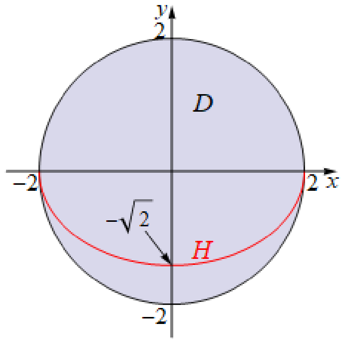
1. Dada $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** el mencionado dominio y el conjunto de puntos H para los cuales $f'_y(x,y)=1$.

Los puntos (x,y) que pertenecen a D son aquellos para los cuales $4-x^2-y^2 \geq 0$, por ello:

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\Re^2 \;/\; x^2+y^2\leq 4\}}$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.



Dado que $f'_y(x,y)=\dfrac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}$, al imponer $f'_y(x,y)=1$

resulta: $y=-\sqrt{4-x^2-y^2}\;\;\forall (x,y)\in D$.

debe decir $y<0$

De $y=-\sqrt{4-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; x^2+2y^2=4$ (elipse), sólo los puntos de $\boxed{y\leq 0}$.

$\boxed{H=\{(x,y)\in D\subset\Re^2 \;/\; x^2+2y^2=4 \wedge \boxed{y\leq 0}\}\text{, en el gráfico se representa en color rojo}}$.

---

2. Siendo C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son

$$\Sigma_1 : 3xy+\ln(x+yz-6)-2z=0 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 : z=x^2y+e^{xy-2},$$

analice si el plano normal a C en $A=(1,2,z_0)$ tiene algún punto en común con el eje x.

Expresando ambas superficies en forma implícita resulta $C=\begin{cases}\overbrace{3xy+\ln(x+yz-6)-2z}^{F(x,y,z)}=0\\ \underbrace{x^2y+e^{xy-2}-z}_{G(x,y,z)}=0\end{cases}$, cumpliéndose que, con $z_0=3$ obtenido de la ecuación de Σ_2 para $(x_0,y_0)=(1,2)$:

- $F(A)=0$ y $G(A)=0$.
- $\nabla F(x,y,z)=(3y+\frac{1}{x+yz-6}\,,\,3x+\frac{z}{x+yz-6}\,,\,\frac{y}{x+yz-6}-2)$
  $\nabla G(x,y,z)=(2xy+ye^{xy-2}\,,\,x^2+xe^{xy-2}\,,\,-1)$, ambos continuos en entorno de A.
- $\vec{d}_0=\nabla F(A)\times\nabla G(A)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 7 & 6 & 0\\ 6 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-6,7,-22)\neq\vec{0}$.

Con lo cual queda definida la curva como intersección de ambas superficies en un entorno de A y el vector $\vec{d}_0$ es tangente a C y perpendicular a su plano normal en A.

Una ecuación cartesiana para el plano normal es $((x,y,z)-(1,2,3))\cdot\vec{d}_0=0$. Operando resulta:

$$-6x+7y-22z=-58.$$

Por último, dado que los puntos del eje x son del tipo $(k,0,0)$, el plano tendrá un punto en común con dicho eje si su ecuación se satisface para $(k,0,0)$. Es decir, $-6k+0-0=-58 \;\Rightarrow\; k=29/3$.

<u>Respuesta</u>: $\boxed{\text{El plano normal a } C \text{ en } A=(1,2,3) \text{ tiene al punto } (29/3,0,0) \text{ en común con el eje } x}$.

<u>Nota</u>: La mencionada continuidad de ∇F y ∇G se cumple pues ambos tienen componentes que son suma de funciones continuas (polinomio, cociente de polinomios con denominador no nulo, composición de polinomio con exponencial).

3. Siendo $f(x,y)=\dfrac{x\,\mathrm{sen}(x\,y)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$, **verifique** que f admite derivada direccional en $(0,0)$ en toda dirección e **indique** si <u>en base a lo obtenido</u> se puede opinar con fundamento acerca de la diferenciabilidad de f en el origen de coordenadas.

Tomando como versor genérico $\breve{r}=(u,v)$ con $u^2+v^2=1$, analizamos la existencia del límite mediante el cual se define la derivada direccional en el origen. Es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\breve{r})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(hu,hv)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{hu\,\mathrm{sen}(h^2uv)}{h^2(u^2+v^2)}}{h}\overset{u^2+v^2=1}{=}\lim_{h\to 0}\frac{u\,\mathrm{sen}(h^2uv)}{h^2}=$$

$$\begin{cases} =\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}0=0 \text{ si } uv=0\ (u=0\vee v=0)\\ \overset{L'H}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u\cos(h^2uv)\,2huv}{2h}=u^2v \text{ si } uv\neq 0\end{cases}$$

Como el límite existe y es finito para todo $\breve{r}=(u,v)$, <u>la función admite derivada direccional en el origen en toda dirección</u>. Dado que la expresión u^2v contempla el resultado para $uv=0$, se puede expresar $\boxed{f'((0,0),\breve{r})=u^2v\ \ \forall\breve{r}=(u,v)\in\Re^2}$.

En base a lo obtenido <u>se puede afirmar que f no es diferenciable en el origen de coordenadas</u>, pues si lo fuera debería cumplirse que $f'((0,0),\breve{r})=\nabla f(0,0)\cdot\breve{r}=f'_x(0,0)u+f'_y(0,0)v\ \ \forall\breve{r}=(u,v)\in\Re^2$ que no coincide con el resultado $f'((0,0),\breve{r})=u^2v\ \ \forall\breve{r}=(u,v)\in\Re^2$ obtenido por definición.

<u>Nota</u>: En este caso particular resultan $f'_x(0,0)=f'((0,0),(1,0))=1^2\,0=0$, $f'_y(0,0)=f'((0,0),(0,1))=0^2\,1=0$.

---

4. Dada $f:D\subset\Re^2\to\Re\ /\ f(x,y)=x\,y-y+y\ln(x)+3$, **calcule** aproximadamente $f(0.95,0.02)$ con Taylor de 2º orden y **analice** si el polinomio correspondiente produce un extremo local en $(1,0)$.

Con $X=(x,y)$ y $A=(1,0)$, $f(X)\cong f(A)+df(A,X-A)+\frac{1}{2}d^2f(A,X-A)$ para $X\in E(A)$ donde, aplicando el operador correspondiente, $d^if(A,X-A)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial}{\partial y}(y-0)\right]^{(i)}_{f(A)}$ con $i=1,2$.

Desarrollando resulta:

$$f(x,y)\cong f(A)+f'_x(A)(x-1)+f'_y(A)\,y+\tfrac{1}{2}[f''_{xx}(A)(x-1)^2+2f''_{xy}(A)(x-1)\,y+f''_{yy}(A)\,y^2]$$

$$f(A)=3,\ f'_x(A)=[y+y/x]_A=0,\ f'_y(A)=[x-1+\ln(x)]_A=0,$$

$$f''_{xx}(A)=[-y/x^2]_A=0,\ f''_{xy}(A)=[1+1/x]_A=2,\ f''_{yy}(A)=[0]_A=0.$$

De donde $f(x,y)\cong 3+\frac{1}{2}[2\,2(x-1)\,y]=\underbrace{3+2(x-1)\,y}_{p(x,y)}$, con lo cual:

$$f(0.95,0.02)\cong 3+2(0.95-1)\,0.02\ \Rightarrow\ \boxed{f(0.95,0.02)\cong 2.998}.$$

Como $p(x,y)$ coincide con el valor de la función y el de sus sucesivas derivadas hasta el 2º orden en el punto A, dicho punto es crítico pues $p'_x(A)=p'_y(A)=0$.

Por su parte, $H(A)=\begin{vmatrix}p''_{xx}(A) & p''_{xy}(A)\\ p''_{yx}(A) & p''_{yy}(A)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$, por lo tanto $\boxed{p(A)=3\text{ no es extremo local}}$.

5. Sea la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = \vec{h}(u,v)$ con $(u,v) \in \Re^2$ y $\vec{h}(u,v) = \vec{f}(\vec{g}(u,v))$, donde la matriz jacobiana de $\vec{f}$ es $D\vec{f}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \beta & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{g}(u,v) = (uv,\, u^2)$.

Analice si la recta normal a Σ en $\vec{h}(1,2) = (2,\,3,\,5)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $x + y = 13$.

Dado que $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$, composición de dos funciones C^1 ($\vec{g}$ con componentes polinómicas y $D\vec{f}$ con elementos continuos), aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$D\vec{h}(1,2) = D\vec{f}(\vec{g}(1,2))\, D\vec{g}(1,2) = D\vec{f}(2,1)\, D\vec{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 0 \end{pmatrix}_{(1,2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

De donde $\vec{h}'_u(1,2) = (10,6,4)$ y $\vec{h}'_v(1,2) = (1,1,2)$, con lo cual un vector normal a Σ en $\vec{h}(1,2)$ es:

$$\vec{n}_0 = \vec{h}_u(1,2) \times \vec{h}_v(1,2) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 10 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8,\, -16,\, 4)$$

Entonces una ecuación para la recta normal a la superficie en $\vec{h}(1,2) = (2,\,3,\,5)$ es:

$$\vec{X} = (2,3,5) + \lambda (8, -16, 4)$$

$$(x,y,z) = (2+8\lambda,\; 3-16\lambda,\; 5+4\lambda) \quad \text{con } \lambda \in \Re.$$

Esta recta interseca al plano de ecuación $x + y = 13$ si existe un valor de λ tal que:

$$2 + 8\lambda + 3 - 16\lambda = 13 \Rightarrow -8\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -1$$

Entonces, reemplazando $\lambda = -1$ en la ecuación de la recta se obtiene el punto $(-6,19,1)$.

<u>Respuesta</u>: La recta normal a Σ en $\vec{h}(1,2)$ interseca en el punto $(-6,19,1)$ al plano mencionado.