TEMA 1

1. **Analice** extremos locales (o relativos) de $f(x,y,z) = x\,y + \frac{1}{2}z^2 + 2\,y\,z + 5$ evaluada en puntos de la superficie de ecuación $\vec{X} = (u\,v,\ u,\ v)$ con $(u,v) \in \Re^2$, **indicando** el/los punto(s) donde se produce(n) extremo(s), el tipo de extremo y el valor del mismo.

Denotando $\vec{g}(u,v) = (u\,v,\ u,\ v)$, se pide analizar extremos locales de:

$$h(u,v) = f(\vec{g}(u,v)) = u^2\,v + \tfrac{1}{2}v^2 + 2u\,v + 5 \text{ con } (u,v) \in \Re^2$$

Dado que $h \in C^2(\Re^2)$ por ser del tipo polinómica, comenzamos determinando los puntos críticos:

$$\begin{cases} h'_u(u,v) = 2\,u\,v + 2\,v \\ h'_v(u,v) = u^2 + v + 2\,u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\,u\,v + 2v = 0 & \rightarrow 2v\,(u+1) = 0 \rightarrow u = -1 \vee v = 0 \\ u^2 + v + 2u = 0 & (*) \end{cases}$$

$$u = -1 \xrightarrow{(*)} v - 1 = 0 \Rightarrow v = 1 \rightarrow A = (-1,1)$$

$$v = 0 \xrightarrow{(*)} u^2 + 2u = 0 \rightarrow u\,(u+2) = 0 \Rightarrow u = 0 \vee u = -2 \rightarrow B = (0,0),\ C = (-2,\,0)$$

	$A = (-1,\,1)$	$B = (0,\,0)$	$C = (-2,\,0)$
$h''_{uu}(u,v) = 2v$	2	0	0
$h''_{uv}(u,v) = 2u + 2$	0	2	-2
$h''_{vv}(u,v) = 1$	1	1	1

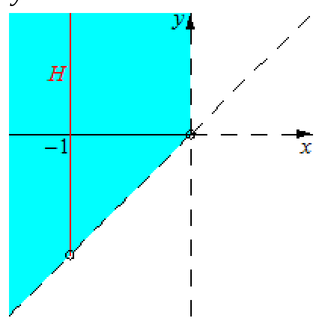
$H(-1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow h(-1,1) = 9/2$ es extremo local, como $h''_{uu}(-1,1) = 2 > 0$ es mínimo.

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow h(0,0)$ no es extremo local.

$H(-2,0) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow h(-2,0)$ no es extremo local.

Dado que $h(-1,1) = f(-1,-1,1) \Rightarrow$ El único extremo es $\boxed{f(-1,-1,1) = 9/2, \text{ que es mínimo local}}$.

2. Sea $\vec{f} : D \subset \Re^2 \rightarrow \Re^2\ /\ \vec{f}(x,y) = (\ln(y-x),\, \ln(x^2 - x\,y))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\vec{f}'_x(x,y) + \vec{f}'_y(x,y) = (0,-1)$.



Los puntos de D son aquellos para los cuales:

$$\begin{cases} x < y \\ x^2 - x\,y > 0 \rightarrow x\,(x-y) > 0 \rightarrow (x > 0 \wedge x > y) \vee (x < 0 \wedge x < y) \end{cases}$$

Entonces $\boxed{D = \{(x,y) \in \Re^2\ /\ y > x \wedge x < 0\}}$, que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.

Por otra parte $\vec{f}'_x(x,y) = (\frac{-1}{y-x}, \frac{2x-y}{x^2-x\,y})$ y $\vec{f}'_y(x,y) = (\frac{1}{y-x}, \frac{-x}{x^2-x\,y})$ definidas en D.

De donde $\vec{f}'_x(x,y) + \vec{f}'_y(x,y) = (0, \frac{x-y}{x\,(x-y)}) = (0, x^{-1})$ en D, luego debe ser $x^{-1} = -1 \Rightarrow x = -1$ en D.

Entonces el conjunto $\boxed{H = \{(x,y) \in D\ /\ x = -1\}}$, que se representa en color rojo en el gráfico.

3. Sea r_o la recta normal a la superficie de ecuación $x = y z^2 + z$ en el punto $(2,1,1)$. **Determine** los puntos en los que r_o interseca a los planos coordenados y **halle** la ecuación de un plano que contenga a dichos puntos y al origen de coordenadas.

Denotando $F(x, y, z) = y z^2 + z - x$ la ecuación de la superficie es $F(x, y, z) = 0$, donde $F \in C^1(\Re^3)$ pues es polinómica, $F(2,1,1) = 0$ y $\nabla F(2,1,1) = (-1,\, z^2,\, 2yz+1)]_{(2,1,1)} = (-1, 1, 3) \neq \vec{0}$. Entonces dicho vector gradiente es perpendicular a la superficie, de donde, una ecuación para r_o es:

$$\vec{X} = (2,1,1) + \lambda(-1,1,3) \text{ con } \lambda \in \Re, \text{ o bien, } \vec{X} = (2-\lambda,\, 1+\lambda,\, 1+3\lambda) \text{ con } \lambda \in \Re.$$

Los puntos en que r_o interseca a los planos coordenados son:

En el plano xy, con $\lambda = -1/3$, $\boxed{\vec{A} = (7/3,\ 2/3,\ 0)}$

En el plano xz, con $\lambda = -1$, $\boxed{\vec{B} = (3,\ 0,\ -2)}$

En el plano yz, con $\lambda = 2$, $\boxed{\vec{C} = (0,\ 3,\ 7)}$

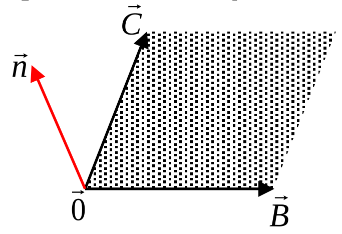
Dado que $\vec{B}, \vec{C}$ y $\vec{0} = (0,0,0)$ deben pertenecer al plano que los contiene, los vectores

$$\vec{B} - \vec{0} = \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{C} - \vec{0} = \vec{C}$$

también pertenecen al plano, con lo cual un vector normal al mismo es:

$$\vec{n} = \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (6, -21, 9)$$

representación esquemática



Entonces una ecuación para el plano buscado es $((x, y, z) - (0,0,0)) \cdot (6,-21,9) = 0$, es decir, el plano que contiene a los cuatro puntos tiene ecuación cartesiana $\boxed{6x - 21y + 9z = 0}$.

Nota: Es claro que el punto $\vec{A}$, que no fue utilizado, está contenido en el plano (verifíquelo) pues pertenece a la recta r_o que pasa por $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

4. Siendo $f(x, y) = x + \text{sen}(xy)$, **halle** los versores $\breve{r}$ tales que la derivada direccional de f en $A = (\sqrt{3}, 0)$ según $\breve{r}$ resulte igual al 50% de la máxima derivada direccional en dicho punto.

Siendo $\nabla f(x, y) = (1 + y\cos(xy),\, x\cos(xy))$ continuo por tener componentes continuas (composición de polinomio con coseno multiplicada por polinomio + constante), resulta $f \in C^1 \Rightarrow f$ diferenciable en todo punto. Siendo $\nabla f(A) = (1, \sqrt{3})$.

La máxima derivada direccional es $f'(A, \breve{r}_{\text{máx}}) = \|\nabla f(A)\| = 2$ con $\breve{r}_{\text{máx}} = \dfrac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

Ahora buscamos $\breve{r} = (a,b)$ tales que $f'(A, \breve{r}) = \nabla f(A) \cdot \breve{r} = \dfrac{\|\nabla f(A)\|}{2} = 1$, es decir:

$$f'(A, \breve{r}) = \nabla f(A) \cdot \breve{r} = (1, \sqrt{3}) \cdot (a, b) = a + b\sqrt{3} = 1, \text{ donde } a^2 + b^2 = 1 \text{ por ser } \breve{r} \text{ un versor}$$

Entonces $a^2 + [(1-a)/\sqrt{3}]^2 = 1 \to 4a^2 - 2a - 2 = 0 \to a_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \dfrac{2 \pm 6}{8} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2}$

Con lo cual $b_1 = 0$ y $b_2 = (1 + 1/2)/\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$.

Los versores pedidos son: $\boxed{\breve{r}_1 = (1, 0) \text{ y } \breve{r}_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)}$.

5. **Calcule** una aproximación lineal de $f(1.98, 0.99)$, **verificando** previamente que la ecuación $3xyv + \ln(1+2v-xy) - 6 = 0$ define implícitamente a $v = f(x,y)$ en un entorno de un punto (x_o, y_o) apropiado.

Siendo $(x_o, y_o) = (2,1)$ y $A = (2,1,v_o)$, comenzamos viendo si se cumplen las condiciones para que la ecuación dada defina implícitamente a $v = f(x,y)$ en un entorno de (x_o, y_o).

Denotando $F(x,y,v) = 3xyv + \ln(1+2v-xy) - 6$, tenemos que:

- $F(A) = 6v_o + \ln(2v_o - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow v_o = f(2,1) = 1$.
- $\nabla F(x,y,v) = (3yv - \frac{y}{1+2v-xy}, 3xv - \frac{x}{1+2v-xy}, 3xy + \frac{2}{1+2v-xy})$ es continuo en un entorno de A pues sus componentes son continuas (suma de polinomio más cociente de polinomios con denominador no nulo).
- $F'_v(A) = 6 + 2 = 8 \neq 0$.

Como se cumplen las mencionadas condiciones f queda definida, resultando diferenciable en (x_o, y_o). Entonces la expresión para realizar la aproximación lineal solicitada es:

$$f(x,y) \cong f(2,1) + \underbrace{f'_x(2,1)}_{v'_x(2,1)}(x-2) + \underbrace{f'_y(2,1)}_{v'_y(2,1)}(y-1) \text{ para } (x,y) \in E((x_o, y_o)) \qquad \text{(I)}$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema podemos aplicar las fórmulas de derivación, es decir:

$$v'_x(2,1) = -\frac{F'_x(A)}{F'_v(A)} = -\frac{3-1}{8} = -\frac{1}{4} \ , \ v'_y(2,1) = -\frac{F'_y(A)}{F'_v(A)} = -\frac{6-2}{8} = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual, reemplazando en (I):

$$f(x,y) \cong 1 - \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{2}(y-1) \text{ para } (x,y) \in E((2,1))$$

Resultando que $\boxed{f(1.98, 0.99) \cong 1 - \frac{1}{4}(1.98-2) - \frac{1}{2}(0.99-1) = 1.01}$.

TEMA 2

1. **Analice** extremos locales (o relativos) de $f(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}z^2 + 2xz + 5$ evaluada en puntos de la superficie de ecuación $\vec{X} = (v, uv, u)$ con $(u,v) \in \Re^2$ **indicando** el/los punto(s) donde se produce(n) extremo(s), el tipo de extremo y el valor del mismo.

Denotando $\vec{g}(u,v) = (v, uv, u)$, se pide analizar extremos locales de:

$$h(u,v) = f(\vec{g}(u,v)) = uv^2 + \tfrac{1}{2}u^2 + 2uv + 5 \text{ con } (u,v) \in \Re^2$$

Dado que $h \in C^2(\Re^2)$ por ser del tipo polinómica, comenzamos determinando los puntos críticos:

$$\begin{cases} h'_u(u,v) = v^2 + u + 2v \\ h'_v(u,v) = 2uv + 2u \end{cases} \to \begin{cases} v^2 + u + 2v = 0 \quad (*) \\ 2uv + 2u = 0 \end{cases} \to 2u\,(v+1) = 0 \to u = 0 \vee v = -1$$

$u = 0 \xrightarrow{(*)} v^2 + 2v = 0 \to v\,(v+2) = 0 \Rightarrow v = 0 \vee v = -2 \to A = (0,0)\,,\; B = (0,-2)$

$v = -1 \xrightarrow{(*)} u - 1 = 0 \Rightarrow u = 1 \to C = (1,-1)$

	$A = (0,\,0)$	$B = (0,\,-2)$	$C = (1,-1)$
$h''_{uu}(u,v) = 1$	1	1	1
$h''_{uv}(u,v) = 2v+2$	2	-2	0
$h''_{vv}(u,v) = 2u$	0	0	2

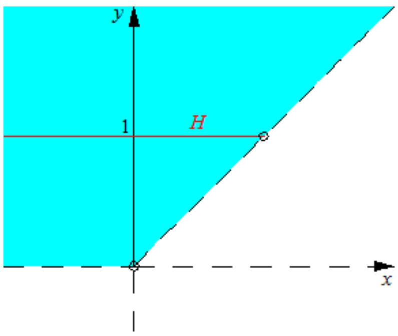
$H(0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow h(0,0)$ no es extremo local.

$H(0,-2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow h(0,-2)$ no es extremo local.

$H(1,-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow h(1,-1) = 9/2$ es extremo local, como $h''_{uu}(1,-1) = 1 > 0$ es mínimo.

Dado que $h(1,-1) = f(-1,-1,1) \Rightarrow$ El único extremo es $\boxed{f(-1,-1,1) = 9/2 \text{, que es mínimo local}}$.

2. Sea $\vec{f} : D \subset \Re^2 \to \Re^2 \;/\; \vec{f}(x,y) = (\ln(y-x), \ln(y^2 - xy))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\vec{f}'_x(x,y) + \vec{f}'_y(x,y) = (0,1)$.



Los puntos de D son aquellos para los cuales:

$$\begin{cases} y > x \\ y^2 - xy > 0 \to y\,(y-x) > 0 \to (y > 0 \wedge y > x) \vee (y < 0 \wedge y < x) \end{cases}$$

Entonces $\boxed{D = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; y > x \wedge y > 0\}}$, que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.

Por otra parte $\vec{f}'_x(x,y) = (\frac{-1}{y-x}, \frac{-y}{y^2 - xy})$ y $\vec{f}'_y(x,y) = (\frac{1}{y-x}, \frac{2y-x}{y^2-xy})$ definidas en D.

De donde $\vec{f}'_x(x,y) + \vec{f}'_y(x,y) = (0, \frac{y-x}{y(y-x)}) = (0, y^{-1})$ en D, luego debe ser $1/y = 1 \Rightarrow y = 1$ en D.

Entonces el conjunto $\boxed{H = \{(x,y) \in D \;/\; y = 1\}}$, que se representa en color rojo en el gráfico.

3. Sea r_o la recta normal a la superficie de ecuación $y = xz^2 + z$ en el punto $(1,2,1)$. **Determine** los puntos en los que r_o interseca a los planos coordenados y **halle** la ecuación de un plano que contenga a dichos puntos y al origen de coordenadas.

Denotando $F(x,y,z) = xz^2 + z - y$ la ecuación de la superficie es $F(x,y,z) = 0$, donde $F \in C^1(\Re^3)$ pues es polinómica, $F(1,2,1) = 0$ y $\nabla F(1,2,1) = (z^2, -1, 2xz+1)]_{(1,2,1)} = (1, -1, 3) \neq \vec{0}$. Entonces dicho vector gradiente es perpendicular a la superficie, de donde, una ecuación para r_o es:

$$\vec{X} = (1,2,1) + \lambda(1,-1,3) \text{ con } \lambda \in \Re, \text{ o bien, } \vec{X} = (1+\lambda,\ 2-\lambda,\ 1+3\lambda) \text{ con } \lambda \in \Re$$

Los puntos en que r_o interseca a los planos coordenados son:

En el plano xy, con $\lambda = -1/3$, $\boxed{\vec{A} = (2/3,\ 7/3,\ 0)}$

En el plano xz, con $\lambda = 2$, $\boxed{\vec{B} = (3,\ 0,\ 7)}$

En el plano yz, con $\lambda = -1$, $\boxed{\vec{C} = (0,\ 3,\ -2)}$

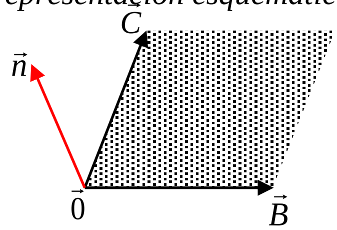
Dado que $\vec{B}, \vec{C}$ y $\vec{0} = (0,0,0)$ deben pertenecer al plano que los contiene, los vectores

$$\vec{B} - \vec{0} = \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{C} - \vec{0} = \vec{C}$$

también pertenecen al plano, con lo cual un vector normal al mismo es:

$$\vec{n} = \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-21, 6, 9)$$

representación esquemática



Entonces una ecuación para el plano buscado es $((x,y,z) - (0,0,0)) \cdot (-21,6,9) = 0$, es decir, el plano que contiene a los cuatro puntos tiene ecuación cartesiana $\boxed{-21x + 6y + 9z = 0}$.

<u>Nota</u>: Es claro que el punto $\vec{A}$, que no fue utilizado, está contenido en el plano (verifíquelo) pues pertenece a la recta r_o que pasa por $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

4. Siendo $f(x,y) = y + \operatorname{sen}(xy)$, **halle** los versores $\breve{r}$ tales que la derivada direccional de f en $A = (0, \sqrt{3})$ según $\breve{r}$ resulte igual al 50% de la máxima derivada direccional en dicho punto.

Siendo $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), 1 + x\cos(xy))$ continuo por tener componentes continuas (composición de polinomio con coseno multiplicada por polinomio + constante), resulta $f \in C^1 \Rightarrow f$ diferenciable en todo punto. Siendo $\nabla f(A) = (\sqrt{3}, 1)$.

La máxima derivada direccional es $f'(A, \breve{r}_{\text{máx}}) = \|\nabla f(A)\| = 2$ con $\breve{r}_{\text{máx}} = \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Ahora buscamos $\breve{r} = (a,b)$ tales que $f'(A, \breve{r}) = \nabla f(A) \cdot \breve{r} = \frac{\|\nabla f(A)\|}{2} = 1$, es decir:

$$f'(A, \breve{r}) = \nabla f(A) \cdot \breve{r} = (\sqrt{3}, 1) \cdot (a,b) = a\sqrt{3} + b = 1, \text{ donde } a^2 + b^2 = 1 \text{ por ser } \breve{r} \text{ un versor}$$

Entonces $[(1-b)/\sqrt{3}]^2 + b^2 = 1 \to 4b^2 - 2b - 2 = 0 \to b_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{2 \pm 6}{8} \Rightarrow b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}$

Con lo cual $a_1 = 0$ y $a_2 = (1 + 1/2)/\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$.

Los versores pedidos son: $\boxed{\breve{r}_1 = (0,1) \text{ y } \breve{r}_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2)}$.

5. **Calcule** una aproximación lineal de $f(0.99, 1.98)$, **verificando** previamente que la ecuación $3xyv + \ln(1+2v-xy) - 6 = 0$ define implícitamente a $v = f(x,y)$ en un entorno de un punto (x_o, y_o) apropiado

Siendo $(x_o, y_o) = (1,2)$ y $A = (1,2,v_o)$, comenzamos viendo si se cumplen las condiciones para que la ecuación dada defina implícitamente a $v = f(x,y)$ en un entorno de (x_o, y_o).
Denotando $F(x,y,v) = 3xyv + \ln(1+2v-xy) - 6$, tenemos que:

- $F(A) = 6v_o + \ln(2v_o - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow v_o = f(1,2) = 1$.
- $\nabla F(x,y,v) = (3yv - \frac{y}{1+2v-xy}, 3xv - \frac{x}{1+2v-xy}, 3xy + \frac{2}{1+2v-xy})$ es continuo en un entorno de A pues sus componentes son continuas (suma de polinomio más cociente de polinomios con denominador no nulo).
- $F'_v(A) = 6 + 2 = 8 \neq 0$.

Como se cumplen las mencionadas condiciones f queda definida, resultando diferenciable en (x_o, y_o). Entonces la expresión para realizar la aproximación lineal solicitada es:

$$f(x,y) \cong f(1,2) + \underbrace{f'_x(1,2)}_{v'_x(1,2)}(x-1) + \underbrace{f'_y(1,2)}_{v'_y(1,2)}(y-2) \text{ para } (x,y) \in E((x_o, y_o)) \qquad \text{(I)}$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema podemos aplicar las fórmulas de derivación, es decir:

$$v'_x(1,2) = -\frac{F'_x(A)}{F'_v(A)} = -\frac{6-2}{8} = -\frac{1}{2}, \quad v'_y(1,2) = -\frac{F'_y(A)}{F'_v(A)} = -\frac{3-1}{8} = -\frac{1}{4}$$

Con lo cual, reemplazando en (I):

$$f(x,y) \cong 1 - \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{4}(y-2) \text{ para } (x,y) \in E((1,2))$$

Resultando que $\boxed{f(0.99, 1.98) \cong 1 - \tfrac{1}{2}(0.99-1) - \tfrac{1}{4}(1.98-2) = 1.01}$.