1. Dada $f(x,y)=x^3y-3xy+y^2$ definida en $\Re^2$, **analice** si f produce extremos locales (o relativos) indicando en cada caso el **tipo de extremo**, **su valor** y **el punto** en el que se produce.

Dado que $f\in C^2$ por ser polinómica, podemos aplicar el siguiente procedimiento.

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2y-3y \\ f'_y(x,y)=x^3-3x+2y \end{cases}.$$

$$\text{Puntos críticos: } \begin{cases} 3x^2y-3y=0 & \to 3y(x^2-1)=0\to x=-1\vee x=1\vee y=0 \\ x^3-3x+2y=0 & (*) \end{cases}$$

$$x=-1\xrightarrow{(*)}-1+3+2y=0\to y=-1\to(-1,-1)$$

$$x=1\xrightarrow{(*)}1-3+2y=0\to y=1\to(1,1)$$

$$y=0\xrightarrow{(*)}x^3-3x=0\to x(x^2-3)=0\to x=0\vee x=-\sqrt{3}\vee x=\sqrt{3}\to\begin{cases}(0,0)\\(-\sqrt{3},0)\\(\sqrt{3},0)\end{cases}$$

	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(-\sqrt{3},0)$	$(\sqrt{3},0)$
$f''_{xx}(x,y)=6xy$	6	6	0	0	0
$f''_{xy}(x,y)=3x^2-3$	0	0	-3	6	6
$f''_{yy}(x,y)=2$	2	2	2	2	2

$$H(-1,-1)=\begin{vmatrix}6&0\\0&2\end{vmatrix}=12>0\quad f''_{xx}(-1,-1)=6>0\Rightarrow\boxed{f(-1,-1)=-1\text{ es mínimo local}}.$$

$$H(1,1)=\begin{vmatrix}6&0\\0&2\end{vmatrix}=12>0,\ f''_{xx}(1,1)=6>0\ \Rightarrow\boxed{f(1,1)=-1\text{ es mínimo local}}.$$

$H(0,0)=\begin{vmatrix}0&-3\\-3&2\end{vmatrix}=-9<0\Rightarrow f(0,0)$ no es extremo local.

$H(-\sqrt{3},0)=\begin{vmatrix}0&6\\6&2\end{vmatrix}=-36<0\Rightarrow f(-\sqrt{3},0)$ no es extremo local.

$H(\sqrt{3},0)=\begin{vmatrix}0&6\\6&2\end{vmatrix}=-36<0\Rightarrow f(\sqrt{3},0)$ no es extremo local.

---

2. Dada $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(x-1)y}}{\sqrt{x-y}}$, **determine** y **grafique** el dominio natural y el conjunto de nivel 1 de f.

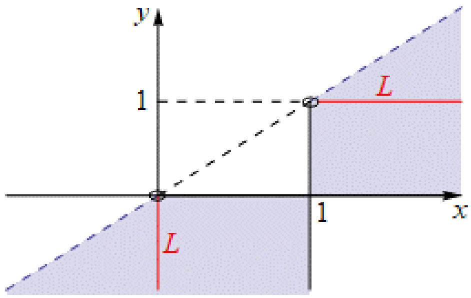
Los puntos (x,y) pertenecientes al dominio natural D deben cumplir con:

- $(x-1)y\geq 0\Leftrightarrow(x\geq 1\wedge y\geq 0)\vee(x\leq 1\wedge y\leq 0)$
- $x-y>0\Leftrightarrow x>y$.

Entonces:

$D=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x>y\wedge((x\geq 1\wedge y\geq 0)\vee(x\leq 1\wedge y\leq 0))\}$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



Por otra parte, siendo L el conjunto de nivel 1 de f, sus puntos son aquellos que pertenecen a D y que además $(x-1)y=x-y\ \to\ xy=x\to x(y-1)=0\to x=0\vee y=1$.

es decir, $\boxed{L=\{(x,y)\in D\ /\ x=0\vee y=1\}}$ que se representa en color rojo en el gráfico.

---

3. Sea $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $f \in C^2(\Re^2)$, donde $\vec{g}(x,y) = (xy + x,\ x^2 y)$ y se conoce el polinomio $p(u,v) = u + v^2 + uv + 3$ que permite aproximar $f(u,v)$ por Taylor de 2º orden en un entorno de $(2,1)$. Siendo π_0 el plano tangente a la superficie de ecuación $z = h(x,y)$ en $(1,1,z_0)$, **halle** el punto en que π_0 interseca al eje x.

Siendo $f, \vec{g} \in C^2$, esta última por tener componentes polinómicas, h es diferenciable. El plano tangente a la superficie tiene ecuación $z = h(1,1) + h'_x(1,1)(x-1) + h'_y(1,1)(y-1)$.

Aplicando la regla de la cadena:

$$Dh(1,1) = \left(h'_x(1,1)\ h'_y(1,1)\right) = Df(\vec{g}(1,1))\,D\vec{g}(1,1) = \left(f'_u(2,1)\ f'_v(2,1)\right)\begin{pmatrix} y+1 & x \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}_{(1,1)}$$

$$\left(h'_x(1,1)\ h'_y(1,1)\right) = \left(f'_u(2,1)\ f'_v(2,1)\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $h'_x(1,1) = 2\ f'_u(2,1) + 2\ f'_v(2,1)$ y $h'_y(1,1) = f'_u(2,1) + f'_v(2,1)$

Por otra parte:

$h(1,1) = f(2,1) = p(2,1) = 8$, $f'_u(2,1) = p'_u(2,1) = [1+v]_{(2,1)} = 2$, $f'_v(2,1) = p'_v(2,1) = [2v+u]_{(2,1)} = 4$

Con esto resultan $h'_x(1,1) = 2\ 2 + 2\ 4 = 12$ y $h'_y(1,1) = 2 + 4 = 6$. De donde, la ecuación del plano tangente es $z = 8 + 12(x-1) + 6(y-1)$.

El punto de intersección de π_0 con el eje x es del tipo $(x_1,0,0)$ siendo $0 = 8 + 12(x_1 - 1) - 6$, de donde $x_1 = 5/6$. Es decir, $\boxed{\text{el punto es el } (5/6,\ 0,\ 0)}$.

---

4. Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2 + t,\ t - t^3,\ 2t^4)$ con $t \in \Re$. Si r_A y r_B son las rectas tangentes a C en los puntos $A = (2,0,2)$ y $B = (0,0,2)$, **analice** si existe un plano que contenga a ambas rectas.

Denotando $\vec{g}(t) = (t^2 + t,\ t - t^3,\ 2t^4)$ debe cumplirse que:

Para $A = (2,0,2)$: $(t^2 + t,\ t - t^3,\ 2t^4) = (2,0,2) \rightarrow t^2 + t = 2 \rightarrow t = -2 \vee t = 1$, sólo con $t_A = 1$ se cumple que $g(t_A) = A$.

Para $B = (0,0,2)$: $(t^2 + t,\ t - t^3,\ 2t^4) = (0,0,2) \rightarrow t^2 + t = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = -1$, sólo con $t_B = -1$ se cumple que $g(t_B) = B$.

Siendo $\vec{g}'(t) = (2t+1, 1-3t^2, 8t^3)$, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$r_A : \vec{X} = A + u\,\vec{g}'(t_A) \rightarrow \vec{X} = (2,0,2) + u(3,-2,8) = (2+3u,\ -2u,\ 2+8u)$ con $u \in \Re$.
$r_B : \vec{X} = B + v\,\vec{g}'(t_B) \rightarrow \vec{X} = (0,0,2) + v(-1,-2,-8) = (-v, -2v,\ 2-8v)$ con $v \in \Re$.

Las rectas no son paralelas pues sus vectores directores, $(3,-2,8)$ y $(-1.-2,-8)$, no lo son. Tampoco tienen un punto en común pues para que las segundas componentes resulten iguales debe ser $u = v$ y en ese caso el sistema $\begin{cases} 2+3u = -u \\ 2+8u = 2-8u \end{cases} \equiv \begin{cases} 4u = -2 \\ 16u = 0 \end{cases}$ no tiene solución.

Entonces $\boxed{\text{las rectas son alabeadas y no existe un plano que las contenga}}$.

---

5. **Verifique** que existe z_o para el cual la ecuación $x\,y\,z + x\,z^2 + \ln(2z + y - 4) - 6 = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,1)$, **calcule** la derivada direccional máxima de f en $(1,1)$ e **indique** en qué dirección se produce dicha derivada máxima.

Denotando $F(x,y,z) = x\,y\,z + x\,z^2 + \ln(2z + y - 4) - 6$, se cumple que:

- $F(1,1,z_o) = z_o + z_o^2 + \ln(2z_o - 3) - 6 = 0 \Leftrightarrow z_o = 2$,
- $\nabla F(x,y,z) = (\,y\,z + z^2\,,\; x\,z + \frac{1}{2z+y-4}\,,\; x\,y + 2\,x\,z + \frac{2}{2z+y-4})$ es continuo en un entorno de $A = (1,1,2)$, porque sus componentes son polinómicas o suma de polinomio + cociente de polinomios con denominador no nulo,
- $F'_z(A) = 1 + 4 + 2 = 7 \neq 0$.

Con lo cual se verifica que la ecuación $x\,y\,z + x\,z^2 + \ln(2z + y - 4) - 6 = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,1)$, siendo f diferenciable en dicho punto.

Entonces la máxima derivada direccional se produce en la dirección del gradiente y su valor es la norma del gradiente, según se indica a continuación.

$$\nabla f(1,1) = (\,f'_x(1,1),\; f'_y(1,1)\,) = \left(-\frac{F'_x(A)}{F'_z(A)}\,,\, -\frac{F'_y(A)}{F'_z(A)}\right) = (-6/7\,,\, -3/7\,).$$

<u>Derivada direccional máxima en (1,1)</u>: $\boxed{f'((1,1),\, \breve{r}_{\text{máx}}) = \|\,\nabla f(1,1)\,\| = \sqrt{45}\,/\,7}$.

<u>Dirección de derivada máxima en (1,1)</u>: $\boxed{\breve{r}_{\text{máx}} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = (-6/\sqrt{45}\,,\, -3/\sqrt{45})}$.