1. Siendo $f:\Re^3 \to \Re$ / $f(x,y,z)=e^{(2x^2+y^2+z^2-7)}$, **analice** si la recta normal al conjunto de nivel 1 de $f$ en $(1,2,1)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $x=3z$.

La ecuación del conjunto $L_1$ de nivel 1 es $e^{(2x^2+y^2+z^2-7)}=1$, es decir:

$$\underbrace{2x^2+y^2+z^2-7}_{F(x,y,z)}=0$$

Como $F\in C^1(\Re^3)$, por ser polinómica, $F(1,2,1)=0$ y

$$\vec{n}=\nabla F(1,2,1)=(4x,2y,2z)_{(1,2,1)}=(4,4,2)\neq\vec{0}$$

$\vec{n}$ es un vector director de la recta normal a $L_1$. La ecuación de dicha recta es:

$$\vec{X}=(1,2,1)+\lambda(4,4,2) \quad \text{con } \lambda\in\Re$$

es decir, los puntos $\vec{X}=(x,y,z)$ de la recta deben cumplir con:

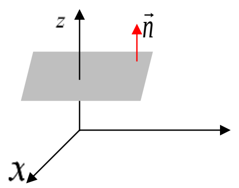
$$\vec{X}=(1+4\lambda\,,\,2+4\lambda\,,\,1+2\lambda) \quad \text{con } \lambda\in\Re$$

La recta tendrá un punto en común con el plano de ecuación $x=3z$ si existe un valor de $\lambda$ para el cual $1+4\lambda=3(1+2\lambda) \Rightarrow 2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-1$. Reemplazando en la ecuación de la recta se obtiene el punto $\boxed{(-3,-2,-1)}$ donde la recta interseca al plano (este punto pertenece a la recta y al plano).

---

2. Dada la superficie $\Sigma$ de ecuación $z=x^3y-3x^2y+y^2+4$ con $(x,y)\in\Re^2$, **halle** los puntos de $\Sigma$ donde el plano tangente es horizontal (paralelo al plano $xy$) y **analice** si dichos puntos son colineales (pertenecen a la misma recta).

Como se observa en el esquema, siendo el plano paralelo al $xy$, un vector normal $\vec{n}$ debe ser paralelo al versor $\breve{k}=(0,0,1)$.




Puesta $\Sigma$ en forma implícita resulta la ecuación:

$$\underbrace{x^3y-3x^2y+y^2+4-z}_{F(x,y,z)}=0$$

Con $\nabla F(x,y,z)=(3x^2y-6xy\,,\,x^3-3x^2+2y\,,\,-1)\neq\vec{0}$ y continuo en $\Re^3$, luego $\nabla F$ es normal a la superficie en todo punto de la misma. Así, los puntos $(x,y,z)\in\Sigma$ que buscamos deben cumplir con:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \text{ es decir: } z=x^3y-3x^2y+y^2+4 \\ (3x^2y-6xy\,,\,x^3-3x^2+2y\,,\,-1)=c\,(0,0,1) \text{ con } c\neq 0 \end{cases}$$

En la 2º con $c=-1$ surgen $\begin{cases} 3x^2y-6xy = 0 \Rightarrow 3xy\,(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2 \vee y=0 \\ x^3-3x^2+2y = 0 \quad (*) \end{cases}$

Teniendo en cuenta lo obtenido de la primera ecuación y reemplazando en $(*)$ resulta:

$$\begin{cases} \text{con } x=0 \xrightarrow{\text{en } (*)} 2y=0 \Rightarrow y=0 \quad (a) \\ \text{con } x=2 \xrightarrow{\text{en } (*)} 8-12+2y=0 \Rightarrow y=2 \quad (b) \\ \text{con } y=0 \xrightarrow{\text{en } (*)} x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=3 \quad (c) \end{cases}$$

$(a)$: $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow A=(0,0,4)\in\Sigma$
$(b)$: $x=2,\ y=2 \Rightarrow z=0 \Rightarrow B=(2,2,0)\in\Sigma$
$(c)$: $x=3,\ y=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow C=(3,0,4)\in\Sigma$

Estos son los tres puntos en los que $\Sigma$ tiene plano tangente horizontal. $A\in\Sigma$ también surge de $(c)$

| |
|---|
| Los puntos $A, B$ y $C$ <u>no están alineados</u>, pues la recta que contiene a $A$ y $C$ está incluida en el plano de ecuación $z=4$ mientras que el punto $B$ no pertenece a dicho plano. |

3. Sea $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $f, g \in C^1(\Re^2)$. Sabiendo que el punto $(1\,,2\,,7)$ pertenece a la gráfica de $h$, que $\vec{g}(x,y) = (x^2y\,,\,2x - y)$ y que $\nabla h(1,2) = (4\,,\,4)$, **calcule** una aproximación lineal para $f(1.98\,,\,0.01)$.

Siendo $f, g \in C^1(\Re^2)$ ambas son diferenciables por lo que $h$ también es diferenciable. Suponiendo $f$ con variables $u$ y $v$, una fórmula de aproximación lineal para $f(u,v)$ alrededor del punto $(2,0)$ es:

$$f(u,v) \cong f(2,0) + f'_u(2,0)\,(u-2) + f'_v(2,0)\,(v-0) \qquad (*)$$

Por otra parte, aplicando la regla de la cadena, resulta:

$$Dh(1,2) = Df(\vec{g}(1,2))\, D\vec{g}(1,2)$$

$$(h'_x(1,2)\;\; h'_y(1,2)) = Df(2,0)\, D\vec{g}(1,2)$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(1,2) & h'_y(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u(2,0) & f'_v(2,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{(1,2)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u(2,0) & f'_v(2,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{(1,2)}$$

De donde, operando resulta: $\begin{cases} 4\;f'_u(2,0) + 2\;f'_v(2,0) = 4 \\ \;\;\,f'_u(2,0) - \;\;\,f'_v(2,0) = 4 \end{cases} \Rightarrow f'_u(2,0) = 2\;,\quad f'_v(2,0) = -2\,.$

Además, como $(1,2,7)$ pertenece a la gráfica de $h$, debe ser:

$$h(1,2) = f(\vec{g}(1.2)) = 7 \text{ , es decir, } f(2,0) = 7$$

Reemplazando lo obtenido en (*) se tiene que:

$$f(u,v) \cong 7 + 2\,(u-2) - 2\,v \quad \Rightarrow \quad f(1.98\,,\,0.01) \cong 7 + 2\,(1.98 - 2) - 2\;0.01$$

con lo cual resulta: $\boxed{f(1.98\,,\,0.01) \cong 6.94}$ .

4. **Analice** si la intersección de las superficies $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ de ecuaciones:

$$\Sigma_1 \;:\; z = 2y^2 - x^2$$
$$\Sigma_2 \;:\; x\ln(yz) + y\ln(xz) = z - 1$$

define una curva $C$ en un entorno del punto $A = (1,1,1)$. En caso afirmativo, **determine** si existe algún punto en el que la recta tangente a $C$ en $A$ interseca al eje $x$.

Comenzamos expresando la curva como la intersección de las dos superficies expresadas en forma implícita, es decir:

$$\begin{cases} \overbrace{2y^2 - x^2 - z}^{F(x,y,z)} = 0 \\ \underbrace{x\ln(yz) + y\ln(xz) - z + 1}_{G(x,y,z)} = 0 \end{cases}$$

Ahora vemos si se cumplen las siguientes tres propiedades: en $A$ se cumplen ambas ecuaciones, los gradientes de $F$ y $G$ son continuos en un entorno de $A$ y el productos vectorial $\nabla F(A) \times \nabla G(A) \neq \vec{0}$.

- $F(A) = 2 - 1 - 1 = 0$ y $G(A) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$, se cumplen.
- $\nabla F(x,y,z) = (-2x\,,\,4y\,,\,-1)$
  $\nabla G(x,y,z) = \left(\ln(yz) + \dfrac{yz}{xz}\,,\, \dfrac{xz}{yz} + \ln(xz)\,,\, \dfrac{xy}{yz} + \dfrac{yx}{xz} - 1\right)$. Ambos continuos en un entorno de $A$.
- $\vec{d} = \nabla F(A) \times \nabla G(A) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5\,,1\,,-6) \neq \vec{0}$, se cumple.

Como se cumplen las tres propiedades se puede afirmar que la intersección de las dos superficies define una curva $C$ en un entorno del punto $A=(1,1,1)$. Es más, la curva es regular en $A$ y el vector $\vec{d}$ calculado para verificar la 3º propiedad es un vector director de la recta tangente a $C$ en $A$.
Entonces, una ecuación para dicha recta es:

$$\vec{X}=(1,1,1)+\lambda\,(5\,,1\,,-6)\ \text{ con } \lambda\in\Re$$

Es decir, los puntos $\vec{X}=(x,y,z)$ que pertenecen a la recta son tales que:

$$(x\,,\,y\,,\,z)=(1+5\lambda\,,1+\lambda\,,1-6\lambda)\ \text{ con } \lambda\in\Re$$

Si la recta tuviera algún punto en común con el eje $x$, de puntos $(x_0\,,0\,,0)$, debería existir un valor de $\lambda$ para el cual resulten $\begin{cases}1+\lambda=0\\1-6\lambda=0\end{cases}$. De la primera ecuación surge $\lambda=-1$, pero este valor no satisface a la segunda. $\boxed{\text{Por ello se concluye que la recta \underline{no interseca} al eje } x}$.

5. Sea $f:D\subset\Re^2\to\Re\ /\ f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln(y-x)}$, donde $D$ es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio $D$ y el conjunto de nivel $0$ de $f$. **Indique** un ejemplo de punto exterior y otro de punto frontera de $D$.

Para que los valores de $f$ sean reales debe cumplirse que:

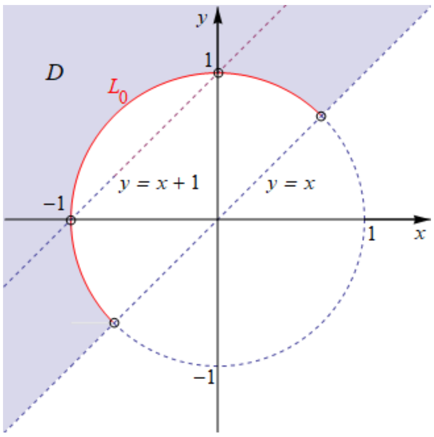
a) $x^2+y^2-1\geq 0 \ \Rightarrow\ x^2+y^2\geq 1$

b) $y-x>0 \ \Rightarrow\ y>x$

c) $y-x\neq 1 \ \Rightarrow\ y\neq x+1$

con lo cual resulta:

$$D=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2\geq 1\wedge y>x\wedge y\neq x+1\}$$




Al conjunto $L_0$ de nivel 0 pertenecen los puntos del dominio para los cuales $\sqrt{x^2+y^2-1}=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2=1$.

De donde: $L_0=\{(x,y)\in D\ /\ x^2+y^2=1\}$.

En la representación gráfica el dominio $D$ está sombreado en gris, el conjunto $L_0\subset D$ se indica en rojo. Un ejemplo de punto exterior a $D$ es el $(0,0)$, un ejemplo de punto frontera de $D$ es el $(0,1)\notin D$.