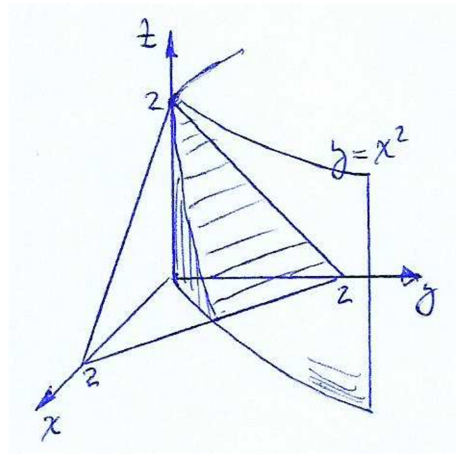
## TEMA 1

1. **Calcule** el volumen del cuerpo $D$ definido por: $x+y+z\le 2$ , $y\ge x^2$ , $z\ge 0$ , $x\ge 0$ .

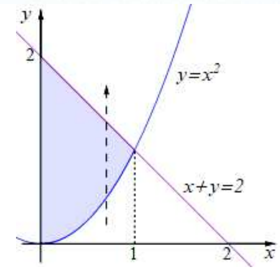
Observando el esquema de la derecha, vemos que la proyección de $D$ sobre el plano *xy* es la región $D_{xy}$ que, a su vez, hace de base del cuerpo.




$D_{xy}$ se representa sombreada en la figura inferior.

Dado que la cara de ecuación $y=x^2$ es perpendicular al plano $xy$, una recta paralela al eje $z$ que pasa por un punto interior a $D_{xy}$ "entra" al cuerpo por $z=0$ y "sale" por $z=2-x-y$.

Entonces resulta:




$$\operatorname{vol}(D)=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\underbrace{\int_0^{2-x-y}\mathrm{d}z}_{2-x-y}=$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\underbrace{\int_{x^2}^{2-x}(2-x-y)\,\mathrm{d}y}_{(*)}$$

Cálculo auxiliar: $\begin{cases}(*)=[(2-x)\,y-\frac{1}{2}y^2]_{x^2}^{2-x}=\frac{1}{2}(2-x)^2-[(2-x)\,x^2-\frac{1}{2}x^4]=\\ =2-2x-\frac{3}{2}x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\end{cases}$

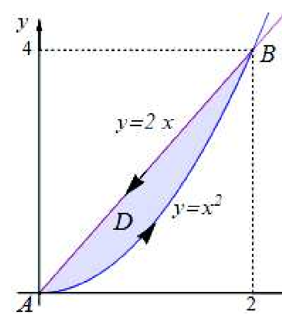
Reemplazando: $vol(D)=\int_0^1(2-2x-\frac{3}{2}x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4)\,\mathrm{d}x=[2x-x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5]_0^1=\frac{17}{20}$

Respuesta: $\boxed{\operatorname{vol}(D)=17/20}$.

---

2. Dado $\vec{f}:\Re^2\to\Re^2$ / $\vec{f}(x,y)=(\varphi(x)\,,\,y\,x^2)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la parábola de ecuación $y=x^2$ desde $A=(0,0)$ hasta $B=(2,4)$, sabiendo que dicha circulación a los largo del segmento $\overline{AB}$ resulta igual a 2.

La región $D$ sombreada en el gráfico tiene frontera $\partial D=C\cup\overline{AB}$, donde $C$ es la curva de ecuación $y=x^2$ con $0\le x\le 2$.
Como $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, podemos aplicar el teorema de Green. Denotando $P(x,y)=\varphi(x)$ y $Q(x,y)=y\,x^2$ resulta $Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)=2\,x\,y$, con lo cual $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_D 2\,x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ .




Siendo $\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ la circulación pedida se tiene que:

$$\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}+\underbrace{\int_{\overline{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}}_{-2\text{ (dato)}}=\iint_D 2\,x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\underbrace{\int_{x^2}^{2x}2\,x\,y\,\mathrm{d}y}_{x\,(4x^2-x^4)}=\int_0^2(4x^3-x^5)\,\mathrm{d}x$$

De donde $\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=2+[x^4-x^6/6]_0^2=2+16-64/6$, es decir, $\boxed{\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\frac{22}{3}}$.

---

3. El campo vectorial $\vec{f}:\Re^2 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(x,y)=(2x-2\,,\,2y)$ admite función potencial $\phi$ tal que $\phi(0{,}0)=3$. **Halle** el máximo y el mínimo absolutos de los valores de $\phi$ en el círculo de radio 2 con centro en el origen de coordenadas e **indique** en qué puntos se producen dichos extremos.

Siendo $\vec{f}=\nabla\phi$, deben ser $\begin{cases}\phi'_x(x,y)=2x-2\\ \phi'_y(x,y)=2y\end{cases} \Rightarrow \phi(x,y)=\int(2x-2)\,\mathrm{d}x = x^2-2x+\lambda(y)$, de

donde $\phi'_y(x,y)=\lambda'(y)=2y \Rightarrow \lambda(y)=y^2+C \Rightarrow \phi(x,y)=x^2-2x+y^2+C$ es la ecuación de la familia de las posibles funciones potenciales de $\vec{f}$. En particular, dado que $\phi(0{,}0)=3$, la función potencial correspondiente es:

$$\phi(x,y)=x^2-2x+y^2+3\ ,$$

cuyos valores debemos analizar en el círculo definido por $x^2+y^2\le 2^2$.

<u>En puntos interiores al círculo</u> ($x^2+y^2<2^2$), buscamos puntos donde $\nabla\phi=\vec{f}$ resulta nulo, es decir $(2x-2\,,\,2y)=(0{,}0) \Leftrightarrow x=1 \wedge y=0$, de donde tenemos $A=(1{,}0)$ que es interior.

$H(A)=\begin{vmatrix}\phi''_{xx}(A) & \phi''_{xy}(A)\\ \phi''_{yx}(A) & \phi''_{yy}(A)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0 \Rightarrow \phi(A)$ es extremo local. Como $\phi''_{xx}(A)=2>0$ se concluye que $\phi(A)=\phi(1{,}0)=2$ es un mínimo local.

<u>En la frontera del círculo</u> ($x^2+y^2=2^2$) los valores de $\phi(x,y)=x^2-2x+y^2+3$ resultan iguales a: $2^2-2x+3=7-2x=g(x)$ con $-2\le x\le 2$.

Dado que $g$ es estrictamente decreciente ($g'(x)=-2<0\ \ \forall x\in\Re$), en el intervalo de interés su valor máximo es $g(-2)=\phi(-2{,}0)=11$ y el mínimo es $g(2)=\phi(2{,}0)=3$.

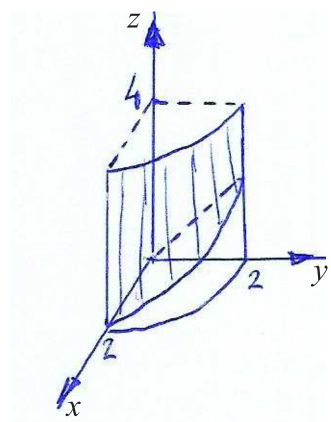
Comparando los valores en el interior con los de la frontera, resultan:

$\boxed{\phi(1{,}0)=2 \text{ el mínimo absoluto y } \phi(-2{,}0)=11 \text{ el máximo absoluto}}$.

4. **Calcule** el área del trozo de superficie cilíndrica $\Sigma$ de ecuación $x^2+y^2=4$ con $y\le z\le 4$, en el 1º octante.

La superficie admite la siguiente parametrización:

$\vec{X}=\underbrace{(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t),z)}_{\vec{F}(t,z)}$ con $0\le t\le \pi/2$, $\underbrace{2\,\mathrm{sen}(t)}_{y}\le z\le 4$




Siendo el $\text{área}(\Sigma)=\iint_{D_{tz}} \|\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z\|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$.

$$(\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z)(t,z)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ -2\,\mathrm{sen}(t) & 2\cos(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t),\,0)$$

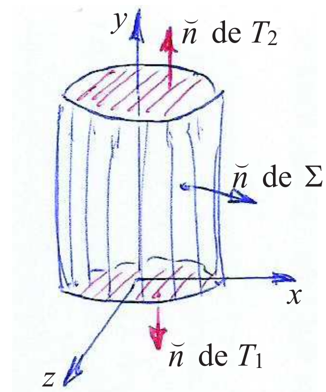
de donde, $\|(\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z)(t,z)\|=\sqrt{4(\cos^2(t)+\mathrm{sen}^2(t))}=2$

Entonces:

$$\text{área}(\Sigma)=\iint_{D_{tz}} 2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t\int_{2\,\mathrm{sen}(t)}^{4}\mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi/2}(4-2\,\mathrm{sen}(t))\,\mathrm{d}t =$$
$$=2\,[4t+2\cos(t)]_0^{\pi/2} = 2(2\pi-2)$$

$$\boxed{\text{área}(\Sigma)=4(\pi-1)}$$

5. Siendo $\Sigma$ el trozo de superficie abierta de ecuación $x^2+4z^2=16$ con $0\le y\le 4$, **calcule** el flujo de $\vec f$ a través de $\Sigma$ sabiendo que $\vec f(x,y,z)=(g(y,z),\,2y,\,y+z)$ con $\vec f\in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo orientó a $\Sigma$.

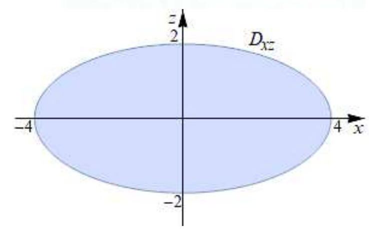



Si cerramos la superficie con las dos “tapas” $T_1$ en el plano $xz$ y $T_2$ en el plano $y=4$, queda definido un cuerpo cilíndrico $D$.

El flujo a través de la frontera $\partial D$ del cuerpo puede calcularse mediante el teorema de la divergencia, ya que $\vec f\in C^1(\Re^3)$. Resultando:

$$\underbrace{\iint_\Sigma \vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma+\iint_{T_1}\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma+\iint_{T_2}\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma}_{\oiint_{\partial D}\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma}=\iiint_D div(\vec f)\,\mathrm dx\,\mathrm dy\,\mathrm dz\ \ (\#)$$

donde los versores normales deben tomarse con orientación saliente del cuerpo, como se indica en la figura.




Las proyecciones del cuerpo $D$ y de ambas tapas $T_1,T_2$ contra el plano $xz$ dan la misma región $D_{xz}$ definida por:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{z^2}{2^2}\le 1$$

Entonces:

$$\iint_{T_1}\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma=\iint_{D_{xz}}[(g(y,z),\,2y,\,y+z)\cdot(0,-1,0)]_{y=0}\,\mathrm dx\,\mathrm dz=\iint_{D_{xz}}0\,\mathrm dx\,\mathrm dz=0$$

$$\iint_{T_2}\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma=\iint_{D_{xz}}[(g(y,z),\,2y,\,y+z)\cdot(0,1,0)]_{y=4}\,\mathrm dx\,\mathrm dz=8\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz$$

Como la divergencia del campo es $\nabla\cdot\vec f(x,y,z)=0+2+1=3$, la integral triple queda:

$$\iiint_D 3\,\mathrm dx\,\mathrm dy\,\mathrm dz=3\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz\underbrace{\int_0^4\mathrm dy}_{4}=12\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz$$

Reemplazando en (#) resulta:

$$\iint_\Sigma\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma+0+8\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz=12\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz\ \Rightarrow\ \iint_\Sigma\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma=4\underbrace{\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz}_{4\,2\,\pi}=32\pi.$$

La integral doble es el área encerrada por la elipse $(ab\pi)$, es decir $8\pi$. Se puede calcular, por ejemplo mediante el cambio de variables:

$$\begin{cases}x=4r\cos(\theta)\\ z=2r\,\mathrm{sen}(\theta)\end{cases}$$ que le corresponde $|J(r,\theta)|=4\,2\,r=8r$, entonces:

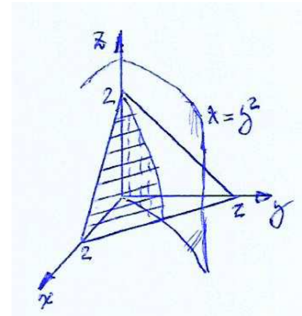
$$\iint_{D_{xz}}\mathrm dx\,\mathrm dz=\int_0^{2\pi}\mathrm d\theta\underbrace{\int_0^1 8r\,\mathrm dr}_{4[r^2]_0^1=4}=4\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi}=2\pi}=8\pi$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma\vec f\cdot\breve n\,\mathrm d\sigma=32\pi}$.

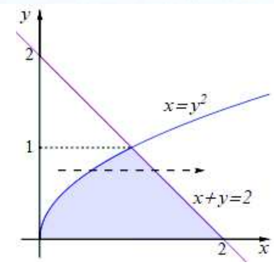
**TEMA 2**

1. **Calcule** el volumen del cuerpo $D$ definido por: $x+y+z\le 2$, $x\ge y^2$, $z\ge 0$, $y\ge 0$.

Observando el esquema de la derecha, vemos que la proyección de $D$ sobre el plano $xy$ es la región $D_{xy}$ que, a su vez, hace de base del cuerpo.
$D_{xy}$ se representa sombreada en la figura inferior.




Dado que la cara de ecuación $x=y^2$ es perpendicular al plano $xy$, una recta paralela al eje $z$ que pasa por un punto interior a $D_{xy}$ "entra" al cuerpo por $z=0$ y "sale" por $z=2-x-y$.
Entonces resulta:




$$\text{vol}(D)=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\underbrace{\int_0^{2-x-y}\mathrm{d}z}_{2-x-y}=$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\underbrace{\int_{y^2}^{2-y}(2-x-y)\,\mathrm{d}x}_{(*)}$$

Cálculo auxiliar: $\begin{cases}(*)=[(2-y)x-\frac{1}{2}x^2]_{y^2}^{2-y}=\frac{1}{2}(2-y)^2-[(2-y)y^2-\frac{1}{2}y^4]=\\ \quad =2-2y-\frac{3}{2}y^2+y^3+\frac{1}{2}y^4\end{cases}$

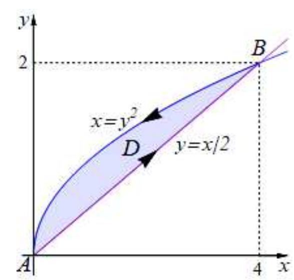
Reemplazando:

$$vol(D)=\int_0^1(2-2y-\tfrac{3}{2}y^2+y^3+\tfrac{1}{2}y^4)\mathrm{d}x=[2y-y^2-\tfrac{1}{2}y^3+\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{10}y^5]_0^1=\frac{17}{20}$$

Respuesta: $\boxed{\text{vol}(D)=17/20}$.

2. Dado $\vec{f}:\Re^2\to\Re^2\ /\ \vec{f}(x,y)=(1-x\,y^2,\varphi(y))$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la parábola de ecuación $x=y^2$ desde $A=(0,0)$ hasta $B=(4,2)$, sabiendo que dicha circulación a los largo del segmento $\overline{AB}$ resulta igual a 2.

La región $D$ sombreada en el gráfico tiene frontera $\partial D=C\cup\overline{AB}$, donde $C$ es la curva de ecuación $x=y^2$ con $0\le y\le 2$.




Como $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, podemos aplicar el teorema de Green. Denotando $P(x,y)=1-x\,y^2$ y $Q(x,y)=\varphi(y)$ resulta $Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)=2x\,y$, con lo cual $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_D 2x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ .

Siendo $\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-\int_{C_{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ la circulación pedida se tiene que:

$$\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}+\underbrace{\int_{\overline{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}}_{2\text{ (dato)}}=\iint_D 2x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\underbrace{\int_{y^2}^{2y}2x\,y\,\mathrm{d}x}_{y(4y^2-y^4)}=\int_0^2(4y^3-y^5)\,\mathrm{d}y$$

De donde $\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=2-[y^4-y^6/6]_0^2=2-(16-64/6)$, es decir, $\boxed{\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-\frac{10}{3}}$.

3. El campo vectorial $\vec{f}:\Re^2 \to \Re^2 \;/\; \vec{f}(x,y)=(2x\,,\,2y-2\,)$ admite función potencial $\phi$ tal que $\phi(0,0)=4$. **Halle** el máximo y el mínimo absolutos de los valores de $\phi$ en el círculo de radio 2 con centro en el origen de coordenadas e **indique** en qué puntos se producen dichos extremos.

Siendo $\vec{f}=\nabla\phi$, deben ser $\begin{cases}\phi'_x(x,y)=2x\\ \phi'_y(x,y)=2y-2\end{cases} \Rightarrow \phi(x,y)=\int(2y-2)\,\mathrm{d}y = y^2-2y+\lambda(x)$, de

donde $\phi'_x(x,y)=\lambda'(x)=2x \Rightarrow \lambda(x)=x^2+C \Rightarrow \phi(x,y)=x^2+y^2-2y+C$ es la ecuación de la familia de las posibles funciones potenciales de $\vec{f}$. En particular, dado que $\phi(0,0)=4$, la función potencial correspondiente es:

$$\phi(x,y)=x^2+y^2-2y+4\ ,$$

cuyos valores debemos analizar en el círculo definido por $x^2+y^2\le 2^2$.

<u>En puntos interiores al círculo</u> ($x^2+y^2<2^2$), buscamos puntos donde $\nabla\phi=\vec{f}$ resulta nulo, es decir $(2x\,,\,2y-2)=(0,0) \Leftrightarrow x=0 \wedge y=1$, de donde tenemos $A=(0,1)$ que es interior.

$H(A)=\begin{vmatrix}\phi''_{xx}(A) & \phi''_{xy}(A)\\ \phi''_{yx}(A) & \phi''_{yy}(A)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0 \Rightarrow \phi(A)$ es extremo local. Como $\phi''_{xx}(A)=2>0$ se concluye que $\phi(A)=\phi(0,1)=3$ es un mínimo local.

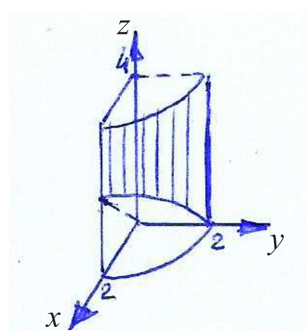
<u>En la frontera del círculo</u> ($x^2+y^2=2^2$) los valores de $\phi(x,y)=x^2+y^2-2y+4$ resultan iguales a: $2^2-2y+4=8-2y=g(y)$ con $-2\le y\le 2$.
Dado que $g$ es estrictamente decreciente ($g'(y)=-2<0\ \ \forall y\in\Re$), en el intervalo de interés su valor máximo es $g(-2)=\phi(0,-2)=12$ y el mínimo es $g(2)=\phi(0,2)=4$.
Comparando los valores en el interior con los de la frontera, resultan:

$$\boxed{\phi(0,1)=3 \text{ el mínimo absoluto y } \phi(0,-2)=12 \text{ el máximo absoluto}}.$$

4. **Calcule** el área del trozo de superficie cilíndrica $\Sigma$ de ecuación $x^2+y^2=4$ con $x\le z\le 4$, en el 1º octante.

La superficie admite la siguiente parametrización:

$\vec{X}=\underbrace{(2\cos(t),2\operatorname{sen}(t),z)}_{\vec{F}(t,z)}$ con $0\le t\le \pi/2$, $\underbrace{2\cos(t)}_{x}\le z\le 4$




Siendo el $\text{área}(\Sigma)=\iint_{D_{tz}} \|\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z\|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$.

$$(\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z)(t,z)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ -2\operatorname{sen}(t) & 2\cos(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2\cos(t),2\operatorname{sen}(t),\,0)$$

de donde, $\|(\vec{F}'_t\times\vec{F}'_z)(t,z)\|=\sqrt{4(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t))}=2$

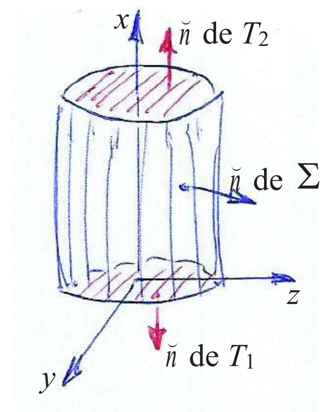
Entonces:

$$\text{área}(\Sigma)=\iint_{D_{tz}} 2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t\int_{2\cos(t)}^{4}\mathrm{d}z=2\int_0^{\pi/2}(4-2\cos(t))\,\mathrm{d}t=$$

$$=2\,[4t-2\operatorname{sen}(t)]_0^{\pi/2}=2(2\pi-2)$$

$$\boxed{\text{área}(\Sigma)=4(\pi-1)}$$

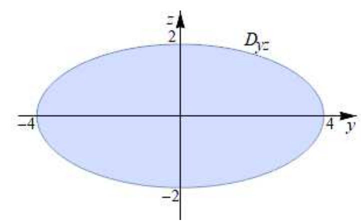
5. Siendo $\Sigma$ el trozo de superficie abierta de ecuación $y^2+4z^2=16$ con $0\le x\le 4$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de $\Sigma$ sabiendo que $\vec{f}(x,y,z)=(2x,\,g(x,z),\,x+z)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo orientó a $\Sigma$.




Si cerramos la superficie con las dos "tapas" $T_1$ en el plano $yz$ y $T_2$ en el plano $x=4$, queda definido un cuerpo cilíndrico $D$.
El flujo a través de la frontera $\partial D$ del cuerpo puede calcularse mediante el teorema de la divergencia, ya que $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$. Resultando:

$$\underbrace{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma+\iint_{T_1}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma+\iint_{T_2}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma}_{\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma}=\iiint_D div(\vec{f})\,dx\,dy\,dz\quad(\#)$$

donde los versores normales deben tomarse con orientación saliente del cuerpo, como se indica en la figura.
Las proyecciones del cuerpo $D$ y de ambas tapas $T_1,T_2$ contra el plano $yz$ dan la misma región $D_{yz}$ definida por:




$$\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{2^2}\le 1$$

Entonces:

$$\iint_{T_1}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{yz}}[(2x,\,g(x,z),\,y+z)\cdot(-1,0,0)]_{x=0}\,dy\,dz=\iint_{D_{yz}}0\,dy\,dz=0$$

$$\iint_{T_2}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{yz}}[(2x,\,g(x,z),\,y+z)\cdot(1,0,0)]_{x=4}\,dy\,dz=8\iint_{D_{yz}}dy\,dz$$

Como la divergencia del campo es $\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z)=2+0+1=3$, la integral triple queda:

$$\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz=3\iint_{D_{yz}}dy\,dz\underbrace{\int_0^4 dx}_{4}=12\iint_{D_{yz}}dy\,dz$$

Reemplazando en (#) resulta:

$$\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma+0+8\iint_{D_{yz}}dy\,dz=12\iint_{D_{yz}}dy\,dz\ \Rightarrow\ \iint_\Sigma\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=4\underbrace{\iint_{D_{yz}}dy\,dz}_{4\,2\,\pi}=32\pi\,.$$

La integral doble es el área encerrada por la elipse $(ab\pi)$, es decir $8\pi$. Se puede calcular, por ejemplo, mediante el cambio de variables:

$$\begin{cases}y=4r\cos(\theta)\\ z=2r\,\mathrm{sen}(\theta)\end{cases}$$ que le corresponde $|J(r,\theta)|=4\,2\,r=8r$, entonces:

$$\iint_{D_{yz}}dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\underbrace{\int_0^1 8r\,dr}_{4[r^2]_0^1=4}=4\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi}=2\pi}=8\pi$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=32\pi}$.