1. Sean $f:\Re^2 \to \Re$ y el punto $A=(2,1)$. Sabiendo que la derivada direccional de f en A según el versor $\breve{r}=(u,v)$ es $f'(A,\breve{r}) = 2u+3v^2$, **calcule** los valores de la derivada direccional máxima y mínima absolutos de la función en el punto A e **indique** según qué versores se producen dichas derivadas.

Dado que $\|\breve{r}\| = \sqrt{u^2+v^2} = 1 \iff u^2+v^2=1$, de donde, reemplazando en la expresión dada:

$$f'(A,\breve{r}) = 2u+3(1-u^2) = g(u) \text{ con } u\in[-1,1]$$

Con esto todo se reduce a hallar máximo y mínimos de $g(u) = 2u+3(1-u^2)$ con $-1\le u\le 1$.
En el interior del intervalo, $-1<u<1$, $\quad g'(u) = 2-6u$
Planteando $g'(u)=0 \to 2-6u=0 \to u=1/3\in(-1,1)$. Como $g''(1/3) = -6<0$, concluimos que $g(1/3)=10/3$ es un máximo local.
Por otra parte, en la frontera del intervalo $[-1,1]$ resultan $g(-1)=-2$ y $g(1)=2$.
Comparando valores es claro que el máximo es $g(1/3)=10/3$ y el mínimo es $g(-1)=-2$, ambos son extremos absolutos de los valores de la derivada.

Dado que $u^2+v^2=1$, si $\begin{cases} u=1/3 \Rightarrow v^2=8/9 \Rightarrow v=-2\sqrt{2}/3 \ \vee\ v=2\sqrt{2}/3 \\ u=-1 \Rightarrow v^2=0 \Rightarrow v=0 \end{cases}$. De donde:

La $\boxed{\text{derivada mínima es } f'(A,\breve{r}_{\text{mín}}) = -2 \text{ para } \breve{r}_{\text{mín}} = (-1,0)}$

La $\boxed{\text{derivada máxima es } f'(A,\breve{r}_{\text{máx}_1}) = f'(A,\breve{r}_{\text{máx}_2}) = 10/3 \text{ para } \breve{r}_{\text{máx}_1} = (\tfrac{1}{3},\tfrac{-2\sqrt{2}}{3}) \text{ y } \breve{r}_{\text{máx}_2} = (\tfrac{1}{3},\tfrac{2\sqrt{2}}{3})}$

---

2. Siendo que $z=f(u,v)$ con $(u,v)=(x^2, 2xy)$, resulta $z=h(x,y)$. **Calcule** una aproximación lineal para $h(2.02, 2.98)$ sabiendo que f queda definida implícitamente mediante la ecuación $uv+z+\ln(z+u-5)-50=0$.

Eligiendo el punto $A=(2,3)$, $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=12 \end{cases} \Rightarrow 48+z+\ln(z-1)-50=0 \Rightarrow z=2=h(A)$.

La expresión para realizar la aproximación lineal en un entorno de $A=(2,3)$ es:

$$h(x,y) \cong h(A)+h'_x(A)\,(x-2)+h'_y(A)\,(y-3) \qquad (*)$$

Por su parte, denotando $F(u,v,z) = uv+z+\ln(z+u-5)-50$, verificamos que:

- $F(4,12,2) = 48+2+\ln(1)-50=0$, se cumple.
- $\nabla F(u,v,z) = (v+\frac{1}{z+u-5}\ ,\ u\ ,\ 1+\frac{1}{z+u-5})$, cumple que es continuo en un entorno de $(4,12,2)$, por tener componentes polinómicas y suma de polinomio con función continua (cociente de polinomios con denominador no nulo).
- $F'_z(4,12,2) = 2\neq 0$, cumple.

Entonces la ecuación dada $uv+z+\ln(z+u-5)-50=0$ no sólo define implícitamente a $z=f(u,v)$ sino que f resulta diferenciable en el punto $A=(2,3)$. Por lo cual podemos calcular las derivadas de $h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))$ aplicando la regla de la cadena, donde $g(x,y) = (x^2, 2xy)$, que claramente es diferenciable por tener componentes polinómicas. Así:

$$Dh(A) = \left(h'_x(A)\ \ h'_y(A)\right) = Df(\bar{g}(A))\,D\bar{g}(A) = \left(f'_u(4,12)\ \ f'_v(4,12)\right)\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$\left(h'_x(A)\ \ h'_y(A)\right) = \left(f'_u(4,12)\ \ f'_v(4,12)\right)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Por su parte: $\quad f'_u(4,12) = -\dfrac{F'_u(4,12,2)}{F'_z(4,12,2)} = -\dfrac{13}{2} \quad$ y $\quad f'_v(4,12) = -\dfrac{F'_v(4,12,2)}{F'_z(4,12,2)} = -\dfrac{4}{2} = -2$

Reemplazando en (**): $\begin{pmatrix} h'_x(A) & h'_y(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 & -8 \end{pmatrix}$

Habiendo obtenido estas derivadas y sabiendo que $h(A) = 2$, al reemplazar en (*) resulta:

$$h(x, y) \cong 2 - 38\,(x-2) - 8\,(y-3)$$

$$h(2.02,\ 2.98) \cong 2 - 38\,(2.02-2) - 8\,(2.98-3) = 1.40$$

Conclusión, la aproximación pedida es $\boxed{h(2.02,\ 2.98) \cong 1.40}$

Nota: En forma equivalente (sin usar matrices) se puede plantear –desde los datos– una red de dependencia funcional entre las variables involucradas, mediante el siguiente esquema:

$$z = f(u,v) \ \text{con} \ \begin{cases} u = x^2 \\ v = 2xy \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccc} & & u & & \\ z & \nearrow\searrow & & x & \to y \\ & & v & & \end{array} \qquad \text{de donde } z = h(x,y)$$

$$h'_x(2,3) \equiv z'_x(2,3) = [\, z'_u(u,v)\, \overbrace{u'_x(x,y)}^{2x} + z'_v(u,v)\, \overbrace{v'_x(x,y)}^{2y} \,]_{x=2,\, y=3,\, u=4,\, v=12}$$

$$h'_y(2,3) \equiv z'_y(2,3) = [\, z'_u(u,v)\, \overbrace{u'_y(x,y)}^{0} + z'_v(u,v)\, \overbrace{v'_y(x,y)}^{2x} \,]_{x=2,\, y=3,\, u=4,\, v=12}$$

mientras que $z'_u(4,12) \equiv f'_u(4,12)$ y $z'_v(4,12) \equiv f'_v(4,12)$ se calculan como se indicó más arriba.

3. Dada $f : \Re^2 \to \Re \ / \ f(x,y) = 2x^2 y - y^2$, **determine** y **grafique** el conjunto H del plano xy en cuyos puntos la función $h = f'_x \, f'_y$ resulta con valores positivos y **analice** si H es conexo.

$f'_x(x,y) = 4xy$, $f'_y(x,y) = 2x^2 - 2y$

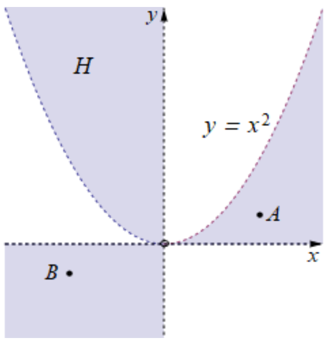
Por lo tanto, del producto de ambas resulta:

$h(x,y) = 4xy(2x^2 - 2y)$ definida en $\Re^2$

Buscamos el conjunto $H \subset \Re^2$ tal que $\forall (x,y) \in H$ resulte $h(x,y) > 0$, es decir:

$$4xy(2x^2 - 2y) > 0$$

$$8xy(x^2 - y) > 0$$



El conjunto H se representa sombreado en el gráfico, para determinarlo alcanza con observar que:

- En los cuadrantes 1º y 3º ($xy > 0$) debe ser $y < x^2$.
- En los cuadrantes 2º y 4º ($xy < 0$) debe ser $y > x^2$. En consecuencia, en el 4º cuadrante –como se observa en el gráfico– no existen puntos de H.

Dado que los ejes coordenados (x e y) y la parábola de ecuación $y = x^2$ no están incluidos en H, el conjunto H resulta desconexo (no es conexo). Para justificarlo (ver el gráfico) basta con observar que no es posible trazar una línea incluida en H desde el punto A del 1º cuadrante hasta el punto B del 3º cuadrante.

4. La superficie Σ de ecuación $z = xy$ admite la recta normal r_0 en el punto $A = (1,2,z_0)$, dicha recta interseca a Σ en otro punto B. **Calcule** la longitud del segmento cuyos puntos extremos son A y B.

De la ecuación de Σ resulta $z_0 = 2$, entonces $A = (1,2,2)$. La superficie Σ admite la representación vectorial $\bar{X} = \underbrace{(x\,,\,y\,,\,xy)}_{\bar{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in \Re^2$. Con $\bar{F}$ diferenciable (componentes polinómicas), y

$$\bar{n}_0 = [\bar{F}'_x \times \bar{F}'_y]_{(1,2)} = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}\right|_{(1,2)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-1,1) \neq \bar{0}$$

Entonces la recta normal en A puede dirigirse con el vector $\bar{n}_0$. Así, una ecuación de r_0 es:

$$\bar{X} = (1,2,2) + \lambda\,(-2,-1,1), \text{ es decir,}$$

$$\bar{X} = (1-2\lambda\,,\,2-\lambda,\,2+\lambda) \text{ con } \lambda \in \Re \qquad (*)$$

Los puntos comunes de esta recta con Σ son aquellos $\bar{X} = (x,y,z) \in r_0$ que cumplen con la ecuación de la superficie. Por lo tanto, debe cumplirse que: $2+\lambda = (1-2\lambda)(2-\lambda)$. Operando algebraicamente queda: $2\lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3$.

Reemplazando en (*): con $\lambda = 0 \Rightarrow A = (1,2,2)$, con $\lambda = 3 \Rightarrow B = (-5,-1,5)$.

Entonces la longitud pedida es $\|A-B\| = \sqrt{6^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = \boxed{3\sqrt{6}}$.

5. Dada la superficie Σ de ecuación $\bar{X} = (uv\,,\,u+v\,,\,2u-v)$ con $(u,v) \in \Re^2$, **analice** si el plano tangente a Σ en el punto $A = (6,5,1)$ tiene puntos en común con la curva C de ecuación $\bar{X} = (t^2, \frac{3-t}{2}, \frac{21+7t}{2})$ con $t \in \Re$.

Denotando $\bar{F}(u,v) = (uv\,,\,u+v\,,\,2u-v)$, $\bar{F} \in C^1(\Re^2)$ por tener componentes polinómicas, además planteando $\bar{F}(u_0,v_0) = A \Rightarrow \begin{cases} u\,v = 6 \\ u+v = 5 \\ 2u-v = 1 \end{cases}$ que se verifican únicamente para $u_0 = 2$ y $v_0 = 3$.

Por otra parte $\bar{n}_0 = [\bar{F}'_u \times \bar{F}'_v]_{(2,3)} = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ v & 1 & 2 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|_{(2,3)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3\,,\,7\,,\,1) \neq \bar{0}$, con lo cual este vector es normal a la superficie. Una ecuación para el plano tangente es $(\bar{X}-\bar{A})\cdot\bar{n}_0 = 0$, es decir:

$$-3(x-6)+7(y-5)+(z-1) = 0, \text{ o bien: } \quad -3x+7y+z = 18.$$

Si el plano tiene algún punto en común con la curva, los puntos de la curva $(x,y,z) = (t^2, \frac{3-t}{2}, \frac{21+7t}{2})$ deben cumplir con la ecuación del plano. Por lo tanto, por simple reemplazo, debe ser: $-3t^2 + 7\frac{3-t}{2} + \frac{21+7t}{2} = 18 \Leftrightarrow -6t^2+21-7t+21+7t = 36 \Leftrightarrow t^2 = 1$ de donde $t=-1 \vee t=1$, que reemplazándolos en la ecuación de la curva se obtienen los puntos:

$$\boxed{P_1 = (1\,,1\,,14)} \quad \text{y} \quad \boxed{P_2 = (1\,,2\,,7)}$$

que también pertenecen al plano tangente a Σ.