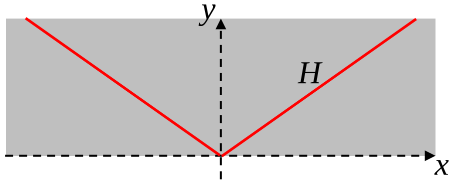
## TEMA 1

1. Dada $f(x,y)=\ln(x^2y)$ definida en su dominio natural $D$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio y el conjunto de puntos $H$ para los cuales $f''_{xx}(x,y)-f''_{yy}(x,y)=0$.

Los puntos $(x,y)$ que pertenecen a $D$ son aquellos para los cuales $x^2\,y>0$, por ello:

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x\neq 0\wedge y>0\}}$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.




Por otra parte:
$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2y}=\dfrac{2}{x}\ \forall(x,y)\in D\Rightarrow f''_{xx}(x,y)=-2x^{-2}\ \forall(x,y)\in D. \\ f'_y(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2y}=\dfrac{1}{y}\ \forall(x,y)\in D\Rightarrow f''_{yy}(x,y)=-y^{-2}\ \forall(x,y)\in D. \end{cases}$$

Con lo cual $f''_{xx}(x,y)-f''_{yy}(x,y)=0$ impone que $-2x^{-2}+y^{-2}=0\ \Rightarrow x^2=2y^2\ \forall(x,y)\in D$. Entonces el conjunto de puntos $H$ para los cuales se cumple esta propiedad, son los puntos de las rectas de ecuaciones $x=\sqrt{2}\,y$ y $x=-\sqrt{2}\,y$ que pertenecen al dominio $D$ de $f$. Así:

$\boxed{H=\{(x,y)\in D\subset\Re^2\ /\ x=\sqrt{2}\,y\ \vee\ x=-\sqrt{2}\,y\}\text{, en el gráfico se representa en color rojo}}$.

---

2. Siendo $C$ la curva de ecuación $\vec{X}=(t^4-2t^2,t^3-2t,t^3-3t)$ con $t\in\Re$, **halle** las ecuaciones de las rectas tangentes a $C$ en aquellos puntos donde dichas rectas son paralelas al " eje $y$ " y **analice** si existe un plano que contenga a dichas rectas; en caso afirmativo **halle** una ecuación para ese plano.

Denotando $\vec{g}(t)=(t^4-2t^2,t^3-2t,t^3-3t)$, buscamos los puntos donde la recta tangente (dirigida por $\vec{g}\,'(t)$) es paralela al eje $y$, para ello: $(4t^3-4t\,,3t^2-2\,,3t^2-3)=k\,(0,1,0)$ con $k\neq 0$, es decir:

$$\begin{cases} 4t^3-4t=0\ \Leftrightarrow\ 4t\,(t^2-1)=0\ \Leftrightarrow t=0\vee t=-1\vee t=1 \\ 3t^2-2=k \\ 3t^2-3=0\ \Leftrightarrow\ 3(t^2-1)=0\ \Leftrightarrow t=-1\vee t=1 \end{cases}$$

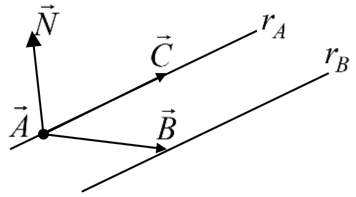
Los posibles valores de $t$ son "$-1$" y "1", entonces los puntos en los que la recta tangente es paralela al eje $y$ son:

$$\boxed{\vec{A}=\vec{g}(-1)=(-1,1,2)}\ \text{ y }\ \boxed{\vec{B}=\vec{g}(1)=(-1,-1,-2)},$$

Las correspondientes ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos son:

$$\boxed{r_A:\vec{X}=(-1,1,2)+\lambda(0,1,0)\ \text{con}\ \lambda\in\Re}\ \text{ y }\ \boxed{r_B:\vec{X}=(-1,-1,-2)+\mu(0,1,0)\ \text{con}\ \mu\in\Re}$$

Como son dos rectas paralelas, queda definido un plano que las contiene. La siguiente es una forma de obtener ese plano.
Observando el esquema de la derecha, donde $\vec{C}$ es un punto de $r_A$ distinto del $\vec{A}$, es claro que los vectores $\vec{B}-\vec{A}$ y $\vec{C}-\vec{A}$ están incluidos en el plano que contiene a ambas rectas.
Por ejemplo, con $\lambda=1$, obtenemos $\vec{C}=(-1,2,2)$.




Un vector normal al plano es $\vec{N}=(\vec{B}-\vec{A})\times(\vec{C}-\vec{A})=(0,-2,-4)\times(0,1,0)=(4,0,0)$, entonces una ecuación cartesiana para el plano buscado es: $((x,y,z)-\vec{A})\cdot\vec{N}=0$, es decir $4(x+1)=0$, o bien: $\boxed{x=-1}$.

3. Sean $f$ , $\vec{g}$ definidos en $\Re^2$ con $f(u,v) = u^2 v + v^3$ y $D\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \text{sen}(y-2) & x\cos(y-2) \\ 3 & 2y \end{pmatrix}$ la matriz jacobiana de $\vec{g}$ . Sabiendo que $\vec{g}(1,2) = (3,1)$ y que $h = f \circ \vec{g}$ , **halle** los versores según los cuales la función $h$ tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en el punto $(1,2)$ y **calcule** los valores de dichas derivadas.

Dado que $f \in C^1(\Re^2)$ por ser polinómica (gradiente continuo) y $\vec{g} \in C^1(\Re^2)$ pues $D\vec{g}$ tiene elementos continuos, ambas son diferenciables en todo punto. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ resulta diferenciable, en particular en el punto $(1,2)$, con lo cual la máxima derivada direccional se produce en la dirección del $\nabla h(1,2)$, la mínima en la dirección opuesta y la nula en las ortogonales.
Aplicando la regla de la cadena:

$$Dh(1,2) = Df(\vec{g}(1,2))\, D\vec{g}(1,2) = (2uv \;\; u^2+3v^2)\Big]_{(3,1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (6 \;\; 12)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (36 \;\; 54)$$

Entonces $\nabla h(1,2) = (36, 54)$ , siendo $\|\nabla h(1,2)\| = 18\sqrt{13}$ , con lo cual:

Dirección deriv. máxima: $\breve{r}_{\text{máx}} = \dfrac{\nabla h(1,2)}{\|\nabla h(1,2)\|} = (2/\sqrt{13}\,,\, 3/\sqrt{13}\,)$. Valor derivada máxima: $18\sqrt{13}$ .

Dirección deriv. mínima: $\breve{r}_{\text{mín}} = -\dfrac{\nabla h(1,2)}{\|\nabla h(1,2)\|} = (-2/\sqrt{13}\,,-3/\sqrt{13}\,)$ . Valor derivada mínima: $-18\sqrt{13}$ .

Direcciones de derivada nula: $\breve{r}_{\text{nula}_1} = (-3/\sqrt{13}\,,\, 2/\sqrt{13}\,)$ y $\breve{r}_{\text{nula}_2} = (3/\sqrt{13}\,,\, -2/\sqrt{13}\,)$ . En ambas direcciones la derivada resulta igual a “ $0$ ”.

---

4. Dada $f : D \subset \Re^2 \to \Re \;/\; f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2 + 4$ con $D = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; x^2 + y^2 \le 1\}$ , **determine** y **clasifique** los extremos locales y absolutos de los valores de $f$ en $D$ **indicando** sus valores y en qué puntos se producen (<u>al menos un punto</u> para cada extremo).

<u>Análisis en el interior de $D$</u> ( $x^2 + y^2 < 1$). Siendo $f$ polinómica, los puntos críticos los obtenemos imponiendo que ambas derivadas parciales resulten nulas.

$$f'_x(x,y) = 3y - 2x \qquad \text{Sistema a resolver: } \begin{cases} 3y - 2x = 0 \;\to\; y = 2x/3 \xrightarrow{(*)} 5x/3 = 0 \;\to\; x = 0 \\ 3x - 2y = 0 \quad (*) \end{cases}$$
$$f'_y(x,y) = 3x - 2y$$

Con $x = 0 \xrightarrow{y\,=\,2x/3} y = 0$. Luego, único punto crítico: $(0,0)$ .

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= -2 \\ f''_{xy}(x,y) &= 3 \\ f''_{yy}(x,y) &= -2 \end{aligned}\right. \;\Rightarrow\; H(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 < 0 \Rightarrow \boxed{f(0,0) \text{ no es extremo local}}.$$

<u>Análisis en la frontera de $D$</u> ( $x^2 + y^2 = 1$ ). Parametrizando la circunferencia resulta, por ejemplo:

$$\vec{X} = \underbrace{(\cos(t), \text{sen}(t))}_{\vec{g}(t)} \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces $f(\vec{g}(t)) = h(t) = 3\cos(t)\text{sen}(t) + 3 = \frac{3}{2}(\text{sen}(2t) + 2)$ con $0 \le t \le 2\pi$ con lo cual, dado que $-1 \le \text{sen}(\bullet) \le 1$, los extremos son 9/2 y 3/2.

Para $\text{sen}(2t) = 1 \to t = \frac{\pi}{4} \vee t = \dfrac{5\pi}{4} \to \boxed{f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \frac{9}{2} \text{ máx. absoluto}}.$

Para $\text{sen}(2t) = -1 \to t = \frac{3\pi}{4} \vee t = \frac{7\pi}{4} \to \boxed{f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \frac{3}{2} \text{ mín. absoluto}}.$

5. Sea $\Sigma$ la superficie de ecuación $z = x\,f(x,y)$ con $(x,y)$ en un entorno de $A=(2,1)$. **Halle** el punto en el que la recta normal a $\Sigma$ en $(2,1,z_o)$ interseca al plano $yz$, sabiendo que la función $f$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $u\,x + e^{x+2y+u-7} - 7 = 0$.

Una ecuación vectorial de $\Sigma$ es $\vec{X} = \underbrace{(x\,,\,y\,,\,x\,f(x,y))}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in E(A)$, con lo cual suponiendo $f$ diferenciable en $E(A)$ también lo será $\vec{F}$ y un vector normal a $\Sigma$ en $(2,1,z_o)$ es:

$$\vec{n}_o = [\vec{F}_x' \times \vec{F}_y']_{(2,1)} = \left[\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & f(x,y) + x\,f_x'(x,y) \\ 0 & 1 & x\,f_y'(x,y) \end{vmatrix}\right]_{(2,1)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & f(2,1) + 2\,f_x'(2,1) \\ 0 & 1 & 2\,f_y'(2,1) \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Para obtener el valor de $f$ y de sus derivadas en $(2,1)$, dado que la función está definida implícitamente, denotamos $G(x,y,u) = u\,x + e^{x+2y+u-7} - 7$ observando que:

- $G(2,1,u_o) = 2u_o + e^{u_o - 3} - 7 = 0 \iff u_o = 3$.
- $\nabla G(x,y,u) = (u + e^{x+2y+u-7}\,,\, 2e^{x+2y+u-7}\,,\, x + e^{x+2y+u-7})$ es continuo por tener componentes continuas (del tipo composición de polinomio con exponencial o ídem anterior más polinomio).
- $G_u'(2,1,3) = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

Por lo tanto la ecuación $G(x,y,u) = 0$ define implícitamente $u = f(x,y)$ en un entorno de $(2,1)$, siendo $f$ diferenciable en dicho punto, resultando $f(2,1) = u_o = 3$ y las siguientes derivadas:

$$f_x'(2,1) = -\frac{G_x'(2,1,3)}{G_u'(2,1,3)} = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad f_y'(2,1) = -\frac{G_y'(2,1,3)}{G_u'(2,1,3)} = -\frac{2}{3}$$

Con esto, reemplazando en $(*)$, resulta $\vec{n}_o = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{vmatrix} = (-1/3\,,\,4/3\,,\,1)$ que dirige la recta normal a $\Sigma$ en el punto $(2,1,6)$, ya que $z_0 = 2\,f(2,1)$. Entonces la ecuación de dicha recta es:

$$\vec{X} = (2,1,6) + \lambda\,(-1/3, 4/3, 1)$$

$$\vec{X} = (2 - \lambda/3\,,\, 1 + 4\lambda/3\,,\, 6 + \lambda) \text{ con } \lambda \in \Re.$$

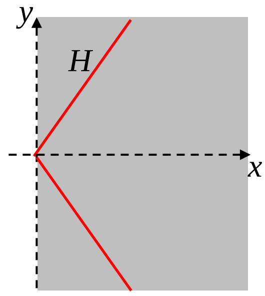
Dado que la ecuación del plano $yz$ es $x = 0$, la recta interseca a dicho plano en el punto para el cual resulta $2 - \lambda/3 = 0 \Rightarrow \lambda = 6$, resultando el punto $(0,9,12)$.

<u>Respuesta</u>: $\boxed{\text{La recta normal a } \Sigma \text{ en } (2,1,6) \text{ interseca al plano } yz \text{ en el punto } (0,9,12)}$.

## TEMA 2

1. Dada $f(x,y) = \ln(x\,y^2)$ definida en su dominio natural $D$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio y el conjunto de puntos $H$ para los cuales $f''_{xx}(x,y) - f''_{yy}(x,y) = 0$.

Los puntos $(x,y)$ que pertenecen a $D$ son aquellos para los cuales $x\,y^2 > 0$, por ello:




$$\boxed{D = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ y \neq 0 \wedge x > 0\}}$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha. Por otra parte:

$$f'_x(x,y) = \frac{y^2}{x\,y^2} = \frac{1}{x} \ \forall (x,y) \in D \Rightarrow f''_{xx}(x,y) = -\,x^{-2} \ \forall (x,y) \in D.$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2\,x\,y}{x\,y^2} = \frac{2}{y} \ \forall (x,y) \in D \Rightarrow f''_{yy}(x,y) = -\,2\,y^{-2} \ \forall (x,y) \in D.$$

Con lo cual $f''_{xx}(x,y) - f''_{yy}(x,y) = 0$ impone que $-x^{-2} + 2\,y^{-2} = 0 \Rightarrow y^2 = 2\,x^2 \ \forall (x,y) \in D$. Entonces el conjunto de puntos $H$ para los cuales se cumple esta propiedad, son los puntos de las rectas de ecuaciones $y = \sqrt{2}\,x$ y $y = -\sqrt{2}\,x$ que pertenecen al dominio $D$ de $f$. Así:

$\boxed{H = \{(x,y) \in D \subset \Re^2 \ / \ y = \sqrt{2}\,x \vee y = -\sqrt{2}\,x\}}$, en el gráfico se representa en color rojo.

---

2. Siendo $C$ la curva de ecuación $\vec{X} = (t^3 + t,\ t^4 - 2t^2,\ t^3 - 3t)$ con $t \in \Re$, **halle** las ecuaciones de las rectas tangentes a $C$ en aquellos puntos donde dichas rectas son paralelas al "eje $x$" y **analice** si existe un plano que contenga a dichas rectas; en caso afirmativo **halle** una ecuación para ese plano.

Denotando $\vec{g}(t) = (t^3 + t,\ t^4 - 2t^2,\ t^3 - 3t)$ buscamos los puntos donde la recta tangente, dirigida por $\vec{g}\,'(t)$, es paralela al eje $y$. Para ello: $(3t^2 + 1,\ 4t^3 - 4t,\ 3t^2 - 3) = k\,(1,0,0)$ con $k \neq 0$, es decir:

$$\begin{cases} 2t^2 + 1 = k \\ 4t^3 - 4t = 0 \ \Leftrightarrow \ 4t\,(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1 \vee t = 1 \\ 3t^2 - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ 3(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 1 \end{cases}$$

Los posibles valores de $t$ son "$-1$" y "$1$", entonces los puntos en los que la recta tangente es paralela al eje $x$ son:

$$\boxed{\vec{A} = \vec{g}(-1) = (-2, -1, 2)} \ \text{ y } \ \boxed{\vec{B} = \vec{g}(1) = (2, -1, -2)},$$

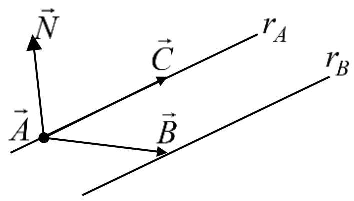
Las correspondientes ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos son:

$$\boxed{r_A : \vec{X} = (-2,-1,2) + \lambda(1,0,0) \text{ con } \lambda \in \Re} \ \text{ y } \ \boxed{r_B : \vec{X} = (2,-1,-2) + \mu(1,0,0) \text{ con } \mu \in \Re}$$

Como son dos rectas paralelas, queda definido un plano que las contiene. La siguiente es una forma de obtener ese plano.

Observando el esquema de la derecha, donde $\vec{C}$ es un punto de $r_A$ distinto del $\vec{A}$, es claro que los vectores $\vec{B} - \vec{A}$ y $\vec{C} - \vec{A}$ están incluidos en el plano que contiene a ambas rectas.

Por ejemplo, con $\lambda = 1$, obtenemos $\vec{C} = (-1, -1, 2)$.




Un vector normal al plano es $\vec{N} = (\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A}) = (4,0,-4) \times (1,0,0) = (0,-4,0)$, entonces una ecuación cartesiana para el plano buscado es: $((x,y,z) - \vec{A}) \cdot \vec{N} = 0$, es decir $-4(y+1) = 0$, o bien: $\boxed{y = -1}$.

3. Sean $f$, $\vec{g}$ definidos en $\Re^2$ con $f(u,v) = u\,v^2 + u^3$ y $D\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(x-2) & \text{sen}(x-2) \\ 2x & 3 \end{pmatrix}$ la matriz jacobiana de $\vec{g}$. Sabiendo que $\vec{g}(2,1) = (1,3)$ y que $h = f \circ \vec{g}$, **halle** los versores según los cuales la función $h$ tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en el punto $(2,1)$ y **calcule** los valores de dichas derivadas.

Dado que $f \in C^1(\Re^2)$ por ser polinómica (gradiente continuo) y $\vec{g} \in C^1(\Re^2)$ pues $D\vec{g}$ tiene elementos continuos, ambas son diferenciables en todo punto. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ resulta diferenciable, en particular en el punto $(2,1)$, con lo cual la máxima derivada direccional se produce en la dirección del $\nabla h(2,1)$, la mínima en la dirección opuesta y la nula en las ortogonales.
Aplicando la regla de la cadena:

$$Dh(2,1) = Df(\vec{g}(2,1))\; D\vec{g}(2,1) = (v^2 + 3u^2 \;\; 2u\,v)\big]_{(1,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (12 \;\; 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (36 \;\; 18)$$

Entonces $\nabla h(2,1) = (36,18)$, siendo $\|\nabla h(1,2)\| = 18\sqrt{5}$, con lo cual:

Dirección deriv. máxima: $\breve{r}_{\text{máx}} = \dfrac{\nabla h(2,1)}{\|\nabla h(2,1)\|} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Valor derivada máxima: $18\sqrt{5}$.

Dirección deriv. mínima: $\breve{r}_{\text{mín}} = -\dfrac{\nabla h(2,1)}{\|\nabla h(2,1)\|} = (-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$. Valor derivada mínima: $-18\sqrt{5}$.

Direcciones de derivada nula: $\breve{r}_{\text{nula}_1} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $\breve{r}_{\text{nula}_2} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. En ambas direcciones la derivada resulta igual a "$0$".

---

4. Dada $f : D \subset \Re^2 \to \Re \,/\, f(x,y) = 4x\,y - x^2 - y^2 + 7$ con $D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 2\}$, **determine** y **clasifique** los extremos locales y absolutos de los valores de $f$ en $D$ **indicando** sus valores y en qué puntos se producen (al menos un punto para cada extremo).

Análisis en el interior de $D$ ($x^2 + y^2 < 2$). Siendo $f$ polinómica, los puntos críticos los obtenemos imponiendo que ambas derivadas parciales resulten nulas.

$f'_x(x,y) = 4y - 2x$
$f'_y(x,y) = 4x - 2y$ Sistema a resolver: $\begin{cases} 4y - 2x = 0 \;\to\; y = x/2 \xrightarrow{(*)} 3x = 0 \;\to\; x = 0 \\ 4x - 2y = 0 \;\; (*) \end{cases}$

Con $x = 0 \xrightarrow{y = x/2} y = 0$. Luego, único punto crítico: $(0,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx}(x,y) = -2 \\ f''_{xy}(x,y) = 4 \\ f''_{yy}(x,y) = -2 \end{array}\right. \Rightarrow H(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow \boxed{f(0,0) \text{ no es extremo local}}.$$

Análisis en la frontera de $D$ ($x^2 + y^2 = 2$). Parametrizando la circunferencia resulta, por ejemplo:

$$\vec{X} = \underbrace{(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,\text{sen}(t))}_{\vec{g}(t)} \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces $f(\vec{g}(t)) = h(t) = 8\cos(t)\,\text{sen}(t) + 5 = 4\,\text{sen}(2t) + 5$ con $0 \le t \le 2\pi$ con lo cual, dado que $-1 \le \text{sen}(\bullet) \le 1$, los extremos son 9 y 1.

Para $\text{sen}(2t) = 1 \to t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4} \to \boxed{f(1,1) = f(-1,-1) = 9 \text{ máx. absoluto}}$. *Corregido*

Para $\text{sen}(2t) = -1 \to t = \frac{3\pi}{4} \vee t = \frac{7\pi}{4} \to \boxed{f(-1,1) = f(1,-1) = 1 \text{ mín. absoluto}}$. *Corregido*

5. Sea $\Sigma$ la superficie de ecuación $z = y\, f(x,y)$ con $(x,y)$ en un entorno de $A=(1,2)$. **Halle** el punto en el que la recta normal a $\Sigma$ en $(1,2,z_{\text{o}})$ interseca al plano $xz$, sabiendo que la función $f$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $u\,y + e^{y+2x+u-7} - 7 = 0$.

Una ecuación vectorial de $\Sigma$ es $\vec{X} = \underbrace{(x\,,\,y\,,\,y\,f(x,y))}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in E(A)$, con lo cual suponiendo $f$ diferenciable en $E(A)$ también lo será $\vec{F}$ y un vector normal a $\Sigma$ en $(1,2,z_{\text{o}})$ es:

$$\vec{n}_{\text{o}} = [\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y]_{(1,2)} = \left[\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & y\, f'_x(x,y) \\ 0 & 1 & f(x,y) + y\, f'_y(x,y) \end{vmatrix}\right]_{(1,2)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 2\, f'_x(1,2) \\ 0 & 1 & f(1,2) + 2\, f'_y(1,2) \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Para obtener el valor de $f$ y de sus derivadas en $(1,2)$, dado que la función está definida implícitamente, denotamos $G(x,y,u) = u\,y + e^{y+2x+u-7} - 7$ observando que:

- $G(1,2,u_{\text{o}}) = 2u_{\text{o}} + e^{u_{\text{o}}-3} - 7 = 0 \;\Leftrightarrow u_{\text{o}} = 3$.
- $\nabla G(x,y,u) = (2e^{y+2x+u-7}\,,\, u + e^{y+2x+u-7}\,,\, y + e^{y+2x+u-7})$ es continuo por tener componentes continuas (del tipo composición de polinomio con exponencial o ídem anterior más polinomio).
- $G'_u(1,2,3) = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

Por lo tanto la ecuación $G(x,y,u) = 0$ define implícitamente $u = f(x,y)$ en un entorno de $(1,2)$, siendo $f$ diferenciable en dicho punto, resultando $f(1,2) = u_{\text{o}} = 3$ y las siguientes derivadas:

$$f'_x(1,2) = -\frac{G'_x(1,2,3)}{G'_u(1,2,3)} = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad f'_y(1,2) = -\frac{G'_y(1,2,3)}{G'_u(1,2,3)} = -\frac{4}{3}$$

Con esto, reemplazando en $(*)$, resulta $\vec{n}_{\text{o}} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{vmatrix} = (4/3\,,\,-1/3\,,\,1)$ que dirige la recta normal a $\Sigma$ en el punto $(1,2,6)$, ya que $z_0 = 2\,f(1,2)$. Entonces la ecuación de dicha recta es:

$$\vec{X} = (1,2,6) + \lambda\,(4/3, -1/3, 1)$$

$$\vec{X} = (1 + 4\lambda/3\,,\, 2 - \lambda/3\,,\, 6 + \lambda) \quad \text{con } \lambda \in \Re.$$

Dado que la ecuación del plano $xz$ es $y = 0$, la recta interseca a dicho plano en el punto para el cual resulta $2 - \lambda/3 = 0 \Rightarrow \lambda = 6$, resultando el punto $(9,0,12)$.

<u>Respuesta</u>: $\boxed{\text{La recta normal a } \Sigma \text{ en } (1,2,6) \text{ interseca al plano } xz \text{ en el punto } (9,0,12)}$.