TEMA 1

1. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv,\, 2u^2+v,\, u-v)$ con $(u,v)\in\Re^2$. **Halle** ecuaciones para la recta normal (n_o) y el plano tangente (π_o) a Σ en el punto $\vec{A} = (2,4,-1)$ y **determine** los puntos de n_o cuya distancia a π_o resulte igual a $2\sqrt{38}$.

Denotando $\vec{F}(u,v) = (uv,\, 2u^2+v,\, u-v)$, primero hallamos (u_o,v_o) tal que $\vec{F}(u_o,v_o) = (2,4,-1)$.

Para ello $\begin{cases} uv = 2 & (a) \\ 2u^2+v = 4 & (b) \\ u-v=-1 & (c) \end{cases}$. De $(a) \to v = 2/u$ que reemplazada en (c) impone $u - 2/u = -1$.

Es decir, $u^2+u-2=0 \to (u=1 \wedge v=2) \vee (u=-2 \wedge v=-1)$. De estas posibilidades la única que cumple con (b) es la primera, luego $(u_o,v_o) = (1,2)$.

Como el (u_o,v_o) es único para el que $\vec{F}(u_o,v_o) = (2,4,-1)$, el punto $\vec{A} = (2,4,-1)$ es simple. Además $\vec{F}$ es diferenciable, por tener componentes polinómicas. Por otra parte,

$$\vec{n}_o = \vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\Big]_{(1,2)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ v & 4u & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(1,2)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5,3,-2) \neq \vec{0}.$$

Con esto podemos afirmar que $\vec{n}_o$ es normal a Σ en $\vec{A}$ y las ecuaciones pedidas son:

$r_o:\ \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{n}_o$ con $\lambda\in\Re$, es decir, $\boxed{r_o:\ \vec{X} = (2-5\lambda, 4+3\lambda, -1-2\lambda) \text{ con } \lambda\in\Re}$.

$\pi_o:\ (\vec{X}-\vec{A})\cdot\vec{n}_o = 0$, es decir, $\boxed{\pi_o:\ -5(x-2)+3(y-4)-2(z+1)=0}$.

Por último, dado $r_o \perp \pi_o$ en $\vec{A}$, la distancia desde un punto $\vec{X}\in r_o$ a π_o es $\|\vec{X}-\vec{A}\| = \|\lambda\vec{n}_o\|$.

Entonces los puntos $\vec{X}\in r_o$ cuya distancia a π_o es igual a $2\sqrt{38}$, son aquellos para los cuales $\sqrt{\lambda^2(25+9+4)} = 2\sqrt{38} \Rightarrow |\lambda| = 2 \Rightarrow \lambda=-2 \vee \lambda = 2$, es decir (reemplazando en la ecuación de la recta), $\boxed{\text{dichos puntos son } (12,-2,3) \text{ y } (-8,10,-5)}$.

2. Sea $f(x,y) = \dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural D. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de nivel 0 de f.

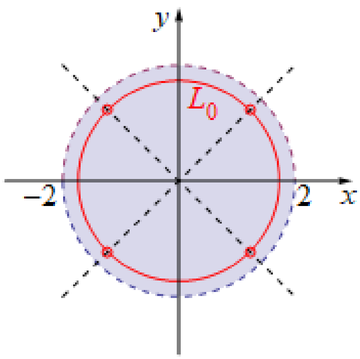
Los puntos $(x,y)\in D$ deben cumplir con:

$$x^2+y^2<4 \text{ y } y^2\neq x^2.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{D = \{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2<4 \wedge y\neq x \wedge y\neq -x\}},$$

que se representa sombreado en el gráfico.



Por su parte el conjunto L_0 de nivel 0 de f contiene a los puntos del dominio para los cuales $f(x,y) = 0$.

Esto se cumple cuando $4-x^2-y^2 = 1$. Así, el conjunto de nivel 0 de f es:

$$\boxed{L_0 = \{(x,y)\in D \,/\, x^2+y^2 = 3\}}$$

el cual se representa en color rojo en la figura.

3. Dada $f:\Re^3 \to \Re \;/\; f(x,y,z) = x\,y - 6z$, **calcule** el máximo absoluto y el mínimo absoluto de los valores de f cuando se la evalúa en puntos del arco de curva definido por la intersección de las superficies de ecuaciones $z^2 = y + 3x^2$ y $z = 2x$ entre los puntos $(-3,9,-6)$ y $(5,25,10)$. **Indique** en qué puntos la función produce dichos valores extremos.

El arco de curva dado admite la ecuación $\vec{X} = \underbrace{(x,\ x^2,\ 2x)}_{\vec{g}(x)}$ con $-3 \le x \le 5$.

Entonces los valores de f en puntos de la curva son $f(\vec{g}(x)) = \underbrace{x^3 - 12x}_{h(x)}$ con $-3 \le x \le 5$.

Dado que h es derivable, comenzamos buscando extremos locales para $-3 < x < 5$ (el interior del intervalo $[-3,5]$) en puntos con derivada nula.

$h'(x) = 3x^2 - 12$. Puntos críticos: $3x^2 - 12 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$.

$$h''(x) = 6x \to \begin{cases} h''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow h(-2) = 16 \text{ es máximo local.} \\ h''(2) = 12 > 0 \Rightarrow h(2) = -16 \text{ es mínimo local.} \end{cases}$$

En los puntos frontera del intervalo resulta: $h(-3) = 9$ y $h(5) = 65$.

Comparando los valores de extremos en el interior y en la frontera se concluye que:

$\boxed{h(2) = f(2,4,4) = -16 \text{ es el mínimo absoluto y } h(5) = f(5,25,10) = 65 \text{ es el máximo absoluto}}$.

4. Siendo $z = f(u)$ con $u = x^2 + 2xy$ resulta $z = h(x,y)$. Sabiendo que f queda definida implícitamente mediante la ecuación $zu + e^{z-2} - 15 = 0$ en un entorno del u_o adecuado, **calcule** una aproximación lineal para $h(1.02, 2.99)$.

Trabajaremos en un entorno de $\vec{A} = (1,3)$, si suponemos que h es diferenciable la expresión para su aproximación lineal es:

$$h(x,y) \cong h(1,3) + h'_x(1,3)\,(x-1) + h'_y(1,3)\,(y-3) \text{ para } (x,y) \in E((1,3)) \qquad \text{(I)}$$

Con $(x_o, y_o) = (1,3)$ corresponde $u_o = 7$. Denotando ahora $F(u,z) = zu + e^{z-2} - 15$ se observa que:

- $F(u_o, z_o) = 7z_o + e^{z_o - 2} - 15 = 0 \Leftrightarrow z_o = 2$.
- $\nabla F(u,z) = (z,\ u + e^{z-2})$ es continuo $\equiv$ $F \in C^1$ en $\Re^2$ (componentes polinómicas o suma de polinomio + composición de polinomio con exponencial).
- $F'_z(u_o, z_o) = F'_z(7,2) = 7 + 1 = 8 \ne 0$.

Con esto se puede afirmar que la ecuación $zu + e^{z-2} - 15 = 0$ define implícitamente a $z = f(u)$ en un entorno de $u_o = 7$, siendo f diferenciable. Con lo cual h es diferenciable en $\vec{A}$ por ser composición de funciones diferenciables: $z = h(x,y) = f(x^2 + 2xy)$.

Para remplazar en (I) corresponde:

- $h(1,3) = z_o = 2$.
- $h'_x(1,3) = \underbrace{f'(u_o)}_{z'(u_o)}\, u'_x(x_o, y_o) = -\dfrac{F'_u(7,2)}{F'_z(7,2)}\,[2x + 2y]_{(1,3)} = -\dfrac{2}{8}\,8 = -2$.
- $h'_y(1,3) = f'(u_o)\, u'_y(x_o, y_o) = -\dfrac{F'_u(7,2)}{F'_z(7,2)}\,[2x]_{(1,3)} = -\dfrac{2}{8}\,2 = -1/2$.

Entonces $h(x,y) \cong 2 - 2\,(x-1) - \frac{1}{2}(y-3) \Rightarrow \boxed{h(1.02, 2.99) \cong 2 - 2\,(0.02) - \frac{1}{2}(-0.01) = 1.965}$.

5. Sabiendo que $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+2y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y que $f(0,0) = 0$, **verifique** que f admite derivada direccional en toda dirección en $(0,0)$ y **determine** los versores para los que dicha derivada resulta nula.

Considerando el versor genérico $\breve{r} = (u,v)$ con $u^2 + v^2 = 1$, planteamos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(u,v)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hv)-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(hu)^2\, hv}{(hu)^2 + 2(hv)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 u^2 v}{h^2(u^2+2v^2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u^2 v}{1+v^2} = \frac{u^2 v}{1+v^2}$$

Dado que el límite existe y es finito, por definición la función tiene derivada direccional en el origen en toda dirección, su valor es:

$$\boxed{f'((0,0),\breve{r}) = \frac{u^2 v}{1+v^2} \quad \forall \breve{r} = (u,v) \in \Re^2}$$

Dicha derivada es nula cuando $\dfrac{u^2 v}{1+v^2} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$. Dado que $u^2 + v^2 = 1$, los versores según los cuales la derivada resulta nula son los siguientes: $\boxed{(0,-1)\ ,\ (0,1)\ ,\ (-1,0)\ \text{y}\ (1,0)}$.