FIUBA Análisis Matemático II- Primer Parcial 22-10-2022

Un resolución explicada[1]

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea

$$\vec{f}(x,y) = (\sqrt{8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4}, \ln(y - x - 1))$$

y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

Solución:

El dominio natural D de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios naturales de sus componentes $f_1(x,y) = \sqrt{8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4}$ y $f_2(x,y) = \ln(y - x - 1)$.

Si D_1 es el dominio natural de f_1, entonces

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0\right\}.$$

Como

$$8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^2 - 8x + y^2 - 4y + 4 \leq 0,$$

$$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x-1)^2 - 4 \quad \wedge \quad y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2,$$

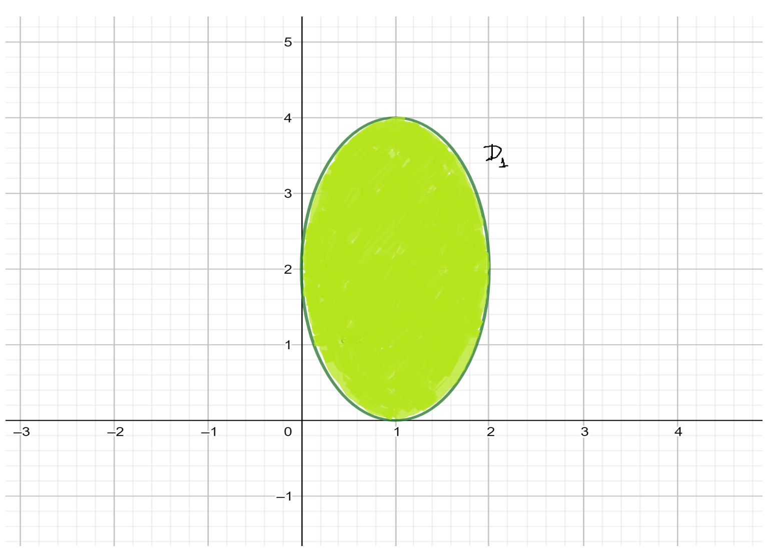
tenemos que

$$8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow 4(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1.$$

Por lo tanto

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1\right\},$$

cuyo gráfico es la siguiente elipse junto con su interior.

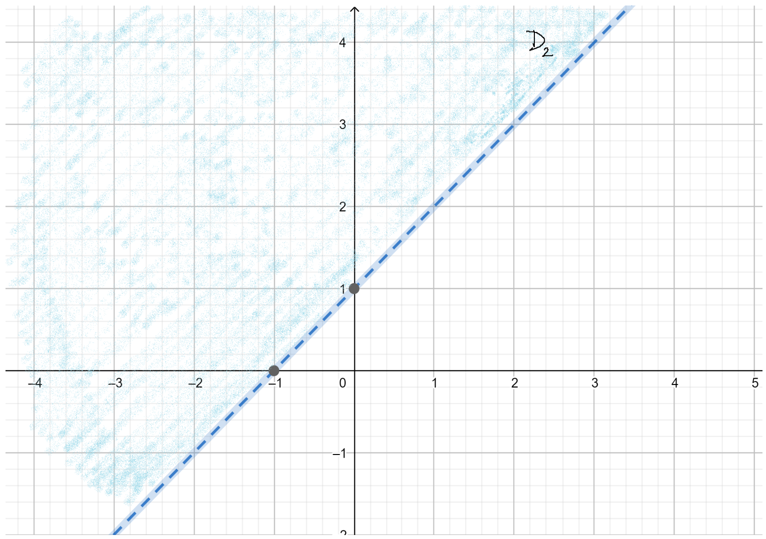


[1]Por J.L. Mancilla Aguilar, con la colaboración en la revisión de Silvia Gigola, Martín Maulhardt y Silvia Seminara

Por otro lado, el dominio natural D_2 de f_2 es el conjunto

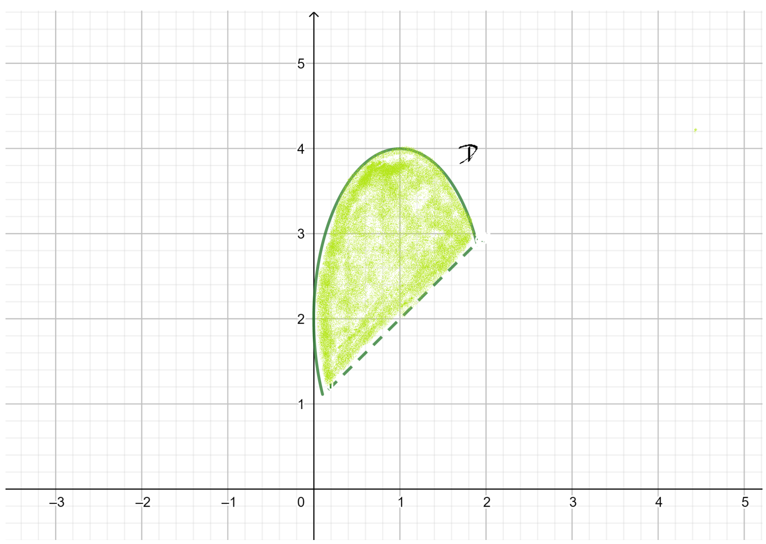
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y - x - 1 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x + 1\},$$

que es un semiplano sin su borde cuyo gráfico es

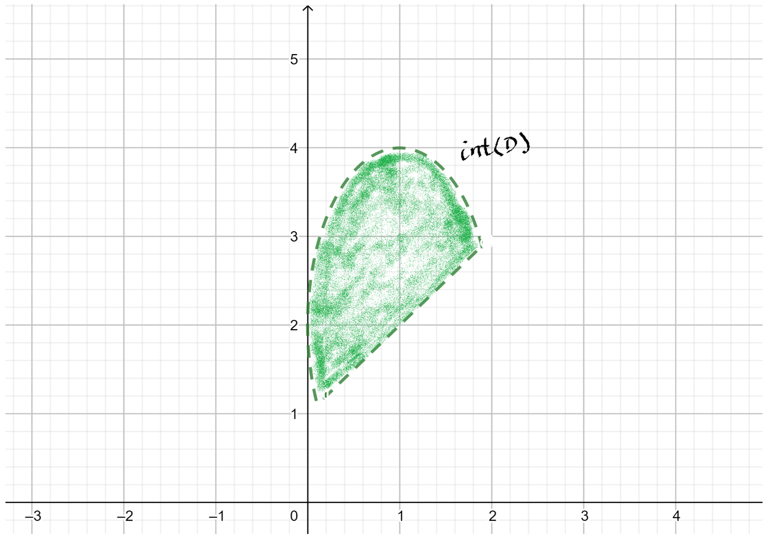


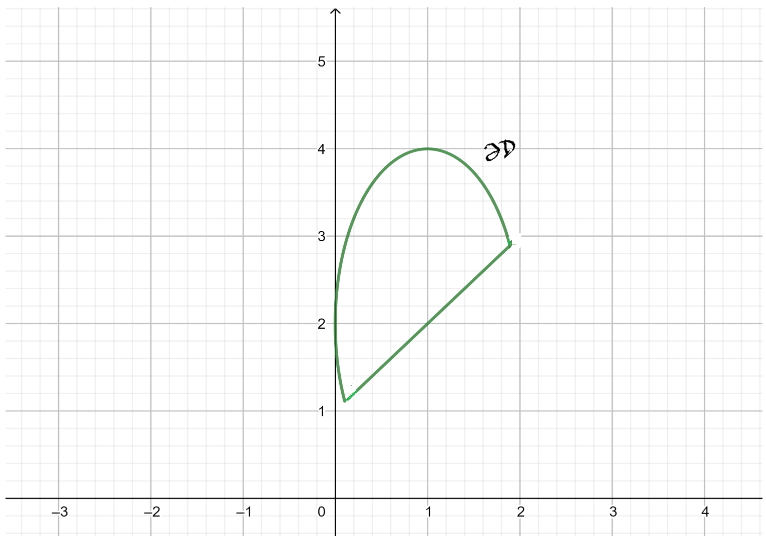
Entonces el dominio natural de $\vec{f}$ es

$$D = D_1 \cap D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \ \wedge \ y > x + 1\right\}$$



y el interior $\text{int}(D)$ y la frontera ∂D son





El conjunto D es acotado, pero no cerrado pues no contiene parte de su frontera. Entonces D no es compacto. Finalmente, el interior de D está descripto por las inecuaciones:

$$\text{int}(D): \quad (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} < 1 \ \wedge \ y > x+1.$$

- **Ejercicio 2.** Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + \frac{y^3}{3}.$$

Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

Solución:

Como la función f es un polinomio, ésta tiene derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas. En particular f es diferenciable en cada punto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, con lo cual el gráfico de f admite plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, siendo

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

una ecuación para ese plano.

Como el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ resulta paralelo al plano xy si y solo si admite la ecuación $z = f(x_0, y_0)$, tenemos que los puntos (x_0, y_0) buscados deben cumplir las condiciones $f'_x(x_0, y_0) = 0$ y $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Teniendo en cuenta que $f'_x(x, y) = x + y$ y que $f'_y(x, y) = x + 2y + y^2$, tenemos que

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = 0 \ \vee \ y = -1 \end{cases}$$

Luego los puntos pedidos son:

$$\boxed{P_1 = (0, 0)} \quad \wedge \quad \boxed{P_2 = (1, -1)}.$$

Tanto P_1 como P_2 son puntos críticos de f pues en ellos el gradiente de la función es nulo. Para determinar si se produce o no un extremo relativo en esos puntos utilizamos el criterio de las segundas derivadas, el cual es aplicable en este caso porque f es de clases $\mathcal{C}^2$.

Teniendo en cuenta que $f''_{xx}(x, y) = 1$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1$ y $f''_{yy}(x, y) = 2 + 2y$ resulta que

$$f''_{xx}(P_1) = 1 > 0 \quad \wedge \quad \Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_1) & f''_{xy}(P_1) \\ f''_{yx}(P_1) & f''_{y}(P_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

con lo cual se produce un mínimo relativo en P_1 cuyo valor es $f(P_1) = 0$.

Respecto de P_2,

$$f''_{xx}(P_2) = 1 > 0 \quad \wedge \quad \Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_2) & f''_{xy}(P_2) \\ f''_{yx}(P_2) & f''_{y}(P_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

y por lo tanto no se produce extremo relativo en ese punto.

- **Ejercicio 3.** Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial

$$\vec{X} = (u + v, v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x, y, z) = x^2 + 4y + z^2$ en el punto $(x_0, 1, 1)$, con $x_0 < 0$. Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.
Solución:

Como el punto $A = (x_0, 1, 1)$ debe pertenecer a la superficie de nivel 6 de f, $f(x_0, 1, 1) = x_0^2 + 5 = 6$. Luego $x_0^2 = 1$ y por lo tanto $x_0 = 1$ o $x_0 = -1$. Dado que $x_0 < 0$, resulta entonces que $x_0 = -1$ y $A = (-1, 1, 1)$.

La función f es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$\nabla f(A) = (2x, 4, 2z)|_A = (-2, 4, 2) \neq \vec{0}.$$

Por lo tanto la superficie de nivel 6 de f admite plano tangente en A y $\nabla f(A)$ es un vector normal a éste. En consecuencia, si r_0 es la recta normal a dicha superficie de nivel en A, $\vec{v} = (-2, 4, 2)$ es un vector director para ella.

Por otro lado, para que el plano tangente a Σ en un punto $P \in \Sigma$ sea ortogonal a r_0 es necesario y suficiente que un vector director cualquiera de r_0 sea normal a dicho plano. Por ende el vector $\vec{v}$ debe ser normal al plano tangente a Σ en P.

Como $\vec{\phi}(u, v) = (u + v, v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, es una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ de Σ y el vector

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u, v) = (-v, v - u, 1) \neq \vec{0},$$

$\vec{n}$ es normal al plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{\phi}(u, v)$.

En los puntos P que estamos buscando debe ocurrir que $\vec{n} \parallel \vec{v}$, ya que ambos vectores son normales a un mismo plano. Entonces debe existir un escalar $\alpha \neq 0$ tal que

$$(-v, v - u, 1) = \alpha(-2, 4, 2).$$

Igualando componente a componente y resolviendo las ecuaciones resultan $\alpha = 1/2$, $u = -1$ y $v = 1$. Entonces $\boxed{P = \vec{\phi}(-1, 1) = (0, 1, -1)}$ es el único punto de Σ donde se cumple lo pedido.

Una ecuación cartesiana para el plano tangente a Σ en el punto P hallado viene dada por la fórmula

$$\vec{v} \cdot (X - P) = 0$$

ya que $\vec{v}$ es un vector normal a ese plano. Entonces, como $(-2, 4, 2) \cdot (x, y - 1, z + 1) = 0$ es equivalente a $-2x + 4y - 4 + 2z + 2 = 0$, una posible ecuación cartesiana resulta ser

$$\boxed{-2x + 4y + 2z = 2}$$

- **Ejercicio 4.** Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$ la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple $h(0, -1) = z_0$.

  Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(0.1, -1.05)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(0, -1)$.

  Solución:

  Definimos $F(x, y, z) = e^x z + yz^2 + z^3 - 1$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$. Dado que queremos justificar que la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$, que es equivalente a la ecuación $F(x, y, z) = 0$, define una función $z = h(x,y)$ tal que $h(x_0,y_0) = z_0$ para cierto z_0, ese valor z_0 debe cumplir la condición $F(x_0,y_0,z_0) = e^{x_0}z_0 + y_0 z_0^2 + z_0^3 - 1 = 0$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $(x_0,y_0) = (0,-1)$, z_0 debe satisfacer la ecuación

$$z_0 - z_0^2 + z_0^3 - 1 = 0. \tag{1}$$

Como

$$z_0 - z_0^2 + z_0^3 - 1 = z_0 - 1 + z_0^3 - z_0^2 = (z_0 - 1) + z_0^2(z_0 - 1) = (z_0 - 1)(z_0^2 + 1),$$

la ecuación (1) tiene una única solución que es $\boxed{z_0 = 1}$.

Tenemos entonces que:

1. F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$;
2. $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;
3. $F'_z(x_0,y_0,z_0) = e^{x_0} + 2y_0z_0 + 3z_0^2 = 2$, con lo cual $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Por lo tanto, en el punto $(x_0,y_0,z_0) = (0,-1,1)$ se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita y podemos garantizar entonces que la ecuación dada define en forma implícita una función $z = h(x,y)$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno V del punto $(0,-1)$ y que cumple $h(0,-1) = 1$.

Como h es diferenciable en $(0,-1)$, pues las derivadas parciales son continuas allí, admite un aproximación lineal en es punto. Para calcular esa aproximación tenemos primero que hallar las derivadas parciales de h en $(0,-1)$, para ello usamos las fórmulas

$$h'_x(0,-1) = -\frac{F'_x(0,-1,1)}{F'_z(0,-1,1)} = -\frac{e^x z|_{(0,-1,1)}}{2} = -\frac{1}{2}$$

y

$$h'_y(0,-1) = -\frac{F'_y(0,-1,1)}{F'_z(0,-1,1)} = -\frac{z^2|_{(0,-1,1)}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

La aproximación lineal de h alrededor del punto $(0,-1)$ es entonces

$$L(x,y) = h(0,-1) + h'_x(0,-1)x + h'_y(0,-1)(y+1) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y+1}{2},$$

y por lo tanto $\boxed{h(0.1,-1.05) \approx L(0.1,-1.05) = 0.975}$.

Finalmente, como h es diferenciable en $(0,-1)$ todas las derivadas direccionales de h existen en ese punto y alcanzan su valor máximo en el versor $\boxed{\check{v} = \nabla h(0,-1)/\|\nabla h(0,-1)\| = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$.

- **Ejercicio 5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^3)-y^3}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0,0),\check{v}) = 0$.

Solución:

Sea $\check{v} = (a,b)$ un versor, es decir, $a^2 + b^2 = 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} f'((0,0),\check{v}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\check{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^3a^3) - t^3b^3}{t^3(a^2+2b^2)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{a^2+2b^2} \left[\frac{\operatorname{sen}(t^3a^3)}{t^3} - b^3 \right] \\ &= \frac{a^3 - b^3}{a^2+2b^2}, \end{aligned}$$

pues

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^3a^3)}{t^3} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a^3u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{a^3\cos(a^3u)}{1} = a^3,$$

donde en la primera igualdad se empleó el cambio de variable $u = t^3$ y en la segunda se aplicó la regla de L'Hopital. Hemos entonces probado la existencia de las derivadas direccionales en el origen.

Respecto de las derivadas parciales de f en $(0,0)$, tenemos que

$$\boxed{f'_x(0,0) = f'((0,0),(1,0)) = 1 \quad \wedge \quad f'_y(0,0) = f'((0,0),(0,1)) = -\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, si $\check{v} = (a,b)$

$$f'((0,0),\check{v}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a^3-b^3}{a^2+2b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^3 - b^3 = 0.$$

Entonces $a^3 = b^3$ y por lo tanto $a = b$. Como $\check{v}$ es un versor, $a^2 + b^2 = 2a^2 = 1$, con lo cual $a = 1/\sqrt{2}$ o $a = -1/\sqrt{2}$. En conclusión, hay dos versores para los cuales se anula la derivada direccional y estos son

$$\boxed{\check{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad \wedge \quad \check{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}.$$

Si bien la pregunta sobre si f es o no diferenciable en $(0,0)$ no es parte del enunciado del problema, es interesante notar que estamos en condiciones de dar una respuesta a la misma. Si f fuese diferenciable en el origen, entonces $\nabla f(0,0) = (1,-1/2)$ y $f'((0,0),\check{v}) = \nabla f(0,0)\cdot\check{v} = a - b/2$. En particular, tendríamos que $f'((0,0),\check{v}_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, lo cual es imposible, porque en ese versor la derivada es nula. En consecuencia, la función f no puede ser diferenciable en el origen.

Como el tema 2 se resuelve de forma similar, solo presentamos su enunciado.

Tema 2

- **Ejercicio 1.** Sea
$$\vec{f}(x,y) = (\sqrt{4x - x^2 + 8y - 4y^2 - 4}, \ln(x - y - 1))$$
y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

- **Ejercicio 2.** Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial
$$\vec{X} = (u, u + v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$
Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x,y,z) = 4x + y^2 + z^2$ en el punto $(1, y_0, 1)$, con $y_0 < 0$. Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

- **Ejercicio 3.** Sea
$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$
Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

- **Ejercicio 4.** Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe un $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ la ecuación $e^y z + xz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple $h(-1, 0) = z_0$.

  Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(-1.05, 0.1)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(-1, 0)$.

- **Ejercicio 5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(y^3) - x^3}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0,0), \check{v}) = 0$.