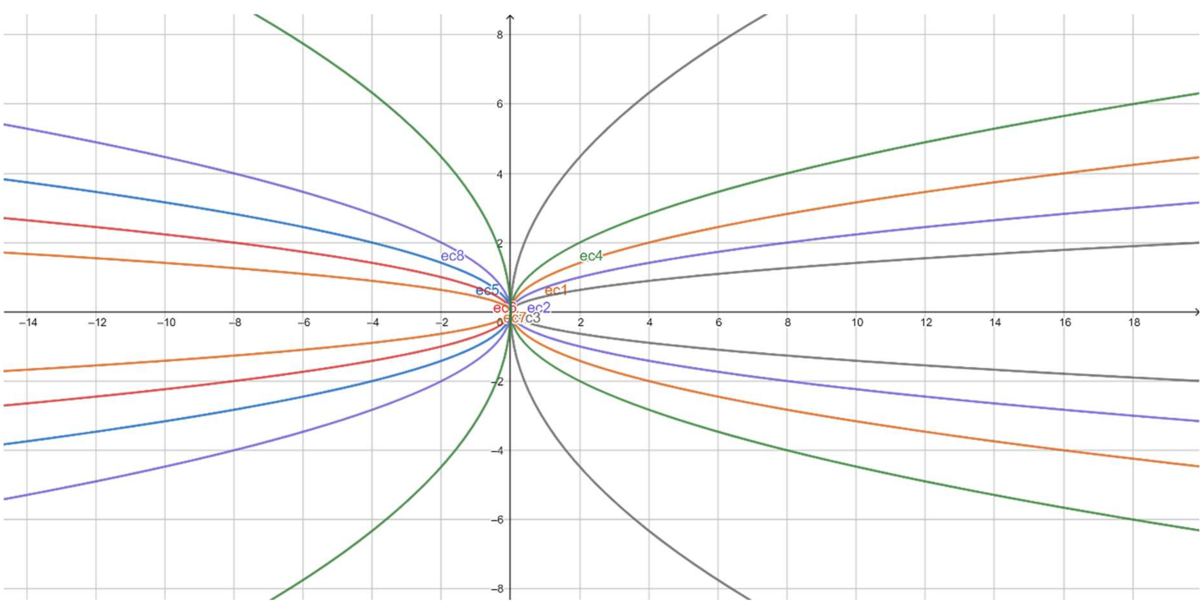
Por lo que $C = 1$, entonces la SP es: $y = 1 + e^{3x}$, una función exponencial creciente, con AH: $y = 1$.



Ej 4) Halle una ecuación diferencial tal que la familia de curvas dada sea su SG.

c) Parábolas con eje x y vértice en el origen de coordenadas.

La consigna de este ejercicio consiste en construir una ecuación diferencial dada su SG. En este ítem nos piden:



Por lo tanto, la SG será $x = Cy^2$

Para buscar la ecuación diferencial debemos derivar para plantear la ecuación cuidando que no quede la constante, eso es importante. En este ejemplo, si pensamos la variable *y* en función de *x*:

$$1 = 2Cyy'$$

Pero $C = x/y^2$, asumiendo que $y \neq 0$, entonces, reemplazamos en la ecuación:

$$1 = \frac{2xyy'}{y^2} = \frac{2xy'}{y}$$

Por lo tanto: $y = 2xy'$

Si hubiéramos planteado la variable *x* en función de *y*:

$$x' = 2Cy$$

Y reemplazando *C*:

$$x' = \frac{2xy}{y^2} = \frac{2x}{y}$$

Entonces: $yx' = 2x$

Ej. 5) Dada la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$*, hallar la solución que pasa por (0, 3).*

En general, para resolver una EDO, siempre trataremos en primer lugar de separar las variables, salvo que uno reconozca la forma a primera vista. En este caso nos indican que es de variables separables, por lo que:

$$y' = 4x - 2xy = 2x(2 - y)$$

Si asumimos que $y \neq 2$, entonces:

$$\frac{y'}{2 - y} = 2x$$

Acá hacemos un alto: cada uno de los miembros, lo integramos con respecto a *x*, por lo tanto, queda:

$$\int \frac{y'}{2 - y} dx = \int 2x \, dx$$

Del lado izquierdo, si reemplazamos la variable *y* por *f(x)*, la función que estamos buscando queda:

$$g(x) = \int \frac{f'(x)}{2 - f(x)} dx = -ln|2 - f(x)| + C_1$$

Ya que al derivar y aplicar regla de la cadena nos queda la expresión que está en la integral. Pero esto es: $-ln|2 - y| + C_1$ que es como si hubiéramos integrado con respecto a y. Por lo que a los fines prácticos hacemos:

$$\int \frac{y'}{2 - y} dx = \int \frac{dy/dx}{2 - y} dx = \int \frac{1}{2 - y} dy = -ln|2 - y| + C_1$$

Que es como si hubiéramos "simplificado los diferenciales con respecto a *x*" e integráramos con respecto a *y*. Si bien esto no es así, está aceptado para simplificar la búsqueda de la solución.

Volviendo al ejercicio, del lado derecho queda:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C_2$$

Como $C_2 - C_1$ es otra constante, directamente ponemos una sola:

$$-ln|2 - y| = x^2 + C$$

Por propiedades de logaritmo:

$$ln|2 - y|^{-1} = x^2 + C$$

$$\frac{1}{|2 - y|} = e^{x^2 + C} = e^{x^2} e^C = Ke^{x^2}$$

Haciendo que $e^C = K$

Hay que tener en cuenta que K es una constante positiva. Entonces:

$$|2 - y| = \frac{1}{Ke^{x^2}} = \frac{1}{K} e^{-x^2} = He^{-x^2}$$

Con $H = 1/K$

- Si $y < 2$, queda el valor absoluto de algo positivo: $2 - y = He^{-x^2}$, $y = 2 - He^{-x^2}$
- Si $y > 2$, queda el valor absoluto de algo negativo, cambiamos el signo: $-2 + y = He^{-x^2}$, $y = He^{-x^2} + 2$

Y, como nos piden la SP que pasa por (0, 3), al ser y = 3 nos queda:

$$3 = H.e^0 + 2 = H + 2$$

Entonces: H = 1, por lo tanto, la SP será:

$$y = e^{-x^2} + 2$$

Ej. 8) Halle la familia de curvas tales que, en cada punto…

c) La recta tangente en el punto tiene ordenada al origen igual al doble de la ordenada del punto.

Planteamos la ecuación de una recta tangente al gráfico de una función *f* genérica en un valor x_0.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ecuación vista en Análisis Matemático I. Esta recta cruzará al eje *y* cuando *x* valga 0. Por lo tanto, reemplazamos la *x* por el valor 0, y el valor correspondiente de la *y* debería darnos dos veces el valor de la función en el x_0.

Entonces:

$$f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(-x_0) = 2f(x_0)$$

Pero esto debe cumplirse para todo x_0, entonces reemplazamos x_0 por *x* y, llamando $y = f(x)$ nos queda:

$$y + y'(-x) = 2y$$

Que, luego de operar, queda:

$$y + xy' = 0$$

Al resolver esta EDO de variables separables queda:

$$xy' = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$ln|y| = -ln|x| + ln|C| = ln|C/x|$$

$$|y| = |C/x|$$

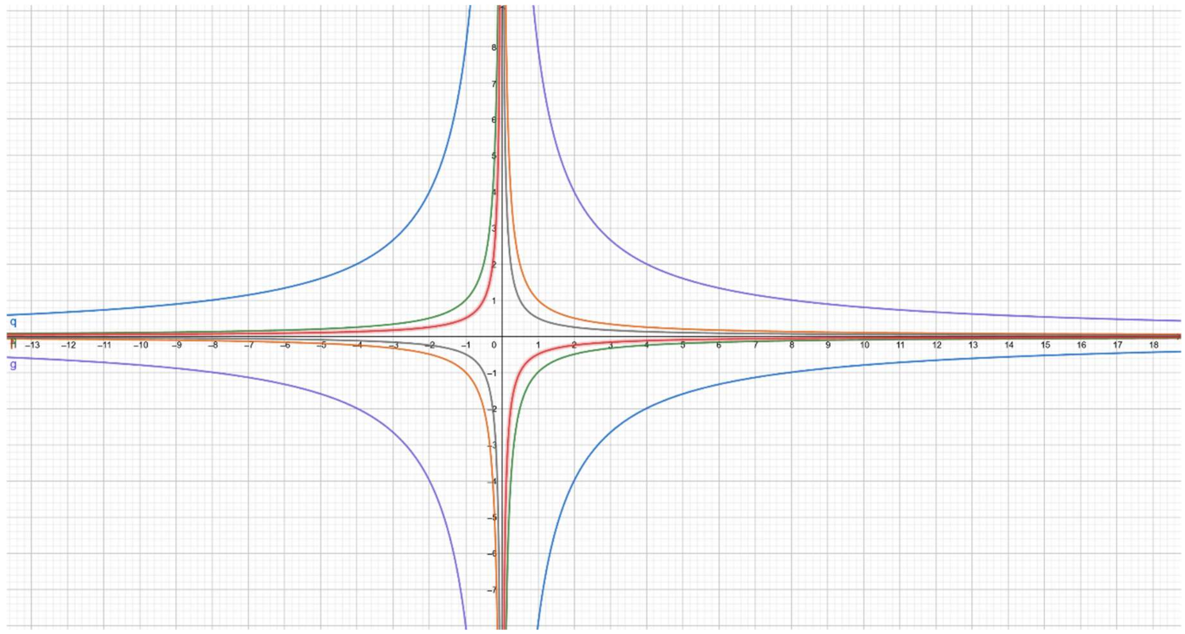
Como *C* es una constante positiva:

$$y = \pm C/x$$

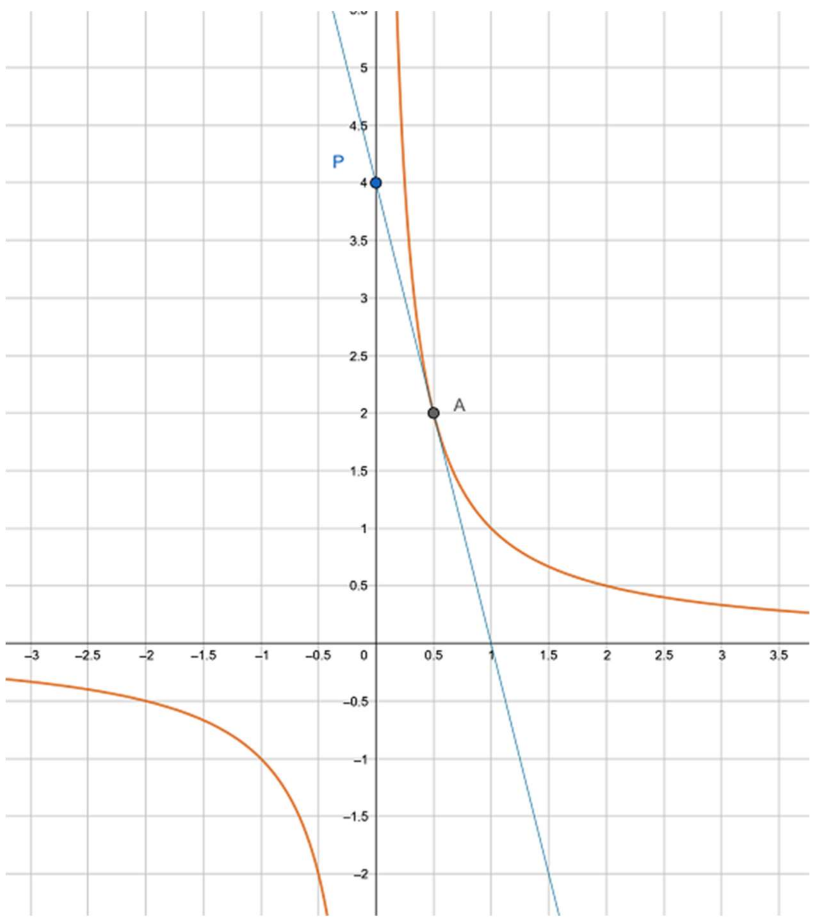
Y asumiendo que $K = \pm C \neq 0$, en un abuso de notación, queda:

$$y = K/x$$

Estas curvas son las que conocemos como gráficos de funciones homográficas, si K es positivo, estarán en el primer y tercer cuadrante, si K es negativo, en el segundo y cuarto.



Si elegimos una, por ejemplo K = 1, y hacemos la prueba en x = 1/2:

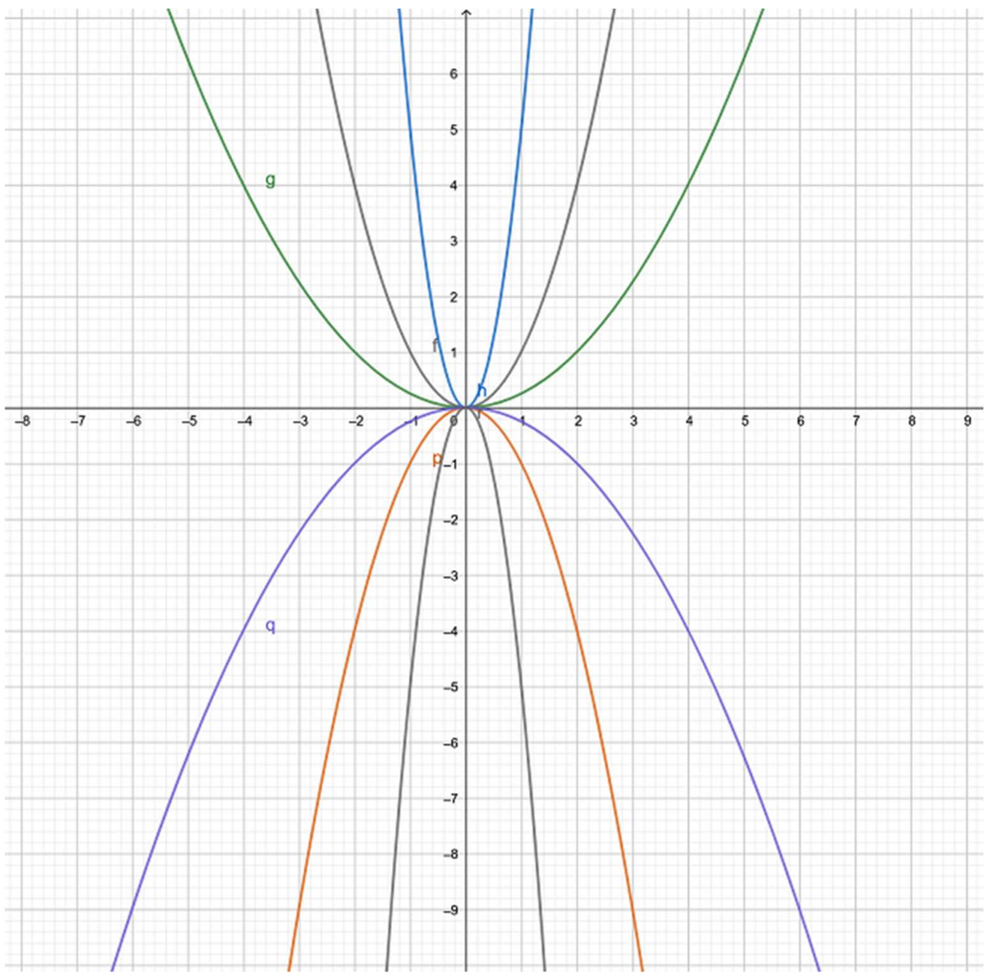


Vemos que su recta tangente en (1/2, 2) corta al eje y en (0, 4) donde 4 es el doble de 2. Esto sucede para cualquier punto que uno elija.

Ej 9) Halle en cada caso la familia de curvas ortogonales a la familia dada. Ilustre mediante un gráfico.

a) $y = Cx^2$

En primer lugar, graficamos la familia de curvas para darnos cuenta qué nos están pidiendo:



Nos piden que hallemos curvas que vayan cortando en forma perpendicular a estas parábolas, a todas, en cada punto. Para que corten en forma perpendicular, sus tangentes tienen que ser ortogonales. Por lo tanto, el producto de sus pendientes tiene que dar – 1: m1 * m2 = – 1. Entonces: $m_2 = -1/m_1$

Según el gráfico, podemos prever que esas curvas deberán tener formas elípticas para que corten a las parábolas ortogonalmente.

Si derivamos ambos miembros de la ecuación propuesta, vamos a tener las pendientes de las tangentes: $y' = 2Cx$, y al igual que vimos antes, debemos plantear la ecuación sin ninguna constante, un error común es dejarla.

Entonces, como $C = y/x^2$, asumiendo $x \neq 0$, entonces:

$$y' = \frac{2yx}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

Como buscamos una perpendicular, planteamos:

$$y_o' = -\frac{x}{2y}$$

Resolviendo esta EDO, queda:

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + K$$

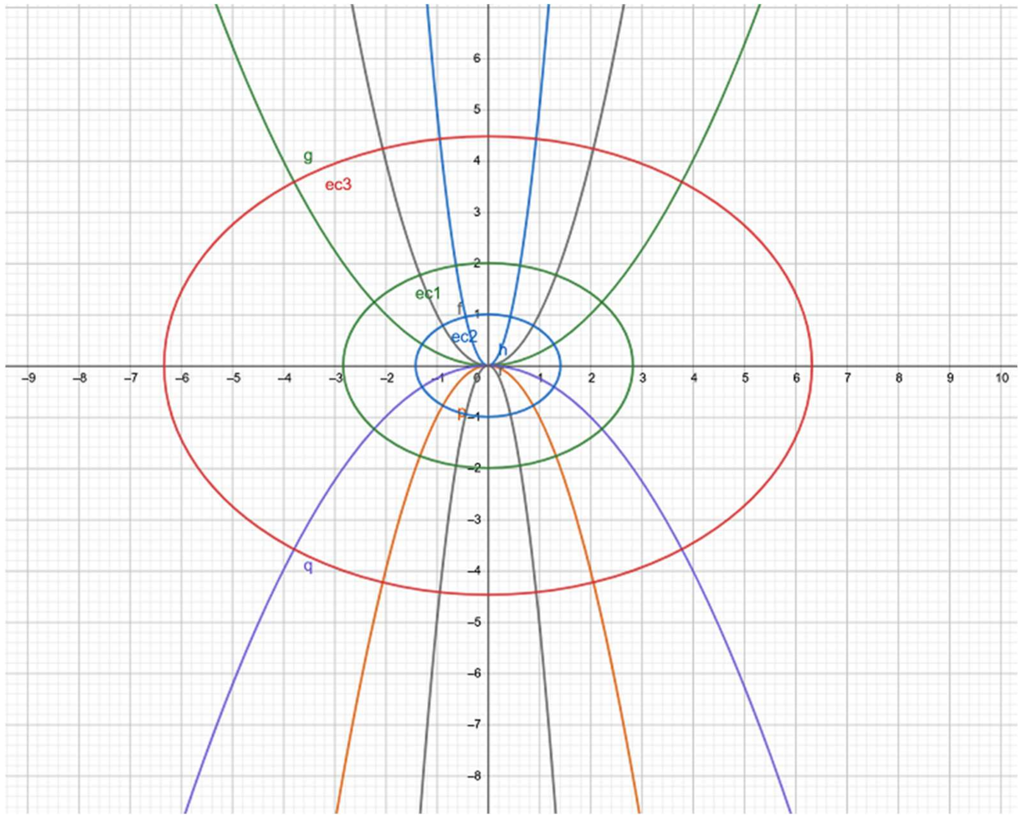
De donde:

$$y^2 + \frac{1}{2}x^2 = K$$

Como tenemos la suma de términos al cuadrado, K será mayor o igual a cero, por lo tanto planteamos $K = r^2$, así:

$$y^2 + \frac{1}{2}x^2 = r^2$$

Elipses (era lo que esperábamos), con semiejes $x_r = \sqrt{2}r$ y $y_r = r$. Mostramos el gráfico donde vemos que cortan en forma perpendicular a las parábolas.


g
ec3
ec1
f
ec2
h
p
q

Ejercicio de ecuaciones diferenciales lineales

Halle la solución particular de la siguiente ecuación diferencial lineal de 1º orden:
$\cos(x)\, y' + sen(x)y = 1$ con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Con la condición $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Resolución (1ra forma):

Llevemos esta ecuación a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Para que tenga la forma de una ecuación diferencial lineal.

Notemos que $\cos(x) \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces podemos dividir a ambos miembros de la ecuación original por $\cos(x)$; quedando:

$$y' + \frac{sen(x)}{\cos(x)}y = \frac{1}{\cos(x)} \qquad (1)$$

Donde $a(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$ y $b(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
Consideremos el llamado "factor integrante":

$$e^{\int a(x)dx} = e^{\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx} = e^{-ln|\cos(x)|+C}$$

Para resolver la integral hicimos la sustitución $t = \cos(x)$ con $dt = -sen(x)dx$
Si tomamos $C = 0$ y teniendo en cuenta que el $\cos(x)$ es positivo en el intervalo de estudio, queda:

$$e^{-ln|\cos(x)|+C} = e^{-\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Multiplicamos ambos miembros de (1) por este factor integrante:

$$\frac{y'}{\cos(x)} + \frac{sen(x)}{cos^2(x)}y = \frac{1}{cos^2(x)} \qquad (2)$$

Notemos que el lado izquierdo de (2) es la derivada de un producto, pues

$$\frac{y'}{\cos(x)}+\frac{sen(x)}{cos^2(x)}y=\left(\frac{1}{cos(x)}y\right)'$$

Entonces, reemplazando esto en (2) e integrando en ambos miembros:

$$\frac{y'}{\cos(x)}+\frac{sen(x)}{cos^2(x)}y=\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)'=\frac{1}{cos^2(x)}$$

$$\int\left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)'dx=\int\frac{1}{cos^2(x)}dx$$

$$\frac{1}{\cos(x)}y(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}+K$$

$$y(x)=sen(x)+Kcos(x),\quad K\in R,\qquad \forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Por último, usando la condición adicional, despejamos *K*:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+Kcos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+K\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

Por lo tanto, $K=-1$. De esta forma, la solución particular queda:

$$y(x)=sen(x)-\cos(x),\quad \forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

2º forma:

Otra manera de resolver esta EDO es realizar el siguiente cambio: $y(x)=u(x)v(x)$. Estamos pensando a la variable *y* que depende de *x* como el producto de dos funciones de *x*. Por lo tanto:

$$y'=u'v+uv'$$

Y sustituyendo en (1) queda:

$$u'v+uv'+\frac{sen(x)}{\cos(x)}uv=\frac{1}{\cos(x)}\qquad (3)$$

Sacando factor común *u*:

$$u'v+u\left[v'+\frac{sen(x)}{\cos(x)}v\right]=\frac{1}{\cos(x)}\qquad (4)$$

Elegimos que lo de adentro del corchete valga cero para poder anular el segundo término. Esto lo podemos hacer porque aún no hemos determinado ninguna de las dos funciones, por lo que tenemos la libertad de elegirla, con la restante debemos hacer los ajustes correspondientes para que la solución sea válida.

De esta forma:

$$v' + \frac{sen(x)}{\cos(x)} v = 0$$

Es una EDO de variables separables:

$$v' = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} v$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} v$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} dx$$
$$\int \frac{1}{v} dv = \int -\frac{sen(x)}{\cos(x)} dx$$
$$ln|v| = ln|\cos(x)| + C$$

Elegimos $C = 0$ y $v = \cos(x)$, entonces, volviendo a (4) queda:

$$u'v + u\left[v' + \frac{sen(x)}{\cos(x)} v\right] = \frac{1}{\cos(x)}$$

Pero el segundo término es nulo dado que forzamos para que lo sea:

$$u'v = \frac{1}{\cos(x)}$$

Y, como $v = \cos(x)$

$$u'\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Es otra EDO de variables separables:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$du = \frac{1}{cos^2(x)} dx$$
$$\int du = \int \frac{1}{cos^2(x)} dx$$

$$u = \frac{sen(x)}{\cos{(x)}} + K$$

Como hallamos *u* y *v*, el producto de ambos nos da *y*:

$$y(x) = u(x)v(x) = \left[\frac{sen(x)}{\cos{(x)}} + K\right]\cos(x) = sen(x) + Kcos(x)$$

Llegando al mismo resultado anterior.

Resolución problema 10, guía VI

Una *línea de campo* del campo $\vec{F}$ es una curva tal que en cada punto, el campo resulte tangente a la curva. Si la línea de campo está parametrizada con una parametrización regular $\vec{g}(t)$, $t \in (a,b)$, resulta que $\vec{g}'(t)$ es un vector tangente a la curva en cada punto. Luego, debe ser $\vec{g}'(t)$ paralelo al campo $\vec{F}$ en los puntos de la curva. Es decir, $\vec{g}'(t)$ paralelo a $\vec{F}(\vec{g}(t))$.

Veamos ahora el problema 10 de la guía VI. En cada inciso, se debe verificar que la curva definida por la parametrización dada es una línea de campo del campo dado.

a. La parametrización y el campo dados son: $\vec{g}(t) = (t^2, 2t-1, \sqrt{t})$, para $t > 0$ y $\vec{F}(x,y,z) = (y+1, 2, \frac{1}{2z})$

La dirección de la curva en cada punto es:

$$\vec{g}'(t) = (2t, 2, \frac{1}{2\sqrt{t}})$$

Por otro lado, $\vec{F}$ en los puntos de la curva es

$$\vec{F}(\vec{g}(t)) = (2t, 2, \frac{1}{2\sqrt{t}})$$

Claramente $\vec{g}'(t) = \vec{F}(\vec{g}(t))$ para todo $t > 0$, por lo tanto la parametrización $\vec{g}$ define una línea de campo de $\vec{F}$.

b. La parametrización y el campo dados son: $\vec{g}(t) = (t^{-3}, e^t, t^{-1})$ y $\vec{F}(x,y,z) = (-3z^4, y, -z^2)$

Un vector tangente a la curva en cada punto es

$$\vec{g}'(t) = (-3t^{-4}, e^t, -t^{-2})$$

y el campo en los puntos de la curva es

$$\vec{F}(\vec{g}(t)) = (-3(t^{-1})^4, e^t, -(t^{-1})^2) = (-3t^{-4}, e^t, -t^{-2}) = \vec{g}'(t)$$

Se comprueba así que $\vec{g}'(t)$ es paralelo a $\vec{F}(\vec{g}(t))$.

c. La parametrización y el campo dados en el último inciso son: $\vec{g}(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), e^t)$ y $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$.

La velocidad es

$$\vec{g}'(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t), e^t)$$

y el campo en los puntos de la curva es

$$\vec{F}(\vec{g}(t)) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t), e^t) = \vec{g}'(t)$$

Se comprueba así que $\vec{g}'(t)$ es paralelo a $\vec{F}(\vec{g}(t))$

Resolución problema 11, guía VI

En el problema 11 se pide hallar líneas de campo para campos dados.

En $\mathbb{R}^2$, el problema consiste en hallar una curva $\vec{g}(t) = (x(t), y(t))$, tal que $\vec{g}'(t) = (x'(t), y'(t))$ sea paralela al campo dado. Si el campo es $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, debe ser

$$(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) \parallel (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))$$

Esto pueden plantearse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Veamos ahora cómo se resuelven algunos incisos del problema 11.

a. El campo dado es $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$. Entonces, la ecuación diferencial que define las líneas de campo es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y}$$

Es una ecuación de variables separables:

$$-y\,dy = x\,dx$$

Que tiene como solución

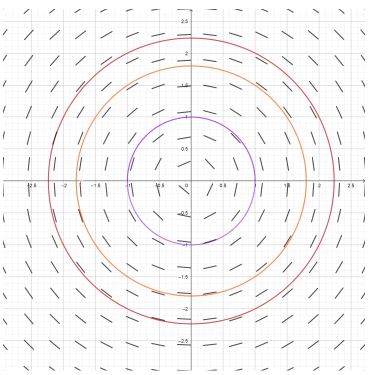
$$\frac{-y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

o equivalentemente

$$x^2 + y^2 = a$$

para cualquier constante $a > 0$.

Por lo tanto, las líneas de campo de $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ son circunferencias centradas en el origen. En la siguiente imagen se observa el campo de direcciones de $\vec{F}$ y algunas líneas de campo. Observe que en cada punto, la línea de campo tiene la misma dirección que el campo.



c. El campo dado en este inciso es $\vec{F}(x,y) = (\frac{1}{2x-y}, \frac{1}{x})$.

El dominio de este campo es el conjunto de puntos (x,y) tales que $2x - y \neq 0$ y $x \neq 0$. La ecuación diferencial que define las líneas de campo es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x}$$

O equivalentemente

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}$$

Es una ecuación diferencial de tipo homogénea. Haciendo la sustitución $y = ux$, resulta $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$.

Reemplazando en la ecuación:

$$x\frac{du}{dx} + u = 2 - u$$

Reordenando:

$$x\frac{du}{dx} = 2 - 2u$$

Asumiendo que $1 - u \neq 0$:

$$\frac{du}{1-u} = \frac{2}{x}$$

Integrando:

$$-\ln|1-u| = 2\ln|x| + c$$

Esto es equivalente a

$$(1-u)^{-1} = kx^2$$

Volviendo a las variables x, y:

$$(1 - \frac{y}{x})^{-1} = kx^2$$

Esta es una familia de líneas de campo del campo $\vec{F}$.

Cuando $u = 1$ tenemos $y = x$, que también es solución, ya que verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 1 = \frac{2x-x}{x} = \frac{2x-y}{x}$$

Obviamente, debemos considerar estas líneas de campo restringidas al dominio del campo.

En la siguiente figura se muestran las direcciones del campo y algunas líneas de campo.