En cada evaluación se solicita que todas las respuestas estén **debidamente justificadas**.
No se aceptan cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0,0)$.

2. Sea C una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $x^2\, z - y^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de C sobre el plano xy tiene ecuación $y = x^2$, **analice** si la recta tangente a C en $(2, 4, z_0)$ interseca en algún punto al eje z.

3. Siendo $h(x,y) = f(x - y^2\,,\, 2\,x + y)$ **calcule** aproximadamente $h(1.02, 0.99)$, usando aproximación lineal, sabiendo que $w = f(u,v)$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $w\,u + \ln(w + v - u) = 0$ en un entorno de $(u_0, v_0) = (0,3)$.

4. Dada $f(x,y) = x\,(x^2 + y^2 - 2\,x)$ definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 2\,\}$, **determine** en qué puntos de D se producen el máximo y el mínimo absolutos de $f(x,y)$ y **calcule** los valores de dichos extremos.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen}(x\,y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0,0)$.

6. Sea C una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $y^2\, z - x^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de C sobre el plano xy tiene ecuación $x = y^2$, **analice** si la recta tangente a C en $(4, 2, z_0)$ interseca en algún punto al eje z.

7. Siendo $h(x,y) = f(x + 2\,y\,,\, x^2 - y)$ **calcule** aproximadamente $h(0.98, 1.01)$, usando aproximación lineal, sabiendo que $w = f(u,v)$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $w\,v + \ln(w + u - v) = 0$ en un entorno de $(u_0, v_0) = (3,0)$.

8. Dada $f(x,y) = y\,(x^2+y^2-2\,y)$ definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 2\,\}$, **determine** en qué puntos de D se producen el máximo y el mínimo absolutos de $f(x,y)$ y **calcule** los valores de dichos extremos.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$. **Analice** si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x en todo punto de su dominio.

10. Dada la curva C definida como intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:
$$\Sigma_1 : \quad z = x^2 + y + 1 \text{ con } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Sigma_2 : \quad \vec{X} = (u\,,u^2\,,v) \text{ con } (u,v) \in \mathbb{R}^2$$
analice si la recta tangente a C en $(2, y_0, z_0)$ tiene algún punto en común con el plano xz.

11. Sabiendo que $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ admite la aproximación lineal $h(x,y) \cong 3\,x + 2\,y - 1$ en un entorno de $(1,2)$ y que $\vec{g}(x,y) = (x^2 - y\,,\,2\,x\,y\,)$, con $f \in C^1$, **calcule** la máxima derivada direccional de f en el punto $(-1,4)$ e **indique** en qué dirección se produce dicha derivada.

12. Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y) = (\sqrt{y}\,,\,\sqrt{1-y-x^2}\,)$, donde D es su dominio natural. **Determine** en qué puntos de D la norma de $\vec{f}$ produce sus valores máximo y mínimo absolutos y **calcule** los valores de dichos extremos. *Sugerencia*: comience graficando el dominio D.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+2\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Analice si f es continua en $(0,0)$, en base a su conclusión **opine** con fundamento si la función puede tener derivadas parciales continuas en un entorno de dicho punto.

14. Dada $h(x,y) = f(x^2-y)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que la curva de ecuación $v = f(u)$ admite recta tangente $u + 2\,v = 5$ en el punto $(1, v_0)$, **calcule** una aproximación lineal para $h(0.9, 0.2)$.

15. **Halle** el punto medio del segmento $\overline{AB}$, sabiendo que sus puntos extremos (A y B) son aquellos donde la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2\,,\,2\,t\,,\,t^4+4\,t)$ con $t \in \mathbb{R}$ interseca a la superficie de ecuación $\vec{X} = (u+v\,,\,u-v\,,\,4\,u\,v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

16. Sea $h(x,y) = x\,f(x,y) + 2\,y^2 - 4\,y$, sabiendo que $p(x,y) = x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y - y - 1$ permite aproximar los valores de f en un entorno de $(0,1)$ por Taylor de 2^0 orden, **analice** si $h(0,1)$ es extremo local; en caso afirmativo **clasifíquelo** y **calcule** su valor.

17. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{2\,x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analice si f es continua en $(0,0)$, en base a su conclusión **opine** con fundamento si la función puede tener derivadas parciales continuas en un entorno de dicho punto.

18. Dada $h(x,y)=f(y^2-x)$ con $f\in C^1(\mathbb{R})$ tal que la curva de ecuación $v=f(u)$ admite recta tangente $2\,u+v=5$ en el punto $(2,v_0)$, **calcule** una aproximación lineal para $h(2.1,1.98)$.

19. **Halle** el punto medio del segmento $\overline{AB}$, sabiendo que sus puntos extremos (A y B) son aquellos donde la curva de ecuación $\vec{X}=(\,t^2\,,\,t^4{+}4\,t\,,2\,t)$ con $t\in\mathbb{R}$ interseca a la superficie de ecuación $\vec{X}=(u+v\,,\,4\,u\,v\,,\,u-v)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

20. Sea $h(x,y)=y\,f(x,y)+2\,x^2-4\,x$, sabiendo que $p(x,y)=2\,x^2+y^2+2\,x\,y-x-1$ permite aproximar los valores de f en un entorno de $(1,0)$ por Taylor de 2^0 orden, **analice** si $h(1,0)$ es extremo local; en caso afirmativo **clasifíquelo** y **calcule** su valor.

21. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2\,x\,y}{3\,x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analice la continuidad de f en los distintos puntos de $\mathbb{R}^2$.

22. Dada $y=f(x,z)$ definida implícitamente por $x\,y+x\,z+\ln(1+y\,z)-4=0$ en un entorno de $(x_0,z_0)=(2,0)$, **calcule** aproximadamente $f(1.98,0.03)$ mediante Taylor de 1^0 orden.

23. **Halle** los extremos absolutos de $f(x,y,z)=z^2-(x-2)\,(y-2)+5$ evaluada en puntos del segmento $\overline{AB}$ con $A=(2,2,1)$ y $B=(6,8,3)$, **indique** los valores de dichos extremos y en qué puntos del segmento se producen.

24. Sea $C\subset\mathbb{R}^3$ la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $z=x\,y+4$ con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Sabiendo que una ecuación vectorial para C es $\vec{X}=(t-1\,,\,t+1\,,\,g(t))$ con $t\in\mathbb{R}$, **halle** una ecuación para el plano normal a C en $(2,y_0,z_0)$.

25. Sabiendo que la recta normal a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ en el punto $(5,y_0,z_0)$ admite la ecuación $\vec{X}=(1{+}2\,u\,,\,3\,u\,,\,u{+}4)$ con $u\in\mathbb{R}$, **calcule** una aproximación lineal para $f(4.98,6.01)$.

26. Sean la ecuación $v\,e^{u\,w} + 2\,v\,w = 9$ que define implícitamente a $w = f(u,v)$ en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0,3)$ y $h(x,y) = f(2\,x+y\,,\,x-y)$. Demuestre que el plano tangente a la gráfica de h en el punto $(1,-2,h(1,-2))$ es paralelo a uno de los ejes coordenados.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sabiendo que $\vec{X} = (u\,,\,v^2\,,\,v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es una ecuación de la superficie de nivel 1 de f, que para $A = (2,1,1)$ resulta $f(A) = 1$ y que la derivada direccional $f'(A\,,\,\breve{r}) = 3$ para $\breve{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, **calcule** el valor de la mínima derivada direccional de f en el punto A.

28. **Halle** los extremos absolutos de $f(x,y,z) = (x+z-1)^2$ evaluada en los puntos de la curva de ecuación $\vec{X} = (t\,,\,\mathrm{sen}(t)\,,\,\frac{2}{\pi}\,t+1)$ que se encuentran entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = 2$. **Indique** los valores de los extremos solicitados y en qué puntos de $\mathbb{R}^3$ se producen.

29. Sabiendo que la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, 5, z_0)$ admite la ecuación $\vec{X} = (3\,u\,,\,1+2\,u\,,\,u+1)$ con $u \in \mathbb{R}$, **calcule** una aproximación lineal para $f(6.01, 4.98)$.

30. Sean la ecuación $u\,e^{v\,w} + 2\,u\,w = 9$ que define implícitamente a $w = f(u,v)$ en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3,0)$ y $h(x,y) = f(x+y\,,\,2\,x-y)$. Demuestre que el plano tangente a la gráfica de h en el punto $(1,2,h(1,2))$ es paralelo a uno de los ejes coordenados.

31. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sabiendo que $\vec{X} = (v\,,\,u^2\,,\,u)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es una ecuación de la superficie de nivel 1 de f, que para $A = (2,1,1)$ resulta $f(A) = 1$ y que la derivada direccional $f'(A\,,\,\breve{r}) = 2$ para $\breve{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, **calcule** el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto A.

32. **Halle** los extremos absolutos de $f(x,y,z) = (y+z-1)^2$ evaluada en los puntos de la curva de ecuación $\vec{X} = (\mathrm{sen}(t)\,,\,t\,,\,\frac{2}{\pi}\,t+1)$ que se encuentran entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = 2$. **Indique** los valores de los extremos solicitados y en qué puntos de $\mathbb{R}^3$ se producen.