TEMA 1

1. Sean C_1 y C_2 dos curvas incluidas en la superficie regular Σ. Sabiendo que ambas curvas contienen al punto $A=(4,4,3)$ y que sus correspondientes ecuaciones vectoriales son:
$$C_1 : \vec{X}=(2t\,,\,t^2,\,2t-1) \text{ con } t\in\Re \quad \text{y} \quad C_2 : \vec{X}=(2u-2,\,u+1,\,u^2-6) \text{ con } u\in\Re\,,$$
analice si la recta normal a Σ en A tiene algún punto en común con el plano $x+y+z=27$.

Denotando: $\vec{g}(t)=(2t\,,\,t^2,\,2t-1)$, $\vec{w}(u)=(2u-2,\,u+1,\,u^2-6)$, siendo $A=\vec{g}(2)$ y $A=\vec{w}(3)$, dos vectores tangentes a C_1 y C_2 son, respectivamente:
$$\vec{d}_1=\vec{g}\,'(2)=(2,\,2t,\,2)_{t=2}=(2,4,2) \quad \text{y} \quad \vec{d}_2=\vec{w}\,'(3)=(2,\,1,\,2u)_{u=3}=(2,1,6)$$
Entonces, dado que las rectas que pasan por A dirigidas por estos vectores (tangentes a las mencionadas curvas) están incluidas en el plano tangente a Σ en dicho punto, un vector normal a la superficie en A es $\vec{n}=\vec{d}_1\times\vec{d}_2=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix}=(22,-8,-6)$.

Con ello, una ecuación para la recta normal r_0 a Σ en A es:
$$\vec{X}=(4,4,3)+\lambda(22,-8,-6) \text{ con } \lambda\in\Re, \text{ es decir, los puntos } \vec{X}=(x,y,z)\in r_0 \text{ son:}$$
$$(x,y,z)=(4+22\lambda,4-8\lambda,3-6\lambda) \text{ con } \lambda\in\Re.$$
Para que la recta tenga algún punto en común con el plano dado debe existir λ tal que:
$$4+22\lambda+4-8\lambda+3-6\lambda=27 \iff \lambda=2,$$
con lo cual $\boxed{\text{existe el punto común, este es: } (48,-12,-9)}$.

---

2. **Verifique** que la ecuación $x^2yz+xz+\ln(z+2x-3)-6=0$ define implícitamente $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(1,2)$ y **calcule** $f(1.02,\,1.98)$ mediante una aproximación lineal.

Denotando $F(x,y,z)=x^2yz+xz+\ln(z+2x-3)-6$, vemos que se cumplen las siguientes tres propiedades.

- $F(1,2,z_0)=3z_0+\ln(z_0-1)-6=0$, se cumple únicamente para $z_0=2$.
- $\nabla F(x,y,z)=(2xyz+z+\frac{2}{z+2x-3}\,,\,x^2z\,,\,x^2y+x+\frac{1}{z+2x-3})$ es continuo en un entorno del punto $A=(1,2,2)$, porque sus componentes lo son dado que son polinómicas o suma de polinomio con función continua (cociente de polinomio con denominador no nulo).
- $F'_z(A)=4\neq 0$, se cumple.

Entonces se verifica que la ecuación dada define $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(1,2)$, f es diferenciable en $(1,2)$ y $z_0=f(1,2)=2$. Con esto, una expresión para aproximar linealmente los valores de f en un entorno de $(1,2)$ es:
$$f(x,y)\cong f(1,2)+f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2)$$
Siendo $f'_x(1,2)=-\frac{F'_x(A)}{F'_z(A)}=-\frac{12}{4}=-3$ y $f'_y(1,2)=-\frac{F'_y(A)}{F'_z(A)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, entonces:
$$f(x,y)\cong 2-3(x-1)-\tfrac{1}{2}(y-2) \Rightarrow f(1.02,1.98)\cong 2-3(1.02-1)-\tfrac{1}{2}(1.98-2)$$
Con lo cual resulta: $\boxed{f(1.02,1.98)\cong 1.95}$.

3. Dado $\vec{f}: D \subset \Re^2 \to \Re^2 \ / \ \vec{f}(x,y) = (\ln(y-x^2), \sqrt{9-y-x^2}\ )$, donde D es el dominio natural de $\vec{f}$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.

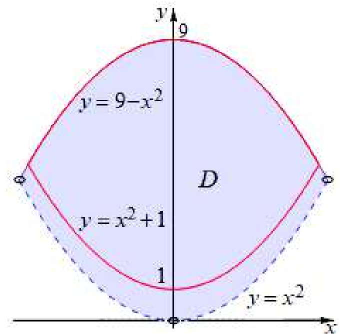
Los puntos (x,y) del dominio natural son aquellos que cumplen con:

$$\begin{cases} \ln(y-x^2) \in \Re \Rightarrow y > x^2 \\ \sqrt{9-y-x^2} \in \Re \Rightarrow 9-y-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

de donde resulta:

$$\boxed{D = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ y > x^2 \wedge y \leq 9-x^2\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



Por su parte, alguna de las componentes del campo resulta nula en todos los puntos de D donde

o bien $\begin{matrix} \ln(y-x^2)=0 \Rightarrow y-x^2=1 \\ \sqrt{9-y-x^2}=0 \Rightarrow 9-y-x^2=0 \end{matrix}$. Entonces $\boxed{H = \{(x,y) \in D \ / \ y = x^2+1 \vee y = 9-x^2\}}$

que son los dos arcos de curva (incluidos en D) que se representan en el gráfico en color rojo.

4. **Analice** extremos locales de $f(x,y) = (x^2 + xy)e^y$ para $(x,y) \in \Re^2$, **indicando** punto(s) donde se producen, tipo(s) de extremo(s) y su(s) correspondiente(s) valor(es).

La función f es continua pues su expresión es el producto de un polinomio y una exponencial, también sus derivadas sucesivas son continuas por ser suma de expresiones del tipo mencionado. Siendo entonces $f \in C^2(\Re^2)$ comenzamos aplicando el procedimiento típico de análisis de extremos.

$$\begin{matrix} f'_x(x,y) = (2x+y)e^y \\ f'_y(x,y) = xe^y + (x^2+xy)e^y \end{matrix} \xrightarrow{\text{puntos estacionarios}} \begin{cases} (2x+y)e^y = 0 & (1) \\ x(x+y+1)e^y = 0 & (2) \end{cases}$$

Dado que $e^y \neq 0 \ \forall y \in \Re$, en (1) debe resultar $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$ (3), que reemplazada en (2) impone $x(-x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \xrightarrow{(3)} P_1=(0,0)$ y $P_2=(1,-2)$ son los puntos estacionarios.

Cálculo de las derivadas en cada punto	$P_1=(0,0)$	$P_2=(1,-2)$
$f''_{xx}(x,y) = 2e^y$	2	$2e^{-2}$
$f''_{xy}(x,y) = e^y + (2x+y)e^y$	1	e^{-2}
$f''_{yy}(x,y) = xe^y + xe^y + (x^2+xy)e^y$	0	e^{-2}

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow f(0,0) \text{ no es extremo local.}$$

$$H(1,-2) = \begin{vmatrix} 2e^{-2} & e^{-2} \\ e^{-2} & e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0 \Rightarrow f(1,-2) \text{ es extremo local.}$$

Como $f''_{xx}(1,-2) = 2e^{-2} > 0$, $\boxed{f(1,-2) = -e^{-2} \text{ es mínimo local}}$.

5. Sea Σ la superficie de ecuación $z = f(\vec{g}(x,y))$ con $f,\vec{g} \in C^1(\Re^2)$. Si $\vec{g}(x,y) = (x^2 y,\, x\,y)$, $f(0,0) = 4$ y <u>para todo punto A</u> y versor $\breve{r} = (u,v)$ la derivada direccional $f'(A,\breve{r}) = 2u + 4v$, **halle** los puntos de Σ donde su plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy).

Dado que $f \in C^1(\Re^2) \Rightarrow f$ diferenciable en $A \in \Re^2 \Rightarrow f'(A,\breve{r}) = 2u + 4v = \nabla f(A)\cdot(u,v)$, de donde $\nabla f(A) = (2,4)$ para todo punto A.

Como $f,\vec{g} \in C^1(\Re^2) \Rightarrow$ su composición es diferenciable, con lo cual, para que el plano tangente a Σ sea horizontal debe cumplirse que las derivadas parciales de primer orden resulten nulas. Es decir, aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que las componentes del $\nabla f(A)$ son los elementos de la matriz jacobiana $Df(A)$:

$$\left(z'_x(a,b)\;\; z'_y(a,b)\right) = Df(A)\; D\vec{g}(a,b) = Df(A)\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y & x \end{pmatrix}_{(a,b)} = \left(2\;\;4\right)\begin{pmatrix} 2ab & a^2 \\ b & a \end{pmatrix} = \left(0\;\;0\right)$$

$$\begin{cases} 4ab + 4b = 0 \quad (*) \\ 2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow 2a(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = -2 \end{cases}$$

$$a = 0 \xrightarrow{(*)} 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \;\rightarrow\; (0,\,0,\,f(\vec{g}(0,0))) = (0,0,f(0,0)) = (0,0,4)$$

$$a = -2 \xrightarrow{(*)} -4b = 0 \Rightarrow b = 0 \;\rightarrow\; (-2,\,0,\,f(\vec{g}(-2,0))) = (-2,0,f(0,0)) = (-2,0,4)$$

<u>Conclusión</u>: $\boxed{\Sigma \text{ tiene plano tangente horizontal en los puntos } (0,0,4) \text{ y } (-2,0,4)}$.

TEMA 2

1. Sean C_1 y C_2 dos curvas incluidas en la superficie regular Σ. Sabiendo que ambas curvas contienen al punto $A=(4,3,4)$ y que sus correspondientes ecuaciones vectoriales son:

$$C_1: \vec{X}=(2t,\,2t-1,\,t^2) \text{ con } t\in\Re \quad \text{y} \quad C_2: \vec{X}=(2u-2,\,u^2-6,\,u+1) \text{ con } u\in\Re,$$

analice si la recta normal a Σ en A tiene algún punto en común con el plano $x+y+z=-5$.

Denotando: $\vec{g}(t)=(2t,\,2t-1,\,t^2)$, $\vec{w}(u)=(2u-2,\,u^2-6,\,u+1)$, siendo $A=\vec{g}(2)$ y $A=\vec{w}(3)$, dos vectores tangentes a C_1 y C_2 son, respectivamente:

$$\vec{d}_1=\vec{g}\,'(2)=(2,\,2,\,2t)_{t=2}=(2,2,4) \quad \text{y} \quad \vec{d}_2=\vec{w}\,'(3)=(2,\,2u,\,1)_{u=3}=(2,6,1)$$

Entonces, dado que las rectas que pasan por A dirigidas por estos vectores (tangentes a las mencionadas curvas) están incluidas en el plano tangente a Σ en dicho punto, un vector normal a la superficie en A es $\vec{n}=\vec{d}_1\times\vec{d}_2=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}=(-22,\,6,\,8)$.

Con ello, una ecuación para la recta normal r_0 a Σ en A es:

$\vec{X}=(4,3,4)+\lambda(-22,6,8)$ con $\lambda\in\Re$, es decir, los puntos $\vec{X}=(x,y,z)\in r_0$ son:

$$(x,y,z)=(4-22\lambda,3+6\lambda,4+8\lambda) \text{ con } \lambda\in\Re.$$

Para que la recta tenga algún punto en común con el plano dado debe existir λ tal que:

$$4-22\lambda+3+6\lambda+4+8\lambda=-5 \iff \lambda=2,$$

con lo cual $\boxed{\text{existe el punto común, este es: } (-40,15,20)}$.

---

2. **Verifique** que la ecuación $xy^2z+yz+\ln(z+2y-3)-6=0$ define implícitamente $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(2,1)$ y **calcule** $f(1.98,\,1.02)$ mediante una aproximación lineal.

Denotando $F(x,y,z)=xy^2z+yz+\ln(z+2y-3)-6$, vemos que se cumplen las siguientes tres propiedades.

- $F(2,1,z_0)=3z_0+\ln(z_0-1)-6=0$, se cumple únicamente para $z_0=2$.
- $\nabla F(x,y,z)=(\,y^2z\,,\ 2xyz+z+\frac{2}{z+2y-3}\,,\ xy^2+y+\frac{1}{z+2y-3})$ es continuo en un entorno del punto $A=(2,1,2)$, porque sus componentes lo son dado que son polinómicas o suma de polinomio con función continua (cociente de polinomio con denominador no nulo).
- $F'_z(A)=4\neq 0$, se cumple.

Entonces se verifica que la ecuación dada define $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(2,1)$, f es diferenciable en $(2,1)$ y $z_0=f(2,1)=2$. Con esto, una expresión para aproximar linealmente los valores de f en un entorno de $(2,1)$ es:

$$f(x,y)\cong f(2,1)+f'_x(2,1)(x-2)+f'_y(2,1)(y-1)$$

Siendo $f'_x(2,1)=-\frac{F'_x(A)}{F'_z(A)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ y $f'_y(2,1)=-\frac{F'_y(A)}{F'_z(A)}=-\frac{12}{4}=-3$, entonces:

$$f(x,y)\cong 2-\tfrac{1}{2}(x-2)-3(y-1) \ \Rightarrow\ f(1.98,1.02)\cong 2-\tfrac{1}{2}(1.98-2)-3(1.02-1)$$

Con lo cual resulta: $\boxed{f(1.98,1.02)\cong 1.95}$.

3. Dado $\vec{f}: D \subset \Re^2 \to \Re^2 \;/\; \vec{f}(x,y) = (\ln(x-y^2), \sqrt{9-x-y^2}\,)$, donde D es el dominio natural de $\vec{f}$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.

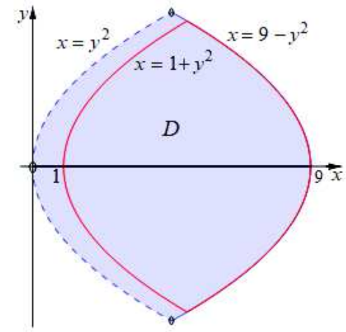
Los puntos (x,y) del dominio natural son aquellos que cumplen con:

$$\begin{cases} \ln(x-y^2) \in \Re \;\Rightarrow\; x-y^2 > 0 \\ \sqrt{9-x-y^2} \in \Re \;\Rightarrow\; 9-x-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

de donde resulta:

$$\boxed{D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x > y^2 \,\wedge\, x \geq 9-y^2\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



Por su parte, alguna de las componentes del campo resulta nula en todos los puntos de D donde o bien $\begin{matrix} \ln(x-y^2) = 0 \;\Rightarrow\; x-y^2 = 1 \\ \sqrt{9-x-y^2} = 0 \;\Rightarrow\; 9-x-y^2 = 0 \end{matrix}$. Entonces $\boxed{H = \{(x,y) \in D \,/\, x = y^2+1 \,\vee\, x = 9-y^2\}}$

que son los dos arcos de curva (incluidos en D) que se representan en el gráfico en color rojo.

4. **Analice** extremos locales de $f(x,y) = (y^2 + x\,y)e^x$ para $(x,y) \in \Re^2$, **indicando** punto(s) donde se producen, tipo(s) de extremo(s) y su(s) correspondiente(s) valor(es).

La función f es continua pues su expresión es el producto de un polinomio y una exponencial, también sus derivadas sucesivas son continuas por ser suma de expresiones del tipo mencionado. Siendo entonces $f \in C^2(\Re^2)$ comenzamos aplicando el procedimiento típico de análisis de extremos.

$$\begin{matrix} f'_x(x,y) = y e^x + (y^2 + x\,y)e^x \\ f'_y(x,y) = (2\,y + x)e^x \end{matrix} \xrightarrow{\text{puntos estacionarios}} \begin{cases} y(x+y+1)e^x = 0 & (1) \\ (2\,y+x)e^x = 0 & (2) \end{cases}$$

Dado que $e^x \neq 0 \;\; \forall x \in \Re$, en (2) debe resultar $2\,y + x = 0 \;\Rightarrow\; x = -2\,y$ (3), que reemplazada en (1) impone $y\,(-y+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \,\vee\, y = 1 \xrightarrow{(3)} P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (-2,1)$ son los puntos estacionarios.

Cálculo de las derivadas en cada punto	$P_1 = (0,0)$	$P_2 = (-2,1)$
$f''_{xx}(x,y) = y e^x + y e^x + (y^2 + x\,y)e^x$	0	e^{-2}
$f''_{xy}(x,y) = e^x + (2\,y + x)e^x$	1	e^{-2}
$f''_{yy}(x,y) = 2e^x$	2	$2\,e^{-2}$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0 \;\Rightarrow\; f(0,0)$ no es extremo local.

$H(-2,1) = \begin{vmatrix} e^{-2} & e^{-2} \\ e^{-2} & 2e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0 \;\Rightarrow\; f(-2,1)$ es extremo local.

Como $f''_{xx}(-2,1) = e^{-2} > 0$, $\boxed{f(-2,1) = -e^{-2} \text{ es mínimo local}}$.

5. Sea Σ la superficie de ecuación $z = f(\vec{g}(x,y))$ con $f, \vec{g} \in C^1(\Re^2)$. Si $\vec{g}(x,y) = (x\,y^2\,,\,x\,y)$, $f(0,0) = 4$ y <u>para todo punto A</u> y versor $\breve{r} = (u,v)$ la derivada direccional $f'(A,\breve{r}) = 4u + 2v$, **halle** los puntos de Σ donde su plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy).

Dado que $f \in C^1(\Re^2) \Rightarrow f$ diferenciable en $A \in \Re^2 \Rightarrow f'(A,\breve{r}) = 4u + 2v = \nabla f(A) \cdot (u,v)$, de donde $\nabla f(A) = (4\,,2)$ para todo punto $A = (a\,,b)$.

Como $f, \vec{g} \in C^1(\Re^2) \Rightarrow$ su composición es diferenciable, con lo cual, para que el plano tangente a Σ sea horizontal debe cumplirse que las derivadas parciales de primer orden resulten nulas.
Es decir, aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que las componentes del $\nabla f(A)$ son los elementos de la matriz jacobiana $Df(A)$:

$$\left(z'_x(a,b)\;\; z'_y(a,b)\right) = Df(A)\; D\vec{g}(a,b) = Df(A) \begin{pmatrix} y^2 & 2\,x\,y \\ y & x \end{pmatrix}_{(a,b)} = \left(4\;\;2\right)\begin{pmatrix} b^2 & 2\,a\,b \\ b & a \end{pmatrix} = \left(0\;\;0\right)$$

$$\begin{cases} 4b^2 + 2b = 0 & \Rightarrow 2b(2b+1) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -1/2 \\ 8\,a\,b + 2\,a = 0 \;\; (*) & \end{cases}$$

$$b = 0 \xrightarrow{(*)} 2\,a = 0 \Rightarrow a = 0 \;\rightarrow\; (0,\,0,\; f(\vec{g}(0{,}0))) = (0\,,0\,,f(0{,}0)) = (0\,,0\,,4)$$
$$b = -\tfrac{1}{2} \xrightarrow{(*)} -2\,a = 0 \Rightarrow a = 0 \;\rightarrow\; (0,-\tfrac{1}{2},\; f(\vec{g}(0.-\tfrac{1}{2}))) = (0\,,-\tfrac{1}{2}\,,f(0{,}0)) = (0,-\tfrac{1}{2}\,,4)$$

<u>Conclusión</u>: $\boxed{\Sigma \text{ tiene plano tangente horizontal en los puntos } (0,0,4) \text{ y } (0,-1/2\,,4)}$.