

TEMA 1

1. Sea π_0 el plano tangente en $(10, 2, 5)$ a la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u^2 + v, u - v, u + 2v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, **halla** una ecuación para la recta que contiene a los puntos donde π_0 interseca a los ejes x e y .

Denotando $\vec{F}(u, v) = (u^2 + v, u - v, u + 2v)$, $\vec{F}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por tener componentes polinómicas. Por otra parte:

$$\vec{F}(u, v) = (10, 2, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v = 10 & (a) \\ u - v = 2 & (b) \\ u + 2v = 5 & (c) \end{cases} \text{ Restando m.a.m (c)-(b)} \rightarrow 3v = 3 \rightarrow v = 1$$

Con $v = 1$ en $(b) \rightarrow u = 3$. Se verifica que el par $(u_0, v_0) = (3, 1)$ satisface las tres ecuaciones, es decir, $\vec{F}(3, 1) = (10, 2, 5)$.

$$\text{Además } \vec{F}'_u(3, 1) \times \vec{F}'_v(3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(3,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -11, -7) \neq \vec{0}$$

Con lo cual $\vec{n}_0 = (3, -11, -7)$ es normal a π_0 y una ecuación para el plano es:

$$((x, y, z) - (10, 2, 5)) \cdot (3, -11, -7) = 0, \text{ es decir, } 3x - 11y - 7z = -27.$$

π_0 interseca al eje x en el punto $(a, 0, 0)$ con $3a = -27 \rightarrow a = -9 \rightarrow A = (-9, 0, 0)$.

π_0 interseca al eje y en el punto $(0, b, 0)$ con $-11b = -27 \rightarrow b = 27/11 \rightarrow B = (0, 27/11, 0)$

La recta que contiene a estos dos puntos admite la ecuación:

$$\vec{X} = A + t(B - A) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X} = (-9, 0, 0) + t(9, 27/11, 0) \rightarrow \boxed{\vec{X} = (9t - 9, 27/11t, 0) \text{ con } t \in \mathbb{R}}.$$

2. Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{xy - x}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f .

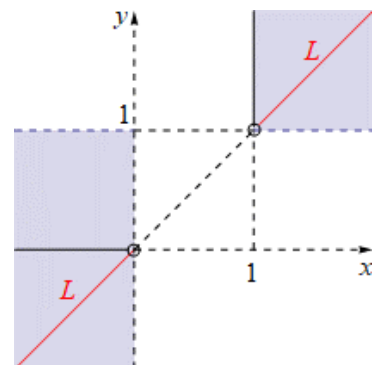
Los puntos (x, y) pertenecientes a D deben cumplir con:

- $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x \geq 0 \wedge x \geq 1)}_{x \geq 1} \vee \underbrace{(x \leq 0 \wedge x \leq 1)}_{x \leq 0}$
- $xy - x > 0 \Leftrightarrow x(y - 1) > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 1) \vee (x < 0 \wedge y < 1)$

Entonces

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x \geq 1 \wedge y > 1) \vee (x < 0 \wedge y < 1)\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



El conjunto L de nivel 1 de f está formado por los puntos de D para los cuales $x^2 - x = xy - x$, es decir, $x^2 = xy \rightarrow x(x - y) = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = x$, como los puntos de $x = 0$ no pertenecen a D ,

$\boxed{L = \{(x, y) \in D / y = x\}}$ que se representa en color rojo en la figura.

3. Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : x^2 y + xz = 3 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 : xy - z^2 = 1.$$

Si r_0 es la recta tangente a C en $P = (1,2,1)$, **calcule** la distancia entre los dos puntos A y B donde r_0 interseca a la superficie de ecuación $z = x^2$.

Denotando $F(x,y,z) = x^2 y + xz - 3$ y $G(x,y,z) = xy - z^2 - 1$, vemos que $C = \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$, cumpliéndose que:

- $F(P) = G(P) = 0$,
- $\nabla F(x,y,z) = (2xy + z, x^2, x)$ y $\nabla G(x,y,z) = (y, x, -2z)$ son continuos por tener componentes polinómicas,
- $\vec{d} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 12, 3) \neq \vec{0}$.

Entonces $\vec{d}$ es director de la recta tangente a C en P , con lo cual una ecuación para r_0 es:

$$\vec{X} = (1,2,1) + \lambda(-3,12,3) = (1-3\lambda, 2+12\lambda, 1+3\lambda) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta recta interseca a la superficie dada cuando $1+3\lambda = (1-3\lambda)^2$, es decir, $9\lambda^2 - 9\lambda = 0$. Para lo cual debe ser $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$, de donde –reemplazando en la ecuación de r_0 – se obtienen los puntos

$A = (1,2,1)$ y $B = (-2,14,4)$. La distancia entre ellos es $\|A - B\| = \sqrt{9 + 144 + 9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$.

4. Sea $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $\vec{g}(x,y) = (x^2 y, y - x^2)$ y $\nabla f(u,v) = (u + 2v, 2u)$. **Calcule** una aproximación lineal para $h(1.02, 1.97)$ sabiendo que el punto $(1,2,5)$ pertenece a la superficie de ecuación $z = h(x,y)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dado que $D\vec{g}$ y ∇f son continuos en $\mathbb{R}^2$, f y $\vec{g}$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, se puede derivar la composición aplicando la regla de la cadena y también h es diferenciable en todo punto.

La aproximación lineal en un entorno del punto $(1,2)$ se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$h(x,y) \cong h(1,2) + h'_x(1,2)(x-1) + h'_y(1,2)(y-2) \quad (1)$$

Como $(1,2,5) = (1,2,h(1,2))$, $h(1,2) = 5$, por otra parte, aplicando la regla de la cadena resulta:

$$Dh(1,2) = (h'_x(1,2) \ h'_y(1,2)) = Df(\vec{g}(1,2)) D\vec{g}(1,2) = Df(2,1) \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}_{(1,2)}$$

$$(h'_x(1,2) \ h'_y(1,2)) = (f'_u(2,1) \ f'_v(2,1)) \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}_{(1,2)}$$

$$(h'_x(1,2) \ h'_y(1,2)) = (4 \ 4) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (8 \ 8)$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\begin{aligned} h(x,y) &\cong 5 + 8(x-1) + 8(y-2) \\ h(1.02,1.97) &\cong 5 + 8(1.02-1) + 8(1.97-2) \end{aligned}$$

$$\boxed{h(1.02,1.97) \cong 4.92}.$$

5. Dada $f(x, y) = x + 4x^{-1} + y^3 - 3y^2 + 2$ definida en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$, **halle** los puntos en los que la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$ tiene plano tangente horizontal (paralelo al plano xy) y **determine** en cuáles de dichos puntos el valor de la función es máximo o mínimo relativo **indicando** en cada caso el valor del extremo correspondiente.

Dado que $f \in C^2$ en D , por ser un polinomio + cociente de polinomio con denominador no nulo, f es diferenciable y su gráfica admite plano tangente en todos sus puntos. Puesta la ecuación de Σ en la forma $\underbrace{f(x, y) - z}_{F(x, y, z)} = 0$,

$\nabla F(x, y, z) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1)$ es normal a ella en todo punto $(x, y, f(x, y)) \in \Sigma$,

y el plano tangente será horizontal cuando su normal resulte paralela al $(0, 0, 1)$, para ello ∇f debe anularse.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 1 - 4x^{-2} \\ f'_y(x, y) = 3y^2 - 6y \end{cases} \cdot \text{Puntos con } \nabla f \text{ nulo (puntos críticos):}$$

$$\begin{cases} 1 - 4x^{-2} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = -2 \vee x = 2 \\ 3y^2 - 6y = 0 \rightarrow 3y(y - 2) = 0 \rightarrow y = 0 \vee y = 2 \end{cases} \rightarrow (-2, 0), (-2, 2), (2, 0) \text{ y } (2, 2)$$

Entonces, los puntos en los que la superficie tiene plano tangente horizontal son:

$$\boxed{(-2, 0, -2)}, \boxed{(-2, 2, -6)}, \boxed{(2, 0, 6)} \text{ y } \boxed{(2, 2, 2)}.$$

Ahora analizamos los determinantes hessianos en los puntos críticos:

	$(-2, 0)$	$(-2, 2)$	$(2, 0)$	$(2, 2)$
$f''_{xx}(x, y) = 8x^{-3}$	-1	-1	1	1
$f''_{xy}(x, y) = 0$	0	0	0	0
$f''_{yy}(x, y) = 6y - 6$	-6	6	-6	6

$$H(-2, 0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 6 > 0 \text{ con } f''_{xx}(-2, 0) = -1 < 0, \text{ entonces } \boxed{f(-2, 0) = -2 \text{ es máximo local}}.$$

$$H(-2, 2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 < 0, \text{ entonces } f(-2, 2) \text{ no es extremo local}.$$

$$H(2, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 < 0, \text{ entonces } f(2, 0) \text{ no es extremo local}.$$

$$H(2, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 > 0 \text{ con } f''_{xx}(2, 2) = 1 > 0, \text{ entonces } \boxed{f(2, 2) = 2 \text{ es mínimo local}}.$$

TEMA 2

1. Sea π_0 el plano tangente en $(10, 2, 5)$ a la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u + v^2, v - u, 2u + v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, **halle** una ecuación para la recta que contiene a los puntos donde π_0 interseca a los ejes x e y .

Denotando $\vec{F}(u, v) = (u + v^2, v - u, 2u + v)$, $\vec{F}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por tener componentes polinómicas. Por otra parte:

$$\vec{F}(u, v) = (10, 2, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v^2 = 10 & (a) \\ v - u = 2 & (b) \\ 2u + v = 5 & (c) \end{cases} \text{ Restando m.a.m } (c) - (b) \rightarrow 3u = 3 \rightarrow u = 1$$

Con $u = 1$ en $(b) \rightarrow v = 3$. Se verifica que el par $(u_0, v_0) = (1, 3)$ satisface las tres ecuaciones, es decir, $\vec{F}(1, 3) = (10, 2, 5)$.

$$\text{Además } \vec{F}'_u(1, 3) \times \vec{F}'_v(1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2v & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,3)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 11, 7) \neq \vec{0}$$

Con lo cual $\vec{n}_0 = (-3, 11, 7)$ es normal a π_0 y una ecuación para el plano es:

$$((x, y, z) - (10, 2, 5)) \cdot (-3, 11, 7) = 0, \text{ es decir, } -3x + 11y + 7z = 27.$$

π_0 interseca al eje x en el punto $(a, 0, 0)$ con $-3a = 27 \rightarrow a = -9 \rightarrow A = (-9, 0, 0)$.

π_0 interseca al eje y en el punto $(0, b, 0)$ con $11b = 27 \rightarrow b = 27/11 \rightarrow B = (0, 27/11, 0)$

La recta que contiene a estos dos puntos admite la ecuación:

$$\vec{X} = A + t(B - A) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X} = (-9, 0, 0) + t(9, 27/11, 0) \rightarrow \boxed{\vec{X} = (9t - 9, 27/11t, 0) \text{ con } t \in \mathbb{R}}.$$

2. Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - y}}{\sqrt{xy - y}}$, **determine y grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f .

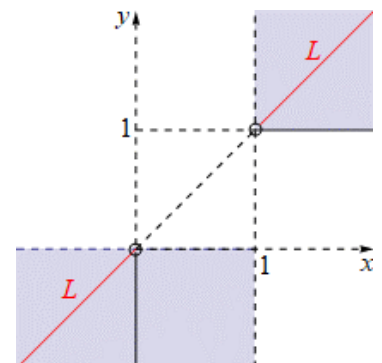
Los puntos (x, y) pertenecientes a D deben cumplir con:

- $y^2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(y \geq 0 \wedge y \geq 1)}_{y \geq 1} \vee \underbrace{(y \leq 0 \wedge y \leq 1)}_{y \leq 0}$
- $xy - y > 0 \Leftrightarrow y(x - 1) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(y > 0 \wedge x > 1)}_{y > 0, x > 1} \vee \underbrace{(y < 0 \wedge x < 1)}_{y < 0, x < 1}$

Entonces

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x > 1 \wedge y \geq 1) \vee (x < 1 \wedge y < 0)\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



El conjunto L de nivel 1 de f está formado por los puntos de D para los cuales $y^2 - y = xy - y$, es decir, $y^2 = xy \rightarrow y(y - x) = 0 \rightarrow y = 0 \vee y = x$, como los puntos de $y = 0$ no pertenecen a D , $\boxed{L = \{(x, y) \in D / y = x\}}$ que se representa en color rojo en la figura.

3. Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : xy^2 + yz = 3 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 : xy - z^2 = 1.$$

Si r_0 es la recta tangente a C en $P = (2,1,1)$, **calcule** la distancia entre los dos puntos A y B donde r_0 interseca a la superficie de ecuación $z = y^2$.

Denotando $F(x,y,z) = xy^2 + yz - 3$ y $G(x,y,z) = xy - z^2 - 1$, vemos que $C = \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$, cumpliéndose que:

- $F(P) = G(P) = 0$,
- $\nabla F(x,y,z) = (y^2, 2xy + z, y)$ y $\nabla G(x,y,z) = (y, x, -2z)$ son continuos por tener componentes polinómicas,
- $\vec{d} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-12, 3, -3) \neq \vec{0}$.

Entonces $\vec{d}$ es director de la recta tangente a C en P , con lo cual una ecuación para r_0 es:

$$\vec{X} = (2,1,1) + \lambda(-12,3,-3) = (2-12\lambda, 1+3\lambda, 1-3\lambda) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta recta interseca a la superficie dada cuando $1-3\lambda = (1+3\lambda)^2$, es decir, $9\lambda^2 + 9\lambda = 0$. Para lo cual debe ser $\lambda = 0 \vee \lambda = -1$, de donde –reemplazando en la ecuación de r_0 – se obtienen los puntos $A = (2,1,1)$ y $B = (14,-2,4)$. La distancia entre ellos es $\|A - B\| = \sqrt{144 + 9 + 9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$.

4. Sea $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $\vec{g}(x,y) = (x-y^2, xy^2)$ y $\nabla f(u,v) = (2u+v, 2v)$. **Calcule** una aproximación lineal para $h(1.97, 1.02)$ sabiendo que el punto $(2,1,5)$ pertenece a la superficie de ecuación $z = h(x,y)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dado que $D\vec{g}$ y ∇f son continuos en $\mathbb{R}^2$, f y $\vec{g}$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, se puede derivar la composición aplicando la regla de la cadena y también h es diferenciable en todo punto.

La aproximación lineal en un entorno del punto $(2,1)$ se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$h(x,y) \cong h(2,1) + h'_x(2,1)(x-2) + h'_y(2,1)(y-1) \quad (1)$$

Como $(2,1,5) = (2,1,h(2,1))$, $h(2,1) = 5$, por otra parte, aplicando la regla de la cadena resulta:

$$Dh(2,1) = (h'_x(2,1) \ h'_y(2,1)) = Df(\vec{g}(2,1)) D\vec{g}(2,1) = Df(1,2) \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}_{(2,1)}$$

$$(h'_x(2,1) \ h'_y(2,1)) = (f'_u(1,2) \ f'_v(1,2)) \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}_{(2,1)}$$

$$(h'_x(2,1) \ h'_y(2,1)) = (4 \ 4) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (8 \ 8)$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\begin{aligned} h(x,y) &\cong 5 + 8(x-2) + 8(y-1) \\ h(1.97,1.02) &\cong 5 + 8(1.97-2) + 8(1.02-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{h(1.97,1.02) \cong 4.92}.$$

5. Dada $f(x, y) = y + 4y^{-1} + x^3 - 3x^2 + 2$ definida en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$, **halle** los puntos en los que la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$ tiene plano tangente horizontal (paralelo al plano xy) y **determine** en cuáles de dichos puntos el valor de la función es máximo o mínimo relativo **indicando** en cada caso el valor del extremo correspondiente.

Dado que $f \in C^2$ en D , por ser un polinomio + cociente de polinomio con denominador no nulo, f es diferenciable y su gráfica admite plano tangente en todos sus puntos. Puesta la ecuación de Σ en la forma $\underbrace{f(x, y) - z}_{F(x, y, z)} = 0$,

$\nabla F(x, y, z) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1)$ es normal a ella en todo punto $(x, y, f(x, y)) \in \Sigma$,

y el plano tangente será horizontal cuando su normal resulte paralela al $(0, 0, 1)$, para ello ∇f debe anularse.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - 6x \\ f'_y(x, y) = 1 - 4y^{-2} \end{cases} \cdot \text{Puntos con } \nabla f \text{ nulo (puntos críticos):}$$

$$\begin{cases} 1 - 4y^{-2} = 0 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = -2 \vee y = 2 \\ 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2 \end{cases} \rightarrow (0, -2), (0, 2), (2, -2) \text{ y } (2, 2)$$

Entonces, los puntos en los que la superficie tiene plano tangente horizontal son:

$$\boxed{(0, -2, -2)}, \boxed{(0, 2, 6)}, \boxed{(2, -2, -6)} \text{ y } \boxed{(2, 2, 2)}.$$

Ahora analizamos los determinantes hessianos en los puntos críticos:

	$(0, -2)$	$(0, 2)$	$(2, -2)$	$(2, 2)$
$f''_{xx}(x, y) = 6x - 6$	-6	-6	6	6
$f''_{xy}(x, y) = 0$	0	0	0	0
$f''_{yy}(x, y) = 8y^{-3}$	-1	1	-1	1

$$H(0, -2) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 > 0 \text{ con } f''_{xx}(0, -2) = -6 < 0, \text{ entonces } \boxed{f(0, -2) = -2 \text{ es máximo local}}.$$

$$H(0, 2) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \text{ entonces } f(0, 2) \text{ no es extremo local}.$$

$$H(2, -2) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \text{ entonces } f(2, -2) \text{ no es extremo local}.$$

$$H(2, 2) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0 \text{ con } f''_{xx}(2, 2) = 6 > 0, \text{ entonces } \boxed{f(2, 2) = 2 \text{ es mínimo local}}.$$