TEMA 1

1. Considere la curva C de ecuación $\vec{X} = (t^2 - t, 2t + 2, t^2)$ con $t \in \Re$ y sea π_o el plano normal a C en el punto $(0,4,1)$. **Determine** cuál es el punto de π_o más cercano al origen de coordenadas y **calcule** la distancia desde dicho punto al origen.

Denotando $\vec{g}(t) = (t^2 - t, 2t + 2, t^2)$, $\vec{g}(t_o) = (0,4,1)$ para $t_o = 1$, con lo cual un vector tangente a la curva y normal a π_o en $(0,4,1)$ es $\vec{g}\,'(1) = (2t-1, 2, 2t)]_{t=1} = (1,2,2)$.
Entonces una ecuación cartesiana para π_o es $((x,y,z)-(0,4,1))\cdot(1,2,2) = 0$, es decir, $x + 2y + 2z = 10$.
El punto de π_o más cercano al origen se obtiene mediante la intersección de π_o con la recta r_o que es perpendicular a π_o y contiene al origen de coordenadas.
Dado que r_o tiene ecuación $\vec{X} = (0,0,0) + \lambda(1,2,2) = (\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$. En el punto A común entre r_o y π_o debe cumplirse que $\lambda + 2\,2\lambda + 2\,2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 10/9$, de donde $A = (10/9, 20/9, 20/9)$ y la distancia buscada es la de este punto al origen, esto es: $\| A - (0,0,0) \| = \frac{10}{9}\sqrt{1+4+4} = 10/3$.

Respuesta: $\boxed{\text{El punto de } \pi_o \text{ más cercano al origen es el } (10/9, 20/9, 20/9) \text{ y la distancia es } 10/3}$.

Nota: También puede plantearse buscando el mínimo de la distancia de un punto al origen, es decir de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, o bien –por ser "$\sqrt{\ }$" estrictamente creciente– de $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionada a que $x + 2y + 2z = 10$ (para que el punto pertenezca al plano).

---

2. Sea $h(x,y) = x\,y^2 + g(x)$, donde g queda definida en forma implícita en un entorno de $x_o = 2$ mediante la ecuación $u\,x + \ln(u-x)/x - 6 = 0$. **Calcule** un valor aproximado de $h(1.98, 2.02)$ usando una aproximación lineal.

Trabajaremos en el punto $A = (x_o, y_o) = (2,2)$ con lo cual, en un entorno de este punto, la aproximación lineal se obtiene mediante:

$$h(x,y) \cong h(A) + h'_x(A)(x-2) + h'_y(A)(y-2) \qquad (*)$$

Denotando $F(x,u) = u\,x + \ln(u-x)/x - 6$, se observa que:

- $F(2,u_o) = u_o\,2 + \ln(u_o - 2)/2 - 6 = 0 \Leftrightarrow u_o = g(2) = 3$.
- $\nabla F(x,u) = (u + \frac{-(u-x)^{-1}x - \ln(u-x)}{x^2},\ x + \frac{1}{(u-x)\,x})$ que es continuo por tener componentes continuas en un entorno de $(x_o, u_o) = (2,3)$.
- $F'_u(2,3) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \neq 0$.

Esto no sólo confirma lo indicado en el enunciado para la función g, sino que permite calcular su derivada $g'(2)$ mediante $g'(2) = -\frac{F'_x(2,3)}{F'_u(2,3)} = -\frac{3 - 1/2}{5/2} = -1$.
De esta manera: $h(A) = 8 + g(2) = 11$, $h'_x(A) = [y^2 + g'(x)]_{(2,2)} = 4 - 1 = 3$, $h'_y(A) = [2\,x\,y]_{(2,2)} = 8$.
Reemplazando en $(*)$ resulta $h(x,y) \cong 11 + 3(x-2) + 8\,(y-2)$, entonces:

$$\boxed{h(1.98, 2.02) \cong 11 + 3(1.98 - 2) + 8\,(2.02 - 2) = 11.10}.$$

---

3. Siendo $f(x,y)=(e^{x^2+y^2}-1)/(x^2+y^2)$ para $(x,y)\neq(0,0)$, **determine** $f(0,0)$ de manera que f resulte continua en el origen y, en ese caso, **analice** la derivabilidad de f en $(0,0)$ según distintas direcciones.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(e^{x^2+y^2}-1)/(x^2+y^2)\underset{w=x^2+y^2}{=}\lim_{w\to 0}(e^w-1)/w\overset{L'H}{=}\lim_{w\to 0}\frac{e^w}{1}=1$$

La reducción a una variable es válida pues se realizó a través de una función continua (polinomio: x^2+y^2).

Como el límite existe, $\boxed{\text{imponiendo } f(0,0)=1 \text{ resulta } f \text{ continua en el origen}}$.

Para analizar la derivabilidad en el origen consideramos el versor genérico $\breve{r}=(u,v)$ con $u^2+v^2=1$ y planteamos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\,(u,v))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(hu,hv)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{h^2}-1)/h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}2h-2h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}2-2}{3h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}4h}{3}=0$$

Por lo tanto $\boxed{\text{queda definida } f'((0,0),\breve{r})=0 \text{ para todo versor } \breve{r}\in\Re^2}$.

Nota: Al plantear el límite se tuvo en cuenta que $(hu)^2+(hv)^2=h^2$ pues $u^2+v^2=1$.

---

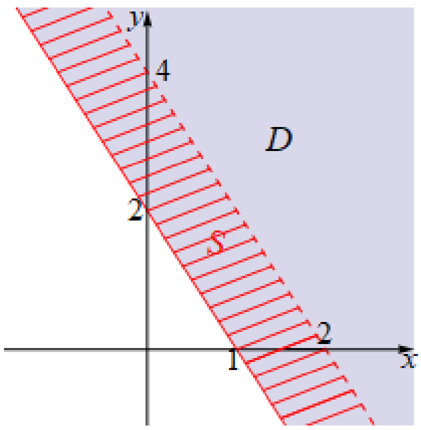
4. Sea $f(x,y)=\sqrt{\ln(2x+y-1)}$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x,y)<\ln(3)$.

En los puntos del dominio deben ser $2x+y-1>0$ y $\ln(2x+y-1)\geq 0 \Rightarrow 2x+y-1\geq 1$, que también cumple con la primera.

Entonces el dominio natural es:

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 2x+y\geq 2\}},$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.



Por su parte, en puntos de D,

$f^2(x,y)<\ln(3)\ \equiv\ \ln(2x+y-1)<\ln(3)\ \equiv\ 2x+y-1<3$

pues el logaritmo es estrictamente creciente.

De donde se obtiene que:

$$\boxed{S=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 2\leq 2x+y<4\}},$$

que se representa rayado en rojo. La recta de ecuación $2x+y=2$ está incluida en S y en D.

---

5. Siendo $z = f(x-2y,\, 2y-x)$ con $f \in C^1(\Re^2)$, **analice** si $2z'_x + z'_y = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2$.

De acuerdo al enunciado $z = \underbrace{f(\vec{g}(x,y))}_{h(x,y)}$ con $\vec{g}(x,y) = (x-2y,\, 2y-x)$ donde $f \in C^1(\Re^2)$ por enunciado y $\vec{g}$ también por tener componentes polinómicas, entonces podemos aplicar la regla de la cadena $\forall (x,y) \in \Re^2$.
Siendo $z'_x(x,y) \equiv h'_x(x,y)$, $z'_y(x,y) \equiv h'_y(x,y)$ y suponiendo que f es función de las variables u,v, resulta:

$$Dh(x,y) = Df(\vec{g}(x,y))\, D\vec{g}(x,y)$$

$$(z'_x(x,y) \ \ z'_y(x,y)) = (f'_u(x-2y) \ \ f'_v(x-2y))\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(z'_x(x,y) \ \ z'_y(x,y)) = (f'_u(x-2y) - f'_v(x-2y) \ \ -2f'_u(x-2y) + 2f'_v(x-2y))$$

De donde:

$$\begin{array}{rcl} & 2z'_x(x,y) & = & 2f'_u(x-2y) - 2f'_v(x-2y) \\ + & z'_y(x,y) & = & -2f'_u(x-2y) + 2f'_v(x-2y) \\ \hline & 2z'_x(x,y) + z'_y(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Conclusión: $\boxed{\text{Se cumple que } 2z'_x + z'_y = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2}$.

TEMA 2

1. Considere la curva C de ecuación $\vec{X} = (2t+2,\ t^2 - t,\ t^2)$ con $t \in \Re$ y sea π_o el plano normal a C en el punto $(4,0,1)$. **Determine** cuál es el punto de π_o más cercano al origen de coordenadas y **calcule** la distancia desde dicho punto al origen.

   Denotando $\vec{g}(t) = (2t+2,\ t^2 - t,\ t^2)$, $\vec{g}(t_o) = (4,0,1)$ para $t_o = 1$, con lo cual un vector tangente a la curva y normal a π_o en $(4,0,1)$ es $\vec{g}\,'(1) = (2,\ 2t-1,\ 2t)]_{t=1} = (2,1,2)$.
   Entonces una ecuación cartesiana para π_o es $((x,y,z)-(4,0,1))\cdot(2,1,2) = 0$, es decir, $2x + y + 2z = 10$.
   El punto de π_o más cercano al origen se obtiene mediante la intersección de π_o con la recta r_o que es perpendicular a π_o y contiene al origen de coordenadas.
   Dado que r_o tiene ecuación $\vec{X} = (0,0,0) + \lambda(2,1,2) = (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$. En el punto A común entre r_o y π_o debe cumplirse que $22\lambda + \lambda + 22\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 10/9$, de donde $A = (20/9, 10/9, 20/9)$ y la distancia buscada es la de este punto al origen, esto es: $\| A - (0,0,0) \| = \frac{10}{9}\sqrt{4+1+4} = 10/3$.

   Respuesta: $\boxed{\text{El punto de } \pi_o \text{ más cercano al origen es el } (20/9, 10/9, 20/9) \text{ y la distancia es } 10/3}$.

   Nota: También puede plantearse buscando el mínimo de la distancia de un punto al origen, es decir de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, o bien –por ser "$\sqrt{\ }$" estrictamente creciente– de $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionada a que $2x + y + 2z = 10$ (para que el punto pertenezca al plano).

---

2. Sea $h(x,y) = x^2\, y + g(x)$, donde g queda definida en forma implícita en un entorno de $x_o = 2$ mediante la ecuación $u\,x + \ln(u-x)/x - 6 = 0$. **Calcule** un valor aproximado de $h(2.02, 1.98)$ usando una aproximación lineal.

   Trabajaremos en el punto $A = (x_o, y_o) = (2,2)$ con lo cual, en un entorno de este punto, la aproximación lineal se obtiene mediante:

$$h(x,y) \cong h(A) + h'_x(A)(x-2) + h'_y(A)(y-2) \qquad (*)$$

   Denotando $F(x,u) = u\,x + \ln(u-x)/x - 6$, se observa que:

   - $F(2,u_o) = u_o\,2 + \ln(u_o - 2)/2 - 6 = 0 \Leftrightarrow u_o = g(2) = 3$.
   - $\nabla F(x,u) = \left(u + \frac{-(u-x)^{-1}x - \ln(u-x)}{x^2},\ x + \frac{1}{(u-x)\,x}\right)$ que es continuo por tener componentes continuas en un entorno de $(x_o, u_o) = (2,3)$.
   - $F'_u(2,3) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \neq 0$.

   Esto no sólo confirma lo indicado en el enunciado para la función g, sino que permite calcular su derivada $g'(2)$ mediante $g'(2) = -\frac{F'_x(2,3)}{F'_u(2,3)} = -\frac{3 - 1/2}{5/2} = -1$.
   De esta manera: $h(A) = 8 + g(2) = 11$, $h'_x(A) = [2\,x\,y + g'(x)]_{(2,2)} = 8 - 1 = 7$, $h'_y(A) = [x^2]_{(2,2)} = 4$.
   Reemplazando en $(*)$ resulta $h(x,y) \cong 11 + 7(x-2) + 4\,(y-2)$, entonces:

$$\boxed{h(2.02, 1.98) \cong 11 + 7(2.02 - 2) + 4\,(1.98 - 2) = 11.06}.$$

---

3. Siendo $f(x,y)=(e^{2x^2+2y^2}-1)/(2x^2+2y^2)$ para $(x,y)\neq(0,0)$, **determine** $f(0,0)$ de manera que f resulte continua en el origen y, en ese caso, **analice** la derivabilidad de f en $(0,0)$ según distintas direcciones.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (e^{2x^2+2y^2}-1)/(2x^2+2y^2) \underset{w=2x^2+2y^2}{=} \lim_{w\to 0}(e^{w}-1)/w \overset{L'H}{=} \lim_{w\to 0}\frac{e^{w}}{1}=1$$

La reducción a una variable es válida pues se realizó a través de una función continua (polinomio: $2x^2+2y^2$).

Como el límite existe, $\boxed{\text{imponiendo } f(0,0)=1 \text{ resulta } f \text{ continua en el origen}}$.

Para analizar la derivabilidad en el origen consideramos el versor genérico $\breve{r}=(u,v)$ con $u^2+v^2=1$ y planteamos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\,(u,v))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(hu,hv)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{2h^2}-1)/(2h^2)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h^2}-1-2h^2}{2h^3}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h^2}\,4h-4h}{6h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h^2}\,4-4}{6h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h^2}\,16h}{6}=0$$

Por lo tanto $\boxed{\text{queda definida } f'((0,0),\breve{r})=0 \text{ para todo versor } \breve{r}\in\Re^2}$.

<u>Nota</u>: Al plantear el límite se tuvo en cuenta que $2(hu)^2+2(hv)^2=2h^2$ pues $u^2+v^2=1$.

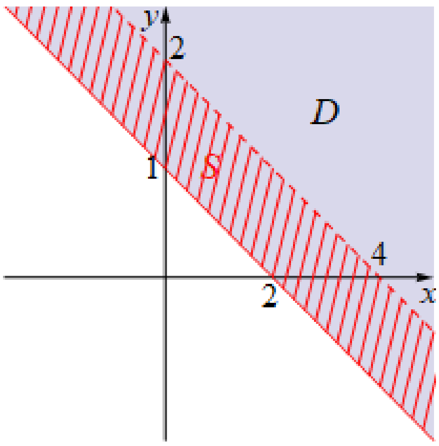
4. Sea $f(x,y)=\sqrt{\ln(x+2y-1)}$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x,y)<\ln(3)$.

En los puntos del dominio deben ser $x+2y-1>0$ y $\ln(x+2y-1)\geq 0 \Rightarrow x+2y-1\geq 1$, que también cumple con la primera.

Entonces el dominio natural es:

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x+2y\geq 2\}},$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.



Por su parte, en puntos de D,

$f^2(x,y)<\ln(3)\ \equiv\ \ln(x+2y-1)<\ln(3)\ \equiv\ x+2y-1<3$

pues el logaritmo es estrictamente creciente.

De donde se obtiene que:

$$\boxed{S=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 2\leq x+2y<4\}},$$

que se representa rayado en rojo. La recta de ecuación $x+2y=2$ está incluida en S y en D.

5. Siendo $z = f(2x-y,\ y-2x)$ con $f \in C^1(\Re^2)$, **analice** si $z'_x + 2z'_y = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2$.

De acuerdo al enunciado $z = \underbrace{f(\vec{g}(x,y))}_{h(x,y)}$ con $\vec{g}(x,y) = (2x-y, y-2x)$ donde $f \in C^1(\Re^2)$ por enunciado y $\vec{g}$ también por tener componentes polinómicas, entonces podemos aplicar la regla de la cadena $\forall (x,y) \in \Re^2$.

Siendo $z'_x(x,y) \equiv h'_x(x,y)$, $z'_y(x,y) \equiv h'_y(x,y)$ y suponiendo que f es función de las variables u, v, resulta:

$$Dh(x,y) = Df(\vec{g}(x,y))\, D\vec{g}(x,y)$$

$$(z'_x(x,y)\ \ z'_y(x,y)) = (f'_u(2x-y)\ \ f'_v(y-2x))\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(z'_x(x,y)\ \ z'_y(x,y)) = (2\,f'_u(2x-y) - 2\,f'_v(y-2x)\ \ -f'_u(2x-y) + f'_v(2x-y))$$

De donde:

$$\begin{array}{rcc} z'_x(x,y) & = & 2\,f'_u(2x-y) - 2\,f'_v(y-2x) \\ +\ \ 2z'_y(x,y) & = & -2\,f'_u(2x-y) + 2\,f'_v(y-2x) \\ \hline z'_x(x,y) + 2z'_y(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Conclusión: $\boxed{\text{Se cumple que } z'_x + 2z'_y = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2}$.