TEMA 1

1. Siendo $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3xy^2$ con $(x,y) \in \Re^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinante hessiano $H(x,y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor.
Nota: interprétese "determinante hessiano" o bien "determinante de la matriz hessiana".

Las derivadas de f son: $f'_x(x,y) = 3x^2 - 6y + 3y^2$, $f'_y(x,y) = -6x + 6xy$,

$$f''_{xx}(x,y) = 6x \ , \ f''_{xy}(x,y) = -6+6y \ , \ f''_{yy}(x,y) = 6x$$

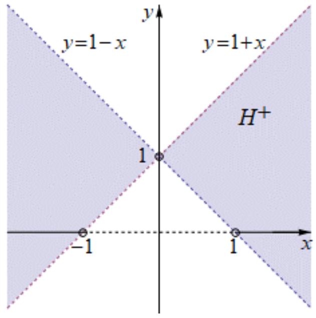
De donde $H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -6+6y \\ -6+6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - (6y-6)^2$.

El hessiano $H(x,y) > 0$ cuando:

$$36\ x^2 > (6y-6)^2 \iff |x| > |y-1| \ ,$$

entonces:

$$\boxed{H^+ = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ |x| > |y-1|\}}.$$



que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.
Dado que $f \in C^2$, por ser polinómica, para que la función produzca extremo local es necesario que ambas derivadas parciales de primer orden resulten nulas, es decir:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y + 3y^2 = 0 & (*) \\ -6x + 6xy = 0 & \rightarrow 6x(y-1) = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$

Con $x = 0 \xrightarrow{(*)} -6y + 3y^2 = 0 \rightarrow 3y\,(-2+y) = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow P_1 = (0,0) \notin H^+ \\ y = 2 \rightarrow P_2 = (0,2) \notin H^+ \end{cases}$

Con $y = 1 \xrightarrow{(*)} 3x^2 - 6 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow P_3 = (1,1) \in H^+ \\ x = -1 \rightarrow P_4 = (-1,1) \in H^+ \end{cases}$

Los únicos puntos estacionarios de H^+ son $P_3 = (1,1)$ y $P_4 = (-1,1)$; como en ellos el hessiano es positivo, la función produce extremo local.

Dado que $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, $\boxed{f(1,1) = -2 \text{ es un mínimo local}}$.

Dado que $f''_{xx}(-1,1) = -6 < 0$, $\boxed{f(-1,1) = 2 \text{ es un máximo local}}$.

---

2. Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x^3 + xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **Analice** si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x para todo $(x,y) \in \Re^2$.

Aplicando regla práctica: $\boxed{f'_x(x,y) = \dfrac{\cos(2x^3+xy)(6x^2+y)(x^2+y^2) - \operatorname{sen}(2x^3+xy)\,2x}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)}$

Para $(x,y) = (0,0)$, analizamos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(2h^3)}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h^3)}{h^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h^3)\,6h^2}{3h^2} = \lim_{h\to 0} (2\cos(2h^3)) = 2$$

Como el límite existe y es finito, por definición su valor es el de la derivada parcial respecto de x en el origen. Es decir, $f'_x(0,0) = 2$. Con lo cual, $\boxed{\text{queda definida } f'_x \text{ para todo } (x,y) \in \Re^2}$.

---

3. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x\,y + e^{u\,z-2} + z - 4 = 0 \\ x\,z + e^{y\,z-2} + 2\,y - 5 = 0 \end{cases}$ se cumple en $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,2,1)$.

Verifique que dicho sistema define implícitamente $z = f(x,y)$ y $u = g(x,y)$ en un entorno de $(1,1)$ y **halle** una ecuación para el plano tangente a la superficie Σ de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,1,f(1,1))$.

Dado que el sistema es de dos ecuaciones y se desea que las variables independientes sea x e y, las dependientes serán u y z.

Denotando $F(x,y,z,u) = x\,y + e^{u\,z-2} + z - 4$ y $G(x,y,z,u) = x\,z + e^{y\,z-2} + 2\,y - 5$, veamos si se cumplen las siguientes tres propiedades:

- $\begin{cases} F(1,1,2,1) = 1 + e^0 + 2 - 4 = 0 \\ G(1,1,2,1) = 2 + e^0 + 2 - 5 = 0 \end{cases}$, se cumplen, tal como se indica en el enunciado.

- $\begin{cases} \nabla F(x,y,z,u) = (\,y\,,\,x\,,\,u\,e^{u\,z-2} + 1\,,\,z\,e^{u\,z-2}\,) \\ \nabla G(x,y,z,u) = (\,z\,,\,z\,e^{y\,z-2} + 2\,,\,x + y\,e^{y\,z-2}\,,\,0\,) \end{cases}$

  Ambos gradientes son continuos en $\Re^4$, es decir $F, G \in C^1(\Re^4)$, por tener componentes polinómicas o con producto de funciones continuas (polinómica compuesta con exponencial) y suma de continuas. Se cumple $F, G \in C^1$ en un entorno de $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,2,1)$.

- $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, se cumple.

Con lo cual se puede afirmar que el sistema dado define implícitamente $z = f(x,y)$ y $u = g(x,y)$, siendo ambas diferenciables en el punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

En particular, la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ admite plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$ cuya ecuación es:

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)\,(x-1) + f'_y(1,1)\,(y-1) \qquad (*)$$

donde $f(1,1) = z_0 = 2$, y las derivadas son:

$$f'_x(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-4}{-4} = -1\,.$$

$$f'_y(1,1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-8}{-4} = -2\,.$$

Con lo cual, reemplazando en (*), una ecuación del plano tangente es $\boxed{z = 2 - (x-1) - 2\,(y-1)}$.

4. Dada $h(x,y) = f(x^2 - y^2)$ con $f \in C^1(\Re)$, **calcule** una aproximación lineal para $h(2.02, 0.99)$ sabiendo que la curva de ecuación $v = u^2 + f(u^2 - 1)$ del plano uv tiene recta tangente horizontal (paralela al eje u) en el punto $(2,5)$.

Considerando el punto $A = (2,1)$, la expresión para aproximar los valores de h en un entorno de A es:

$$h(x,y) \cong h(A) + h'_x(A)(x-2) + h'_y(A)(y-1) \qquad (*)$$

donde $h(A) = f(3)$ y $\begin{cases} h'_x(A) = [f'(x^2-y^2)\,2x]_{(2,1)} = 4f'(3) \\ h'_y(A) = [f'(x^2-y^2)\,(-2y)]_{(2,1)} = -2f'(3) \end{cases}$

Por enunciado, la curva de ecuación $v = \underbrace{u^2 + f(u^2-1)}_{w(u)}$ tiene pendiente nula en el punto $(2,5)$, luego:

$w(2) = 4 + f(3) = 5 \;\Rightarrow\; f(3) = 1 \;\Rightarrow\; h(A) = 1$

$w'(2) = [2u + f'(u^2-1)2u]_{u=2} = 0 \;\Rightarrow\; 4 + 4f''(3) = 0 \;\Rightarrow\; f'(3) = -1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} h'_x(A) = -4 \\ h'_y(A) = 2 \end{cases}$

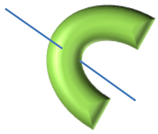
Reemplazando entonces en (*) se tiene: $h(x,y) \cong 1 - 4(x-2) + 2(y-1)$, con lo cual:

$$h(2.02, 0.99) \cong 1 - 4(2.02-2) + 2(0.99-1) = 0.90.\ \boxed{\text{Es decir, } h(2.02,0.99) \cong 0.90}.$$

---

5. **Halle** el punto (x_0, y_0, z_0) donde la recta definida por la intersección de los planos de ecuaciones $x - y + z = 7$ y $2y - x + 3z = 18$ es normal a la superficie de ecuación $z = x + yx^2$.

El sistema $\begin{cases} \overbrace{x - y + z - 7}^{F(x,y,z)} = 0 \\ \underbrace{2y - x + 3z - 18}_{G(x,y,z)} = 0 \end{cases}$ define a la recta como intersección de dos superficies planas. Siendo $F, G \in C^1$ por ser polinómicas, un vector director de la recta en cada uno de sus puntos es:



$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5, -4, 1)$$

Por su parte, la superficie puede expresarse $\underbrace{x + yx^2 - z}_{H(x,y,z)} = 0$, de donde, en cada punto de la misma un vector normal es $\nabla H(x,y,z) = (1 + 2xy\,,\ x^2\,,\ -1)$ que –como vemos– es continuo y no nulo.
Para que se cumpla la perpendicularidad buscada, es necesario que el director de la recta resulte paralelo al normal a la superficie, es decir, $(1 + 2xy\,,\ x^2\,,\ -1) = k\,(-5, -4, 1)$.

Entonces debe ser $k = -1$ y $\begin{cases} 1 + 2xy = 5 \quad (*) \\ \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow\ x = -2 \ \vee\ x = 2 \end{cases}$

Con $x = -2 \xrightarrow{(*)} 1 - 4y = 5 \Rightarrow y = -1 \xrightarrow{z = x + yx^2} z = -6 \Rightarrow P_1 = (-2, -1, -6)$.

Con $x = 2 \xrightarrow{(*)} 1 + 4y = 5 \Rightarrow y = 1 \xrightarrow{z = x + yx^2} z = 6 \Rightarrow P_2 = (2, 1, 6)$.

Si bien ambos puntos pertenecen a la superficie, por simple reemplazo se observa que sólo el punto P_2 también pertenece a la recta (se busca el punto en que la recta -pertenece a la recta- interseca ortogonalmente a la superficie).

Luego $\boxed{\text{el punto buscado es } (x_0, y_0, z_0) = (2,1,6)}$.

TEMA 2

1. Siendo $f(x,y)=y^3-6xy+3yx^2$ con $(x,y)\in\Re^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinante hessiano $H(x,y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor.
Nota: interprétese "determinante hessiano" o bien "determinante de la matriz hessiana".

Las derivadas de f son: $f'_x(x,y)=-6y+6xy$, $f'_y(x,y)=3y^2-6x+3x^2$,

$$f''_{xx}(x,y)=6y\ ,\quad f''_{xy}(x,y)=-6+6x\ ,\quad f''_{yy}(x,y)=6y$$

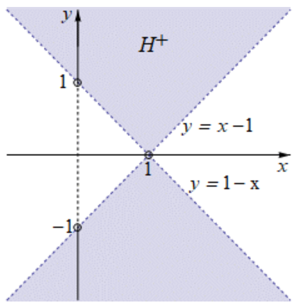
De donde $H(x,y)=\begin{vmatrix} 6y & -6+6x \\ -6+6x & 6y \end{vmatrix}=36y^2-(6x-6)^2$.

El hessiano $H(x,y)>0$ cuando:

$$36y^2>(6x-6)^2 \iff |y|>|x-1|\ ,$$

entonces:

$$\boxed{H^+=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ |y|>|x-1|\}}.$$



que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.

Dado que $f\in C^2$, por ser polinómica, para que la función produzca extremo local es necesario que ambas derivadas parciales de primer orden resulten nulas, es decir:

$$\begin{cases} -6y+6xy=0 & \to 6y\,(x-1)=0 \to x=1 \vee y=0 \\ 3y^2-6x+3x^2=0 & (*) \end{cases}$$

Con $y=0 \xrightarrow{(*)} -6x+3x^2=0 \to 3x\,(-2+x)=0 \to \begin{cases} x=0 \to P_1=(0,0)\notin H^+ \\ x=2 \to P_2=(2,0)\notin H^+ \end{cases}$

Con $x=1 \xrightarrow{(*)} 3y^2-6+3=0 \to y^2=1 \to \begin{cases} y=1 \to P_3=(1,1)\in H^+ \\ y=-1 \to P_4=(1,-1)\in H^+ \end{cases}$

Los únicos puntos estacionarios de H^+ son $P_3=(1,1)$ y $P_4=(1,-1)$; como en ellos el hessiano es positivo, la función produce extremo local.

Dado que $f''_{xx}(1,1)=6>0$, $\boxed{f(1,1)=-2 \text{ es un mínimo local}}$.

Dado que $f''_{xx}(1,-1)=-6<0$, $\boxed{f(1,-1)=2 \text{ es un máximo local}}$.

---

2. Dada $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}(2y^3+xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **Analice** si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable y para todo $(x,y)\in\Re^2$.

Aplicando regla práctica: $\boxed{f'_y(x,y)=\dfrac{\cos(2y^3+xy)(6y^2+x)(x^2+y^2)-\text{sen}(2y^3+xy)\,2y}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)}$

Para $(x,y)=(0,0)$, analizamos:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\text{sen}(2h^3)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\text{sen}(2h^3)}{h^3}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{h\to0}\frac{\cos(2h^3)\,6h^2}{3h^2}=\lim_{h\to0}\,(2\cos(2h^3))=2$$

Como el límite existe y es finito, por definición su valor es el de la derivada parcial respecto de y en el origen. Es decir, $f'_y(0,0)=2$. Con lo cual, $\boxed{\text{queda definida } f'_y \text{ para todo } (x,y)\in\Re^2}$.

---

3. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x\,y + e^{u\,z-2} + z - 4 = 0 \\ y\,z + e^{x\,z-2} + 2\,x - 5 = 0 \end{cases}$ se cumple en $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,2,1)$.

   Verifique que dicho sistema define implícitamente $z = f(x,y)$ y $u = g(x,y)$ en un entorno de $(1,1)$ y **halle** una ecuación para el plano tangente a la superficie Σ de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,1, f(1,1))$.

Dado que el sistema es de dos ecuaciones y se desea que las variables independientes sea x e y, las dependientes serán u y z.

Denotando $F(x,y,z,u) = x\,y + e^{u\,z-2} + z - 4$ y $G(x,y,z,u) = y\,z + e^{x\,z-2} + 2\,x - 5$, veamos si se cumplen las siguientes tres propiedades:

- $\begin{cases} F(1,1,2,1) = 1 + e^0 + 2 - 4 = 0 \\ G(1,1,2,1) = 2 + e^0 + 2 - 5 = 0 \end{cases}$, se cumplen, tal como se indica en el enunciado.

- $\begin{cases} \nabla F(x,y,z,u) = (\,y\ ,\ x\ ,\ u\,e^{u\,z-2} + 1\ ,\ z\,e^{u\,z-2}\,) \\ \nabla G(x,y,z,u) = (\,z\,e^{x\,z-2} + 2\ ,\ z\ ,\ y + x\,e^{x\,z-2}\ ,\ 0\,) \end{cases}$

  Ambos gradientes son continuos en $\Re^4$, es decir $F, G \in C^1(\Re^4)$, por tener componentes polinómicas o con producto de funciones continuas (polinómica compuesta con exponencial) y suma de continuas. Se cumple $F, G \in C^1$ en un entorno de $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,2,1)$.

- $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, se cumple.

Con lo cual se puede afirmar que el sistema dado define implícitamente $z = f(x,y)$ y $u = g(x,y)$, siendo ambas diferenciables en el punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

En particular, la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ admite plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$ cuya ecuación es:

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) \qquad (*)$$

donde $f(1,1) = z_0 = 2$, y las derivadas son:

$$f'_x(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-8}{-4} = -2\ .$$

$$f'_y(1,1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}(1,1,2,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}(1,1,2,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{-4}{-4} = -1\ .$$

Con lo cual, reemplazando en (*), una ecuación del plano tangente es $\boxed{z = 2 - 2\,(x-1) - (y-1)}$.

4. Dada $h(x,y) = f(y^2 - x^2)$ con $f \in C^1(\Re)$, **calcule** una aproximación lineal para $h(0.99, 2.02)$ sabiendo que la curva de ecuación $v = u^2 + f(2u^2+1)$ del plano uv tiene recta tangente horizontal (paralela al eje u) en el punto $(1,4)$.

Considerando el punto $A = (1,2)$, la expresión para aproximar los valores de h en un entorno de A es:

$$h(x,y) \cong h(A) + h'_x(A)(x-1) + h'_y(A)(y-2) \qquad (*)$$

donde $h(A) = f(3)$ y $\begin{cases} h'_x(A) = [f'(y^2-x^2)\,(-2x)]_{(1,2)} = -2\,f'(3) \\ h'_y(A) = [f'(y^2-x^2)\,(2y)]_{(1,2)} = 4\,f'(3) \end{cases}$

Por enunciado, la curva de ecuación $v = \underbrace{u^2 + f(2u^2+1)}_{w(u)}$ tiene pendiente nula en el punto $(1,4)$, luego:

$$w(1) = 1 + f(3) = 4 \;\Rightarrow\; f(3) = 3 \;\Rightarrow\; h(A) = 3$$

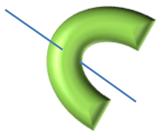
$$w'(1) = [2u + f'(2u^2+1)4u]_{u=1} = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 4f'(3) = 0 \;\Rightarrow\; f'(3) = -1/2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} h'_x(A) = 1 \\ h'_y(A) = -2 \end{cases}$$

Reemplazando entonces en (*) se tiene: $h(x,y) \cong 3 + (x-1) - 2(y-2)$, con lo cual:

$h(0.99, 2.02) \cong 3 + (0.99-1) - 2(2.02-2) = 2.95$. $\boxed{\text{Es decir: } h(0.99, 2.02) \cong 2.95}$.

5. **Halle** el punto (x_0, y_0, z_0) donde la recta definida por la intersección de los planos de ecuaciones $y - x + z = 7$ y $2x - y + 3z = 18$ es normal a la superficie de ecuación $z = y + xy^2$.

El sistema $\begin{cases} \overbrace{y - x + z - 7}^{F(x,y,z)} = 0 \\ \underbrace{2x - y + 3z - 18}_{G(x,y,z)} = 0 \end{cases}$ define a la recta como intersección de dos superficies planas. Siendo $F, G \in C^1$ por ser polinómicas, un vector director de la recta en cada uno de sus puntos es:



$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, 5, -1)$$

Por su parte, la superficie puede expresarse $\underbrace{y + xy^2 - z}_{H(x,y,z)} = 0$, de donde, en cada punto de la misma un vector normal es $\nabla H(x,y,z) = (y^2, 1+2xy, -1)$ que –como vemos– es continuo y no nulo.
Para que se cumpla la perpendicularidad buscada, es necesario que el director de la recta resulte paralelo al normal a la superficie, es decir, $(y^2, 1+2xy, -1) = k\,(4, 5, -1)$.

Entonces debe ser $k = 1$ y $\begin{cases} 1 + 2xy = 5 \quad (*) \\ y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y = -2 \;\vee\; y = 2 \end{cases}$

Con $y = -2 \xrightarrow{(*)} 1 - 4x = 5 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{z = y + xy^2} z = -6 \Rightarrow P_1 = (-1, -2, -6)$.

Con $y = 2 \xrightarrow{(*)} 1 + 4x = 5 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{z = y + xy^2} z = 6 \Rightarrow P_2 = (1, 2, 6)$.

Si bien ambos puntos pertenecen a la superficie, por simple reemplazo se observa que sólo el punto P_2 también pertenece a la recta (se busca el punto en que la recta -pertenece a la recta- interseca ortogonalmente a la superficie).

Luego $\boxed{\text{el punto buscado es } (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 6)}$.