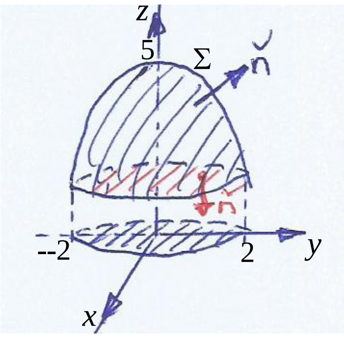
TEMA 1

1. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ con $z\ge 1$, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z)=(y+x\varphi(z),\, x-y\varphi(z),\, 3z+2)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

Dado que se desconoce la expresión de φ, pero es posible calcular la divergencia de $\vec{f}$ que resulta:

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z)=\varphi(z)-\varphi(z)+3=3$$

y $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$, es posible realizar una conveniente aplicación del teorema de Gauss calculando el flujo a través de la superficie frontera ∂D del cuerpo D definido por $1\le z\le\sqrt{5-x^2-y^2}$, ver gráfico. En este caso:



Σ_1 (parte del plano $z=1$) está rayada en color rojo

$$\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma+\iint_{\Sigma_{1\downarrow}}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz \qquad (*)$$

Pues $\partial D=\Sigma\cup\Sigma_1$, donde Σ_1 es el trozo de plano de ecuación $z=1$ que permite "cerrar a Σ" definiendo el cuerpo D. En el gráfico se indican las orientaciones de ambas superficies (salientes de D). $\Sigma_\uparrow$ indica orientación de Σ hacia z^+ (la elegida para Σ) y $\Sigma_{1\downarrow}$ indica orientación de Σ_1 hacia z^-.

La curva común a Σ **y** Σ_1 es $C=\begin{cases} z=\sqrt{5-x^2-y^2} \\ z=1\end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1\end{cases}$, de donde la proyección de ambas superficies y el cuerpo D contra el plano xy es el círculo D_{xy} definido por $x^2+y^2\le 4$.

Entonces $\iint_{\Sigma_{1\downarrow}}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\vec{f}(x,y,1)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}(-5)\,dx\,dy=-5\pi\,2^2=-20\pi$

Mientras que $\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz=3\iint_{D_{xy}}dx\,dy\int_1^{\sqrt{5-x^2-y^2}}dz=3\iint_{D_{xy}}(\sqrt{5-x^2-y^2}-1)\,dx\,dy$. Cambiando a coordenadas polares queda:

$$\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz=3\int_0^{2\pi}d\theta\,\underbrace{\int_0^2(\sqrt{5-r^2}-1)\,r\,dr}_{[-\frac{1}{3}(5-r^2)^{3/2}-\frac{1}{2}r^2]_0^2}=3\,\frac{5^{3/2}-7}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi(5^{3/2}-7)$$

Con lo cual, reemplazando en $(*)$ resulta:

$$\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma-20\pi=2\pi(5^{3/2}-7)$$

Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=2\pi(5^{3/2}+3)}$.

2. Dada la familia de curvas planas de ecuación $x^2+2y^2=C$, **calcule** la longitud de la curva perteneciente a la familia ortogonal entre los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$.

Comenzamos obteniendo la ec. dif. de la flia. dato:

$$\begin{cases} x^2+2y^2=C \\ 2x+4yy'=0 \to x+2yy'=0 \text{ Ec. dif. de la flia. dato} \end{cases}$$

Reemplazando y' por $-1/y'$ resulta: $x-2y/y'=0$ Ec dif. de la flia. Ortogonal.

Operando desde esta última: $x\dfrac{dy}{dx}=2y$, de donde $\dfrac{dy}{y}=2\dfrac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integrando}} \ln|y|=2\ln|x|+A$, o bien, $|y|=e^A e^{\ln|x|^2} \to |y|=e^A x^2 \to y=\underbrace{\pm e^A}_{C}x^2$. Es decir, $y=Cx^2$ es la ecuación de la familia ortogonal a la dada como dato.

En particular, la curva de ecuación $y=2x^2$ es la que pasa por los puntos dados y admite la ecuación vectorial $\vec{X}=\underbrace{(x,2x^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $0\le x\le 1$. Con $\vec{g}'(x)=(1,4x)$ continua en $\Re$ y por lo tanto en $[0,1]$ (componentes continuas: constante y polinómica).

Su longitud puede calcularse mediante $\int_0^1\|\vec{g}'(x)\|dx=\int_0^1\sqrt{1+16x^2}\,dx=4\int_0^1\sqrt{1/16+x^2}\,dx$, integral del tipo $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ que se puede obtener de una tabla de integrales.

Entonces la longitud buscada es:

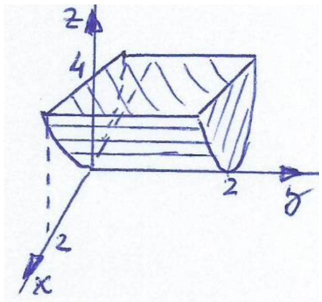
$$4\int_0^1\sqrt{1/16+x^2}\,dx=4[\tfrac{1}{2}x\sqrt{1/16+x^2}+\tfrac{1}{32}\operatorname{senh}^{-1}(4x)]_0^1=\sqrt{17}/2+\operatorname{senh}^{-1}(4)/8$$

Dado que $\operatorname{senh}^{-1}(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$, la respuesta también puede expresarse mediante el "$\ln$".

Respuesta: $\boxed{\sqrt{17}/2+\operatorname{senh}^{-1}(4)/8 \equiv \sqrt{17}/2+\ln(4+\sqrt{17})/8}$

---

3. **Calcule** la masa del cuerpo D cuyos puntos cumplen con $x^2\le z\le 4$, $|y-1|\le 1$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.



$\text{Masa}(D)=\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, donde la densidad de masa es $\delta(x,y,z)=k|z|=kz$ pues todos los puntos de D tienen coordenada $z\ge 0$ y $k>0$ es la constante de proporcionalidad.

Por su parte $|y-1|\le 1 \Leftrightarrow -1\le y-1\le 1$, es decir $0\le y\le 2$.

De esta manera, observando el gráfico, la proyección del cuerpo sobre el plano xy es D_{xy} definido por: $-2\le x\le 2$, $0\le y\le 2$.

Entonces:

$$\text{Masa}(D)=\iiint_D kz\,dx\,dy\,dz=k\int_{-2}^{2}dx\int_0^2 dy\int_{x^2}^4 z\,dz=\tfrac{1}{2}k\int_{-2}^{2}dx\int_0^2(16-x^4)\,dy=2\tfrac{1}{2}k\int_{-2}^{2}(16-x^4)\,dx=$$

$$=k[16x-x^5/5]_{-2}^{2}=\tfrac{256}{5}k$$

Respuesta: $\boxed{\text{Masa}(D)=\tfrac{256}{5}k}$.

---

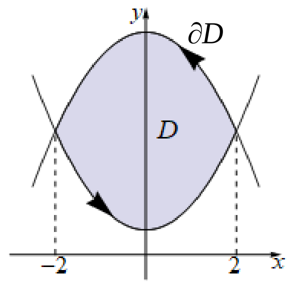
4. Dada $\vec{f}(x,y) = (x - y^2 - g(x-y)\,,\, y^2 + g(x-y))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x^2 + 1 \le y \le 9 - x^2$. **Indique** gráficamente cómo es la orientación que ha elegido para realizar la circulación.

Considerando que $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, ya que $\vec{f} \in C^1(\Re^2)$, podemos aplicar el teorema de Green:

$$\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

donde D es la región plana que es dato, ∂D^+ representa a su frontera recorrida en sentido positivo (ver orientación en el gráfico) y

$$Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = g'(x-y) - [-2y - g'(x-y)(-1)] = 2y$$



$$\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2y\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2+1}^{9-x^2} 2y\,dy = \int_{-2}^{2} \underbrace{[(9-x^2)^2 - (x^2+1)^2]}_{20\,(4-x^2)} dx = 20[4x - x^3/3]_{-2}^{2}$$

Respuesta: $\boxed{\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 640/3}$.

5. Sea π_o el plano tangente en $(1,1,2/3)$ a la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv,\, v,\, (6 - 2uv - 2v)/3)$ con $(u,v) \in \Re^2$. **Calcule** el área del trozo de π_o limitado por su intersección por los planos coordenados.

Denotando $\vec{F}(u,v) = (uv,\, v,\, (6 - 2uv - 2v)/3)$, $\vec{F} \in C^1(\Re^2)$ por tener componentes polinómicas. Como $\vec{F}(u_0,v_0) = (u_0 v_0\,,\, v_0\,, (6 - 2u_0 v_0 - 2v_0)/3) = (1,1,2/3) \Leftrightarrow (u_0,v_0) = (1,1)$, $(1,1,2/3)$ es punto simple de la superficie y

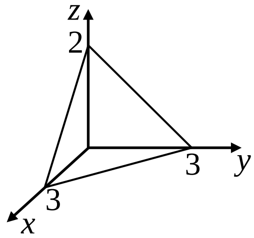
$$\vec{n}_0 = [\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v]_{(1,1)} = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ v & 0 & -2v/3 \\ u & 1 & (-2u-2)/3 \end{vmatrix}\right|_{(1,1)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 1 & 1 & -4/3 \end{vmatrix} = (2/3, 2/3, 1) \ne 0,$$

con lo cual $(1,1,2/3)$ también es punto regular, siendo $\vec{n}_0 = (2/3,\, 2/3,\, 1)$ un vector normal a π_o.
Así, una ecuación para π_o es $((x,y,z) - (1,1,2/3)) \cdot (2/3, 2/3, 1) = 0$, es decir $2x + 2y + 3z = 6$.

El trozo de plano del cual se pide el área puede expresarse en la forma:

$$\vec{X} = \underbrace{(x,\, y,\, (6 - 2x - 2y)/3)}_{\vec{G}(x,y)} \quad \text{con} \quad (x,y) \in D_{xy}$$

según puede observarse en el gráfico.



Con lo cual $\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{vmatrix} = (2/3,\, 2/3,\, 1) \quad \forall (x,y)$,

siendo $\| \vec{G}'_x \times \vec{G}'_y \| = \sqrt{17}/3$.

Entonces, área $= \iint_{D_{xy}} \| \vec{G}'_x \times \vec{G}'_y \|\, dx\,dy = \frac{\sqrt{17}}{3}\, \text{área}(D_{xy}) = \frac{\sqrt{17}}{3}\, \frac{3\,3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

Respuesta: $\boxed{\text{área} = \frac{3}{2}\sqrt{17}}$.

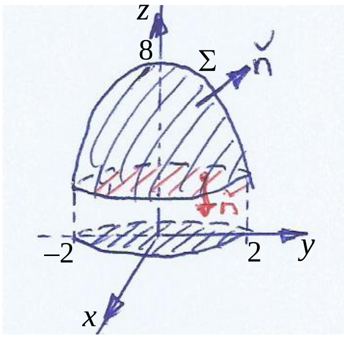
TEMA 2

1. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ con $z\geq 2$, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z)=(y+x^2\varphi(z),\, x-2xy\varphi(z),\, 2z+3)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

Dado que se desconoce la expresión de φ, pero es posible calcular la divergencia de $\vec{f}$ que resulta:

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z)=2x\varphi(z)-2x\varphi(z)+2=2$$

y $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$, es posible realizar una conveniente aplicación del teorema de Gauss calculando el flujo a través de la superficie frontera ∂D del cuerpo D definido por $2\leq z\leq\sqrt{8-x^2-y^2}$, ver gráfico. En este caso:



Σ_1 (parte del plano $z=2$) está rayada en color rojo

$$\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 2\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma+\iint_{\Sigma_{1\downarrow}}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 2\,dx\,dy\,dz \qquad (*)$$

Pues $\partial D=\Sigma\cup\Sigma_1$, donde Σ_1 es el trozo de plano de ecuación $z=2$ que permite "cerrar a Σ" definiendo el cuerpo D. En el gráfico se indican las orientaciones de ambas superficies (salientes de D). $\Sigma_\uparrow$ indica orientación de Σ hacia z^+ (la elegida para Σ) y $\Sigma_{1\downarrow}$ indica orientación de Σ_1 hacia z^-.

La curva común a Σ **y** Σ_1 es $C=\begin{cases} z=\sqrt{8-x^2-y^2}\\ z=2\end{cases}\equiv\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$, de donde la proyección de ambas superficies y el cuerpo D contra el plano xy es el círculo D_{xy} definido por $x^2+y^2\leq 4$.

Entonces $\iint_{\Sigma_{1\downarrow}}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\vec{f}(x,y,2)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}(-7)\,dx\,dy=-7\pi 2^2=-28\pi$

Mientras que $\boxed{\iiint_D 2\,dx\,dy\,dz=2\iint_{D_{xy}}dx\,dy\int_2^{\sqrt{8-x^2-y^2}}dz=2\iint_{D_{xy}}(\sqrt{8-x^2-y^2}-2)\,dx\,dy}$. Cambiando a coordenadas polares queda:

$$\boxed{\iiint_D 2\,dx\,dy\,dz=2\int_0^{2\pi}d\theta\underbrace{\int_0^2(\sqrt{8-r^2}-2)\,r\,dr}_{[-\frac{1}{3}(8-r^2)^{3/2}-r^2]_0^2}=2\,\frac{8(\sqrt{8}-1)-12}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{4}{3}\pi(8\sqrt{8}-20)}$$

Con lo cual, reemplazando en $(*)$ resulta:

$$\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma-28\pi=\frac{4}{3}\pi\,(8\sqrt{8}-20)$$

Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma_\uparrow}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\frac{4}{3}\pi(8\sqrt{8}+1)}$.

2. Dada la familia de curvas planas de ecuación $2x^2+y^2=C$, **calcule** la longitud de la curva perteneciente a la familia ortogonal entre los puntos $(0,0)$ y $(3,1)$.

Comenzamos obteniendo la ec. dif. de la flia. dato:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=C \\ 4x+2yy'=0 \to 2x+yy'=0 \text{ Ec. dif. de la flia. dato} \end{cases}$$

Reemplazando y' por $-1/y'$ resulta: $2x-y/y'=0$ Ec dif. de la flia. Ortogonal.

Operando desde esta última: $2x\dfrac{dy}{dx}=y$, de donde $2\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}\xrightarrow{\text{integrando}} 2\ln|y|=\ln|x|+A$, o bien, $|x|=e^{-A}e^{\ln|y|^2}\to|x|=e^{-A}y^2\to x=\underbrace{\pm e^{-A}}_{C}y^2$. Es decir, $x=C\,y^2$ es la ecuación de la familia ortogonal a la dada como dato.

En particular, la curva de ecuación $x=3y^2$ es la que pasa por los puntos dados y admite la ecuación vectorial $\vec{X}=\underbrace{(3y^2,\ y)}_{\vec{g}(y)}$ con $0\le y\le 1$. Con $\vec{g}\,'(y)=(6y,1)$ continua en $\Re$ y por lo tanto en $[0,1]$ (componentes continuas: constante y polinómica).

Su longitud puede calcularse mediante $\int_0^1\|\vec{g}\,'(y)\|dy=\int_0^1\sqrt{1+36y^2}\,dy=6\int_0^1\sqrt{1/36+y^2}\,dy$, integral del tipo $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ que se puede obtener (cambiando x por y) de una tabla de integrales.

Entonces la longitud buscada es:

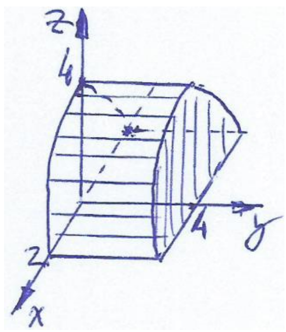
$$6\int_0^1\sqrt{1/36+y^2}\,dy=6\,[\tfrac{1}{2}y\sqrt{1/36+y^2}+\tfrac{1}{72}\operatorname{senh}^{-1}(6y)]_0^1=\sqrt{37}/2+\tfrac{1}{12}\operatorname{senh}^{-1}(6)$$

Dado que $\operatorname{senh}^{-1}(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$, la respuesta también puede expresarse mediante el "$\ln$".

Respuesta: $\boxed{\sqrt{37}/2+\operatorname{senh}^{-1}(6)/12\ \equiv\ \sqrt{37}/2+\ln(6+\sqrt{37})/12}$

---

3. **Calcule** la masa del cuerpo cuyos puntos cumplen con $0\le z\le 4-x^2$, $|y-2|\le 2$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xz.



Ya que $|y-2|\le 2 \Leftrightarrow -2\le y-2\le 2$, resulta $0\le y\le 4$.

$\text{Masa}(D)=\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, donde la densidad de masa es $\delta(x,y,z)=k\,|y|=k\,y$ pues todos los puntos de D tienen coordenada $y\ge 0$ y $k>0$ es la constante de proporcionalidad.

De esta manera, observando el gráfico, la proyección del cuerpo sobre el plano xy es D_{xy} definido por: $-2\le x\le 2,\ 0\le y\le 4$.

Entonces:

$$\text{Masa}(D)=\iiint_D k\,y\,dx\,dy\,dz=k\int_{-2}^{2}dx\int_0^4 y\,dy\int_0^{4-x^2}dz=k\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx\ \underbrace{\int_0^4 y\,dy}_{[y^2/2]_0^4=8}=8k[4x-x^3/3]_{-2}^{2}$$

Respuesta: $\boxed{\text{Masa}(D)=\frac{256}{3}k}$.

---

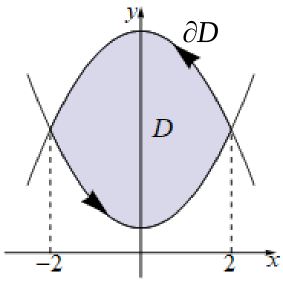
4. Dada $\vec{f}(x,y) = (3x - y^2 - g(y-x)\,,\, 2y + g(y-x))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x^2 + 2 \le y \le 10 - x^2$. **Indique** gráficamente cómo es la orientación que ha elegido para realizar la circulación.

Considerando que $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, ya que $\vec{f} \in C^1(\Re^2)$, podemos aplicar el teorema de Green:

$$\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy$$

donde D es la región plana que es dato, ∂D^+ representa a su frontera recorrida en sentido positivo (ver orientación en el gráfico) y

$$Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = -g'(y-x) - [-2y - g'(y-x)] = 2y$$



$$\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2y\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2+2}^{10-x^2} 2y\, dy = \int_{-2}^{2} \underbrace{[(10-x^2)^2 - (x^2+2)^2]}_{96-24x^2} dx = [96x - 8x^3]_{-2}^{2}$$

Respuesta: $\boxed{\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 256}$.

5. Sea π_0 el plano tangente en $(1,1,2/3)$ a la superficie de ecuación $\vec{X} = (v, uv, (6-2v-2uv)/3)$ con $(u,v) \in \Re^2$. **Calcule** el área del trozo de π_0 limitado por su intersección por los planos coordenados.

Denotando $\vec{F}(u,v) = (v, uv, (6-2v-2uv)/3)$, $\vec{F} \in C^1(\Re^2)$ por tener componentes polinómicas. Como $\vec{F}(u_0,v_0) = (v_0, u_0 v_0, (6-2v_0-2u_0 v_0)/3) = (1,1,2/3) \Leftrightarrow (u_0,v_0) = (1,1)$, $(1,1,2/3)$ es punto simple de la superficie y

$$\vec{n}_0 = [\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v]_{(1,1)} = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & v & -2v/3 \\ 1 & u & (-2-2u)/3 \end{vmatrix}\right|_{(1,1)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 1 & 1 & -4/3 \end{vmatrix} = (-2/3, -2/3, -1) \neq 0,$$

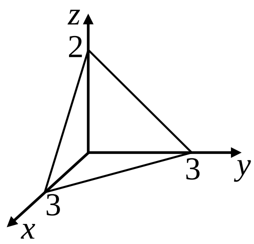
con lo cual $(1,1,2/3)$ también es punto regular, siendo $\vec{n}_0 = (-2/3, -2/3, -1)$ un vector normal a π_0.

Así, una ecuación para π_0 es $((x,y,z) - (1,1,2/3)) \cdot (-2/3,-2/3,-1) = 0$, es decir $2x + 2y + 3z = 6$.

El trozo de plano del cual se pide el área puede expresarse en la forma:

$$\vec{X} = \underbrace{(x,\, y,\, (6-2x-2y)/3)}_{\vec{G}(x,y)} \quad \text{con} \quad (x,y) \in D_{xy}$$

según puede observarse en el gráfico.



Con lo cual $\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{vmatrix} = (2/3, 2/3, 1) \quad \forall (x,y)$,

siendo $\|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\| = \sqrt{17}/3$.

Entonces, área $= \iint_{D_{xy}} \|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\|\, dx\, dy = \frac{\sqrt{17}}{3}\, \text{área}(D_{xy}) = \frac{\sqrt{17}}{3} \frac{3\,3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

Respuesta: $\boxed{\text{área} = \frac{3}{2}\sqrt{17}}$.