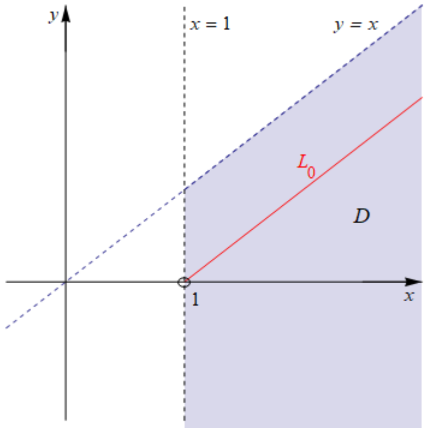
TEMA 1

1. Sea $f:\Re^2 \to \Re \,/\, f(x,y)=\dfrac{\ln(x-y)}{\sqrt{x-1}}$, donde *D* es el dominio natural de la función.

   Determine y **grafique** el dominio *D* y el conjunto de nivel 0 de f . **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de *D*.



Para que los valores de f sean reales debe cumplirse que:

a) $x-y>0 \;\Rightarrow x>y$

b) $x-1>0 \;\Rightarrow x>1$

con lo cual resulta:

$$D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x>y \wedge x>1\}$$

Al conjunto L_0 de nivel 0 pertenecen los puntos del dominio para los cuales $\ln(x-y)=0 \Rightarrow x-y=1$. De donde:

$$L_0=\{(x,y)\in D \,/\; y=x-1\}$$

En la representación gráfica el dominio *D* está sombreado en gris, el conjunto L_0 se indica en rojo.

Un ejemplo de punto frontera de *D* es el $(1{,}0)\notin D$, un ejemplo de punto interior es el $(2{,}0)$.

---

2. Sabiendo que los puntos de la curva de ecuación $\vec{X}=(t^2,\,2t+1,\,4t)$ con $t\in\Re$ pertenecen a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ con $f\in C^1(\Re^2)$, **halle** una aproximación lineal para $f(0.98{,}3.01)$ teniendo en cuenta que $f'_x(1{,}3)=5$.

Dado que $f\in C^1(\Re^2)$ es diferenciable en $\Re^2$ con lo cual, para puntos (x,y) cercanos al $(1{,}3)$, se puede utilizar la siguiente aproximación lineal:

$$f(x,y)\cong f(1{,}3)+f'_x(1{,}3)\,(x-1)+f'_y(1{,}3)\,(y-3) \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, los puntos $\vec{X}$ del espacio xyz que pertenecen a la curva dato son tales que

$$(x,y,z)=(t^2,\,2t+1,\,4t)$$

y pertenecen -por enunciado- a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$, es decir, debe cumplirse que:

$$4t=\underbrace{f(t^2,2t+1)}_{h(t)} \;\text{ con } t\in\Re \qquad \text{(b)}$$

Para obtener $f(1{,}3)$ alcanza con evaluar esta última en $t_0=1$, con ello resulta $\boxed{f(1{,}3)=4}$.

Por otra parte, dado que $h(t)=f(\vec{w}(t))$ donde $\vec{w}(t)=(t^2\,,2t+1)$ siendo $f,\vec{w}$ diferenciables, podemos derivar ambos miembros de (b) obteniendo $4=\nabla f(\vec{w}(t))\cdot\vec{w}'(t)$ con $\vec{w}'(t)=(2t\,,\,2)$.

En particular, para $t_0=1$ se tiene que:

$$4=\nabla f(\vec{w}(1))\cdot\vec{w}'(1)\Rightarrow 4=\nabla f(1{,}3)\cdot(2{,}2)\text{, es decir: } 4=(f'_x(1{,}3),\,f'_y(1{,}3))\cdot(2{,}2)$$

Como por enunciado $f'_x(1{,}3)=5$, de esta última se obtiene que $\boxed{f'_y(1{,}3)=-3}$. Así en (a) queda:

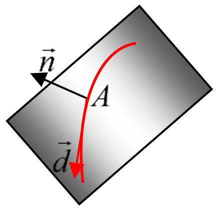
$$f(x,y)\cong 4+5\,(x-1)-3\,(y-3),$$

de donde resulta $f(0.98{,}3.01)\;\cong 4+5\,(0.98-1)-3\,(3.01-3)=3.87$, con lo cual:

$$\boxed{f(0.98{,}3.01)\cong 3.87}$$

Otra forma de obtener $f'_y(1{,}3)$ es mediante la siguiente consideración geométrica.

Dado que la curva está incluida en la superficie, en el punto $A=(1,3,4)$ un vector $\vec{d}$ tangente a la curva debe ser ortogonal a un vector $\vec{n}$ normal a la superficie. Es decir: $\vec{d}\cdot\vec{n}=0$.



Para la curva: $\vec{X}=\underbrace{(t^2,\,2t+1,\,4t)}_{\vec{g}(t)} \Rightarrow \vec{d}=\vec{g}\,'(1)=(2,2,4)$.

Para la superficie: $\underbrace{f(x,y)-z}_{F(x,y,z)}=0 \Rightarrow \vec{n}=\nabla F(1,3,4)=(\underbrace{f'_x(1,3)}_{=5},\; f'_y(1,3),\,-1)$

De donde $(2,2,4)\cdot(5,\; f'_y(1,3),\,-1)=0 \Rightarrow \boxed{f'_y(1,3)=-3}$

---

3. **Analice** si la ecuación $x^2 z+\ln(2x+y+z-6)+yz-10=0$ define implícitamente a la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$ con (x,y) en un entorno del punto $(2,1)$. En caso afirmativo, **estudie** si la recta normal a S en $(2,1,f(2,1))$ tiene algún punto en común con el plano de ecuación $z=y$.

Denotando $F(x,y,z)=x^2 z+\ln(2x+y+z-6)+yz-10$, para que se cumpla que $F(2,1,z_0)=0$ debe ser $4z_0+\ln(5+z_0-6)+z_0=10 \Rightarrow 5z_0+\ln(z_0-1)=10 \Rightarrow z_0=2$.

Si ahora denotamos $A=(2,1,2)$, vemos que se cumplen las siguiente tres propiedades:

- $F(A)=0$, pues así se impuso para determinar z_0.
- $\nabla F(x,y,z)=(2xz+\frac{2}{2x+y+z-6}\,,\;\frac{1}{2x+y+z-6}+z\,,\;x^2+\frac{1}{2x+y+z-6}+y)$ que es continuo en un entorno del punto A, pues cada componente es suma de un polinomio + el cociente de constante dividido polinomio con denominador no nulo.
- $F'_z(A)=6\neq 0$.

con esto se puede afirmar que la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$ con (x,y) en un entorno del punto $(2,1)$, siendo f diferenciable en ese punto.

En estas condiciones la recta normal a S en A está dirigida por $\nabla F(A)=(10,3,6)$, con lo cual una ecuación para dicha recta es $\vec{X}=A+\lambda\nabla F(A)=(2,1,2)+\lambda(10,3,6)$ con $\lambda\in\Re$. Es decir, los puntos $\vec{X}=(x,y,z)$ que pertenece a la recta cumplen con:

$$(x,y,z)=(2+10\lambda\,,1+3\lambda\,,2+6\lambda) \quad \text{con} \quad \lambda\in\Re,$$

para que la recta tenga algún punto en común con el plano de ecuación $y=z$ debe existir algún valor de λ tal que las coordenadas y y z resulten iguales. Es decir, debería cumplirse que:

$$1+3\lambda=2+6\lambda \Rightarrow \lambda=-1/3$$

Para este valor de λ le corresponde el punto $\boxed{(-4/3\,,0\,,0)}$ de la recta, que es el punto que tiene en común con el plano mencionado.

---

4. Sea $p(x,y)$ el polinomio de Taylor de 2º orden que permite aproximar $f(x,y)=6x^2+xy^2$ en un entorno del punto $(1,2)$. **Analice** si p produce extremos locales, en caso afirmativo **indique** en qué punto(s) y cuál es el valor de dicho(s) extremo(s).
Dado que:

$$p(x,y)= f(1,2)+f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2)+ \\ +\tfrac{1}{2}\,[\,f''_{xx}(1,2)(x-1)^2+2\,f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f''_{yy}(1,2)(y-2)^2] \qquad (*)$$

siendo $f(1,2)=10$, $f'_x(1,2)=\left[12x+y^2\right]_{(1,2)}=16$, $f'_y(1,2)=\left[2xy\right]_{(1,2)}=4$, $f''_{xx}(1,2)=\left[12\right]_{(1,2)}=12$, $f''_{xy}(1,2)=\left[2y\right]_{(1,2)}=4$, $f''_{yy}(1,2)=\left[2x\right]_{(1,2)}=2$. Reemplazando en (*) resulta:

$$p(x,y)=10+16(x-1)+4(y-2)+6(x-1)^2+4(x-1)(y-2)+(y-2)^2$$

Buscamos ahora los puntos críticos, siendo p diferenciable, los que ∇p es nulo.

$$\begin{array}{l} p'_x(x,y)=16+12(x-1)+4(y-2) \\ p'_y(x,y)=4+4(x-1)+2(y-2) \end{array} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} 12x+4y-4=0 \\ 4x+2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \; A=(-1,4)$$

Siendo $p\in C^2(\Re^2)$, con $p''_{xx}(-1,4)=12$, $p''_{xy}(-1,4)=4$, $p''_{yy}(-1,4)=2$, el Hessiano en A es:

$$H(-1,4)=\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=8>0 \;\; \Rightarrow \;\; p(-1,4) \text{ es extremo local.}$$

como $p''_{xx}(-1,4)=12>0$, $\boxed{p(-1,4) \text{ es un mínimo local de valor } p(-1,4)=-2}$.

---

5. Sea $h(x,y)=f(x^2,xy)$ siendo $f:\Re^2\to\Re$ una función de clase C^1en $\Re^2$. Sabiendo que $\nabla f(4,2)=(1,3)$, **halle** la dirección para la cual la máxima derivada direccional de h en $(2,1)$ es máxima y **calcule** el valor de dicha derivada.

Se tiene que $h(x,y)=f(\vec g(x,y))$ con $\vec g(x,y)=(x^2,xy)$ con $f,\vec g\in C^1(\Re^2)$, f por enunciado y $\vec g$ por tener componentes polinómicas. Entonces f y $\vec g$ son diferenciables, resultando h diferenciable en $\Re^2$. Por ello, para todo punto A podemos calcular la derivada direccional $h'(A,\breve r)$ mediante:

$$h'(A,\breve r)=\nabla h(A)\cdot \breve r$$

En este caso, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$Dh(A)=Df(\vec g(A))\,Dg(A) \qquad (*)$$

con $A=(2,1)$ resulta $\vec g(A)=(4,2)$ y $D\vec g(2,1)=\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}_{(2,1)}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Los elementos de la matriz jacobiana $Df(4,2)$, por ser f una función escalar, son las componentes de su gradiente, entonces –reemplazando en (*)– queda:

$$\begin{pmatrix} h'_x(A) & h'_y(A) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}$$

de donde resulta $\nabla h(A)=(7\,,6)$.

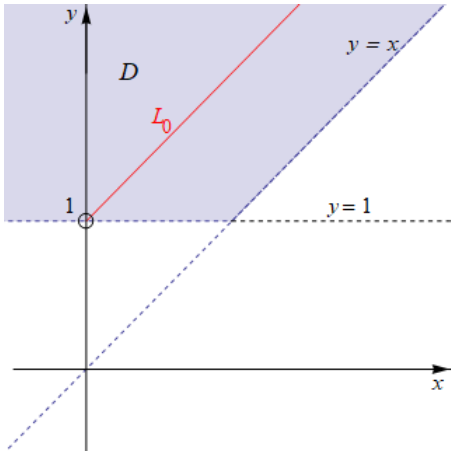
En este caso, h diferenciable con gradiente no nulo, la dirección de máxima derivada direccional es $\breve r_{\text{máx}}=\dfrac{\nabla h(A)}{\|\nabla f(A)\|}$ y el valor de la misma es la norma del gradiente. Entonces la respuesta es:

$$\boxed{\breve r_{\text{máx}}=\left(\frac{7}{\sqrt{85}}\,,\frac{6}{\sqrt{85}}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{f'(A,\breve r_{\text{máx}})=\sqrt{85}}$$

TEMA 2

1. Sea $f : \Re^2 \to \Re \,/\, f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x)}{\sqrt{y-1}}$, donde D es el dominio natural de la función.

   Determine y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f . **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de D.



Para que los valores de f sean reales debe cumplirse que:

c) $y - x > 0 \;\Rightarrow y > x$

d) $y - 1 > 0 \;\Rightarrow y > 1$

con lo cual resulta:

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, y > x \wedge y > 1\}$$

Al conjunto L_0 de nivel 0 pertenecen los puntos del dominio para los cuales $\ln(y-x) = 0 \Rightarrow y - x = 1$. De donde:

$$L_0 = \{(x,y) \in D \,/\; y = x + 1\}$$

En la representación gráfica el dominio D está sombreado en gris, el conjunto L_0 se indica en rojo.

Un ejemplo de punto frontera de D es el $(0{,}1) \notin D$, un ejemplo de punto interior es el $(0{,}2)$.

---

2. Sabiendo que los puntos de la curva de ecuación $\vec{X} = (2t+1\,,\, t^2,\, 4t)$ con $t \in \Re$ pertenecen a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ con $f \in C^1(\Re^2)$, **halle** una aproximación lineal para $f(2.98{,}1.01)$ teniendo en cuenta que $f'_x(3{,}1) = 4$.

   Dado que $f \in C^1(\Re^2)$ es diferenciable en $\Re^2$ con lo cual, para puntos (x,y) cercanos al $(3{,}1)$, se puede utilizar la siguiente aproximación lineal:

$$f(x,y) \cong f(3{,}1) + f'_x(3{,}1)\,(x-3) + f'_y(3{,}1)\,(y-1) \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, los puntos $\vec{X}$ del espacio xyz que pertenecen a la curva dato son tales que

$$(x,y,z) = (2t+1,\, t^2,\, 4t)$$

y pertenecen -por enunciado- a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$, es decir, debe cumplirse que:

$$4t = \underbrace{f(2t+1\,,\, t^2)}_{h(t)} \quad \text{con } t \in \Re \qquad \text{(b)}$$

Para obtener $f(3{,}1)$ alcanza con evaluar esta última en $t_0 = 1$, con ello resulta $f(3{,}1) = 4$.

Por otra parte, dado que $h(t) = f(\vec{w}(t))$ donde $\vec{w}(t) = (2t+1\,,\, t^2)$ siendo $f, \vec{g}$ diferenciables, podemos derivar ambos miembros de (b) obteniendo: $4 = \nabla f(\vec{w}(t)) \cdot \vec{w}\,'(t)$ con $\vec{w}\,'(t) = (2\,,\, 2t)$

En particular, para $t_0 = 1$ se tiene que:

$$4 = \nabla f(\vec{w}(1)) \cdot \vec{w}\,'(1) \Rightarrow 4 = \nabla f(3{,}1) \cdot (2{,}2), \text{ es decir: } 4 = (f'_x(3{,}1),\, f'_y(3{,}1)) \cdot (2{,}2)$$

Como por enunciado $f'_x(3{,}1) = 4$, de esta última se obtiene que $f'_y(3{,}1) = -2$. Así en (a) queda:

$$f(x,y) \cong 4 + 4\,(x-3) - 2\,(y-1),$$

de donde resulta:

$$f(2.98{,}1.01) \;\cong 4 + 4\,(2.98-3) - 2\,(1.01-1) = 3.90$$

$$\boxed{f(0.98{,}3.01) \cong 3.90}$$

En la resolución del “Tema 1” se muestra otra forma de obtener $f'_y(3{,}1)$ mediante una interpretación geométrica.

3. **Analice** si la ecuación $y^2 z + \ln(2y + x + z - 6) + xz - 10 = 0$ define implícitamente a la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$ con (x,y) en un entorno del punto $(1,2)$. En caso afirmativo, **estudie** si la recta normal a S en $(1,2,f(1,2))$ tiene algún punto en común con el plano de ecuación $z = x$.

Denotando $F(x,y,z) = y^2 z + \ln(2y + x + z - 6) + xz - 10$, para que se cumpla que $F(1,2,z_0) = 0$ debe ser $4z_0 + \ln(5 + z_0 - 6) + z_0 = 10 \Rightarrow 5z_0 + \ln(z_0 - 1) = 10 \Rightarrow z_0 = 2$.
Si ahora denotamos $A = (1,2,2)$, vemos que se cumplen las siguiente tres propiedades:

- $F(A) = 0$, pues así se impuso para determinar z_0.
- $\nabla F(x,y,z) = (\frac{1}{2y+x+z-6} + z\ ,\ 2yz + \frac{2}{2y+x+z-6}\ ,\ y^2 + \frac{1}{2y+x+z-6} + x)$ que es continuo en un entorno del punto A pues cada componente es suma de un polinomio $+$ el cociente de constante dividido polinomio con denominador no nulo.
- $F'_z(A) = 6 \neq 0$.

con esto se puede afirmar que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente a la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$ con (x,y) en un entorno del punto $(1,2)$, siendo f diferenciable en ese punto.
En estas condiciones la recta normal a S en A está dirigida por $\nabla F(A) = (3,10,6)$, con lo cual una ecuación para dicha recta es $\vec{X} = A + \lambda \nabla F(A) = (1,2,2) + \lambda(3,10,6)$ con $\lambda \in \Re$. Es decir, los puntos $\vec{X} = (x,y,z)$ que pertenece a la recta cumplen con:

$$(x,y,z) = (1+3\lambda\ ,\ 2+10\lambda\ ,\ 2+6\lambda) \quad \text{con} \quad \lambda \in \Re$$

para que la recta tenga algún punto en común con el plano de ecuación $x = z$ debe existir algún valor de λ tal que las coordenadas x y z resulten iguales. Es decir, debería cumplirse que:

$$1+3\lambda = 2+6\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1/3$$

Para este valor de λ le corresponde el punto $\boxed{(0\ ,-4/3\ ,\ 0)}$ de la recta, que es el punto que tiene en común con el plano mencionado.

---

4. Sea $p(x,y)$ el polinomio de Taylor de 2º orden que permite aproximar $f(x,y) = 6y^2 + yx^2$ en un entorno del punto $(2,1)$. **Analice** si p produce extremos locales, en caso afirmativo **indique** en qué punto(s) y cuál es el valor de dicho(s) extremo(s).
Dado que:

$$\begin{aligned} p(x,y) = {} & f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1) + \\ & + \tfrac{1}{2}\,[\,f''_{xx}(2,1)(x-2)^2 + 2\,f''_{xy}(2,1)(x-2)(y-1) + f''_{yy}(2,1)(y-1)^2\,] \end{aligned} \qquad (*)$$

siendo $f(2,1) = 10$, $f'_x(2,1) = [2xy]_{(2,1)} = 4$, $f'_y(2,1) = [12y + x^2]_{(2,1)} = 16$, $f''_{xx}(2,1) = [2y]_{(2,1)} = 2$, $f''_{xy}(2,1) = [2x]_{(2,1)} = 4$, $f''_{yy}(2,1) = [12]_{(2,1)} = 12$. Reemplazando en (*) resulta:

$$p(x,y) = 10 + 4(x-2) + 16(y-1) + (x-2)^2 + 4(x-2)(y-1) + 6(y-1)^2$$

Buscamos ahora los puntos críticos, siendo p diferenciable, los que ∇p es nulo.

$$\begin{aligned} p'_x(x,y) &= 4 + 2(x-2) + 4(y-1) \\ p'_y(x,y) &= 16 + 4(x-2) + 12(y-1) \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0 \\ 4x + 12y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (4,-1)$$

Siendo $p \in C^2(\Re^2)$ con $p''_{xx}(4,-1) = 2$, $p''_{xy}(4,-1) = 4$, $p''_{yy}(4,-1) = 12$, el Hessiano en A es:

$$H(4,-1) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad p(4,-1) \text{ es extremo local.}$$

como $p''_{xx}(4,-1) = 2 > 0$, $\boxed{p(4,-1) \text{ es un mínimo local de valor } p(4,-1) = -2}$.

5. Sea $h(x,y) = f(x\,y\;,\;y^2)$ siendo $f:\Re^2 \to \Re$ una función de clase C^1en $\Re^2$. Sabiendo que $\nabla f(2,4) = (3,1)$, **halle** la dirección para la cual la máxima derivada direccional de h en $(1,2)$ es máxima y **calcule** el valor de dicha derivada.

Se tiene que $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $\vec{g}(x,y) = (x\,y, y^2)$ con $f,\vec{g} \in C^1(\Re^2)$, f por enunciado y $\vec{g}$ por tener componentes polinómicas. Entonces f y $\vec{g}$ son diferenciables, resultando h diferenciable en $\Re^2$. Por ello, para todo punto A podemos calcular la derivada direccional $h'(A,\breve{r})$ mediante:

$$h'(A,\breve{r}) = \nabla h(A)\cdot\breve{r}$$

En este caso, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$Dh(A) = Df(\vec{g}(A))\,Dg(A) \qquad (*)$$

con $A=(1,2)$ resulta $\vec{g}(A) = (2,4)$ y $D\vec{g}(1,2) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Los elementos de la matriz jacobiana $Df(2,4)$, por ser f una función escalar, son las componentes de su gradiente, entonces –reemplazando en (*)– queda:

$$\begin{pmatrix} h'_x(A) & h'_y(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix}$$

de donde resulta $\nabla h(A) = (6\;,\;7)$.

En este caso, h diferenciable con gradiente no nulo, la dirección de máxima derivada direccional es $\breve{r}_{\text{máx}} = \dfrac{\nabla h(A)}{\|\nabla f(A)\|}$ y el valor de la misma es la norma del gradiente. Entonces la respuesta es:

$$\boxed{\breve{r}_{\text{máx}} = \left(\frac{6}{\sqrt{85}}\,,\,\frac{7}{\sqrt{85}}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{f'(A,\breve{r}_{\text{máx}}) = \sqrt{85}}$$