TEMA 1

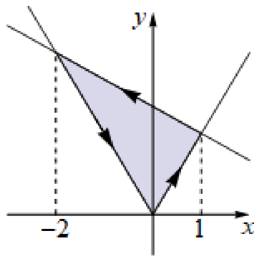
1. Sea π_o el plano normal en $(2,0,z_o)$ a la curva de ecuación $\vec{X}=(2t^2\,,\,t^2-t\,,\,2t+1)$ con $t\in\Re$. **Calcule** la longitud de la curva definida por la intersección de π_o con la superficie de ecuación $y=2x$ en el 1º octante.

   Denotando $\vec{g}(t)=(2t^2\,,\,t^2-t\,,\,2t+1)$, buscamos t_0 tal que $\vec{g}(t_0)=(2,0,z_o)$. Para ello:
$$\begin{cases} 2t_0^2=2 \;\Leftrightarrow\; t_0=-1\vee t_0=1 \\ t_0^2-t_0=0 \Leftrightarrow t_0=0\vee t_0=1 \\ z_o=2t_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow\; t_0=1 \;\Rightarrow\; \vec{g}(t_0)=\vec{g}(1)=(2,\,0,\,3)\,,$$
   siendo $\vec{g}'(1)=(4,1,2)$ normal a π_o. De donde, una ecuación de π_o es:
$$(\vec{X}-\vec{g}(1))\cdot\vec{g}'(1)=0 \;\;\to\;\; ((x,y,z)-(2,0,3))\cdot(4,1,2)=0 \;\;\to\;\; 4x+y+2z=14$$
   La intersección de este plano con el plano de ecuación $y=2x$ es la curva (recta) que admite la ecuación $\vec{X}=(x,2x,7-3x)$ con $x\in\Re$, con puntos en el 1º octante para $x>0\wedge 7-3x>0$, es decir, $0<x<7/3$. La longitud pedida es la del segmento de puntos extremos $A=(0,0,7)$ y $B=(7/3,14/3,0)$, que no cambia si se incluyen o no a dichos puntos extremos.
$$\|A-B\|=\sqrt{49/9+4\;49/9+49}\,.\quad \underline{\text{Respuesta}}\text{: } \boxed{7\sqrt{14}/3}.$$

---

2. Dado $\vec{f}(x,y)=(x\,y+e^{x^2}\,,\,x^2+e^{y^2})$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de $D=\{(x,y)\in\Re^2\;/\;y\ge|x|\,,\,x+3y\le 4\}$. **Indique** gráficamente con qué orientación decidió realizar la circulación.

   La región D es la sombreada en el gráfico, los puntos de su frontera ∂D pertenecen a $y=|x|$ y $x+3y=4$ que se intersecan en $(-2,2)$ y $(1,1)$. Dado que $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, por tener componentes que son suma de polinomio más composición de exponencial con polinomio, podemos aplicar el teorema de Green. La orientación de ∂D se indica en el gráfico.



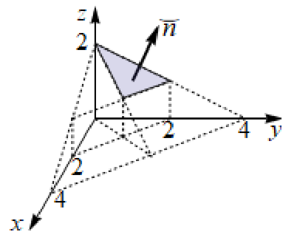
   Siendo $\vec{f}=(P,Q)$, $(Q'_x-P'_y)(x,y)=2x-x=x$.

   Entonces,
$$\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_D x\,dx\,dy=\int_{-2}^{0}x\,dx\underbrace{\int_{-x}^{(4-x)/3}dy}_{(4+2x)/3}+\int_0^1 x\,dx\underbrace{\int_{x}^{(4-x)/3}dy}_{(4-4x)/3}=$$
$$=\frac{2}{3}\underbrace{\int_{-2}^{0}(2x+x^2)\,dx}_{[x^2+x^3/3]_{-2}^{0}}+\frac{4}{3}\underbrace{\int_0^1(x-x^2)\,dx}_{[x^2/2-x^3/3]_0^1}=-\frac{8}{9}+\frac{2}{9}=-2/3$$

$$\underline{\text{Respuesta}}\text{: } \boxed{\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-2/3}.$$

---

3. Siendo $\vec{f}(x,y,z)=(2x,\,2y,\,2z)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de plano Σ de ecuación $x+y+2z=4$ con $x+y\le 2$, $y\ge x$, $x\ge 0$. Oriente Σ de manera que, en cada punto, su versor normal $\breve{n}$ cumpla con $\breve{n}\cdot\breve{k}>0$.



La superficie Σ admite ecuación vectorial:

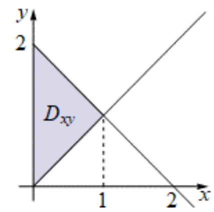
$$\vec{X}=\underbrace{(x,\,y,\,(4-x-y)/2)}_{\vec{F}(x,y)} \text{ con } (x,y)\in D_{xy}$$

donde D_{xy} es la proyección de Σ sobre el plano xy.

Un vector normal a Σ es:

$$\vec{n}=F'_x\times F'_y=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1/2\end{vmatrix}=(1/2,1/2,1) \text{ que es constante y cumple con } \breve{n}\cdot\breve{k}>0.$$

Entonces:



$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\vec{f}(\vec{F}(x,y))\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\,\|\vec{n}\|\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}4\,dx\,dy=$$

$$=4\int_0^1 dx\underbrace{\int_x^{2-x}dy}_{[y]_x^{2-x}}=4\int_0^1(2-2x)\,dx=4\,[2x-x^2]_0^1=4$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=4}$.

4. Dada la familia de curvas planas F de ecuación $y-Cx=C$, **calcule** el área de la región del semiplano $x\ge 0$ limitada por la curva Γ de la familia ortogonal a F que pasa por $(0,1)$.

Comenzamos hallando la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de F

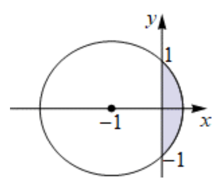
$$\begin{cases}y-Cx=C\\ y'-C=0\end{cases}\;\to\; y-y'x=y' \;\to\; \underbrace{y=y'(1+x)}_{\text{EDO de } F}\xrightarrow[\;]{\text{reemplazo } y' \text{ por } -1/y'}\underbrace{y=(-1/y')(1+x)}_{\substack{\text{EDO de flia.}\\ \text{ortogonal a } F}}$$

Es decir $y\,\dfrac{dy}{dx}=-(x+1)$ es la EDO de la familia ortogonal a F, de donde:

$$y\,dy=-(x+1)\,dx\;\to\;\int y\,dy=-\int(x+1)\,dx\;\to\;\tfrac{1}{2}y^2=-\tfrac{1}{2}(x+1)^2+A$$

es la ecuación de dicha familia. La curva que pasa por $(0,1)$ cumple con $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+A\Rightarrow A=1$, con lo cual la ecuación de Γ es $(x+1)^2+y^2=2$ (circunferencia con centro en $(-1,0)$ y radio $\sqrt{2}$).

El área que se pide es la de la región D sombreada en el gráfico, es decir:

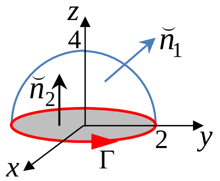


$$\text{área}(D)=\iint_D dx\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{-1+\sqrt{2-y^2}}dx=\int_{-1}^{1}(-1+\sqrt{2-y^2})\,dy$$

$$\text{área}(D)=[-y+\tfrac{1}{2}y\sqrt{2-y^2}+\operatorname{sen}^{-1}(y/\sqrt{2})]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-1$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}=\frac{\pi}{2}-1}$.

5. Sea $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ con rotor: $\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = (\alpha(x,y,z),\, \beta(x,y,z)\,,\, z+2)$. **Calcule** el flujo de $\nabla \times \vec{f}$ a través de la superficie abierta de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, orientada hacia z^+.



Según se observa en el gráfico, la superficie Σ_1 dada (con versor normal $\breve{n}_1$) tiene como borde la curva Γ, que también es borde de la superficie sombreada Σ_2 de ecuación:

$$z = 0 \text{ con } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ cuyo versor normal es } \breve{n}_2$$

En estas condiciones y adoptando como sentido de circulación en Γ el indicado en el gráfico, como por enunciado $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, aplicando el teorema del rotor resulta:

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 \, d\sigma$$

Siendo $\breve{n}_2 = (0,0,1)$, en puntos de Σ_2 resulta $\nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 = [z+2]_{z=0} = 2$, por lo tanto:

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} 2 \, dx\,dy = 2 \text{ área}(D_{xy}) = 2\,\pi\, 2^2$$

Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = 8\pi}$.

TEMA 2

1. Sea π_o el plano normal en $(0, 2, z_o)$ a la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2 - t\,,\, 2t^2,\, 2t+1)$ con $t \in \Re$. **Calcule** la longitud de la curva definida por la intersección de π_o con la superficie de ecuación $x = 2y$ en el 1º octante.

   Denotando $\vec{g}(t) = (t^2 - t,\, 2t^2,\, 2t+1)$, buscamos t_0 tal que $\vec{g}(t_0) = (0, 2, z_o)$. Para ello:

$$\begin{cases} t_0^2 - t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0 \vee t_0 = 1 \\ 2t_0^2 = 2 \;\; \Leftrightarrow t_0 = -1 \vee t_0 = 1 \\ z_o = 2t_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = 1 \Rightarrow \vec{g}(t_0) = \vec{g}(1) = (0, 2, 3),$$

   siendo $\vec{g}\,'(1) = (1, 4, 2)$ normal a π_o. De donde, una ecuación de π_o es:

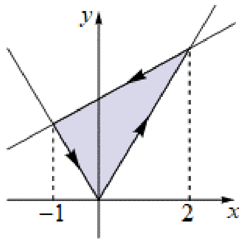
$$(\vec{X} - \vec{g}(1)) \cdot \vec{g}\,'(1) = 0 \;\to\; ((x, y, z) - (0,2,3)) \cdot (1,4,2) = 0 \;\to\; x + 4y + 2z = 14$$

   La intersección de este plano con el plano de ecuación $x = 2y$ es la curva (recta) que admite la ecuación $\vec{X} = (2y, y, 7-3y)$ con $y \in \Re$, con puntos en el 1º octante para $y > 0 \wedge 7 - 3y > 0$, es decir, $0 < y < 7/3$. La longitud pedida es la del segmento de puntos extremos $A = (0,0,7)$ y $B = (14/3, 7/3, 0)$, que no cambia si se incluyen o no a dichos puntos extremos.

$$\| A - B \| = \sqrt{4\;49/9 + 49/9 + 49}\,.$$ <u>Respuesta</u>: $\boxed{7\sqrt{14}/3}$.

2. Dado $\vec{f}(x, y) = (4xy + e^{x^2},\, 3x^2 + e^{y^2})$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y \geq |x|,\, 3y - x \leq 4\}$. **Indique** gráficamente con qué orientación decidió realizar la circulación.

   La región D es la sombreada en el gráfico, los puntos de su frontera ∂D pertenecen a $y = |x|$ y $3y - x = 4$ que se intersecan en $(-1,1)$ y $(2,2)$. Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^2)$, por tener componentes que son suma de polinomio más composición de exponencial con polinomio, podemos aplicar el teorema de Green. La orientación de ∂D se indica en el gráfico.



   Siendo $\vec{f} = (P, Q)$, $(Q'_x - P'_y)(x, y) = 6x - 4x = 2x$.

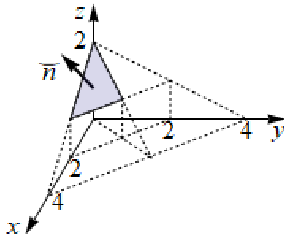
   Entonces,

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2x \,dx\,dy = 2\int_{-1}^{0} x\,dx \underbrace{\int_{-x}^{(4+x)/3} dy}_{(4+4x)/3} + 2\int_0^2 x\,dx \underbrace{\int_{x}^{(4+x)/3} dy}_{(4-2x)/3} =$$

$$= \frac{8}{3}\underbrace{\int_{-1}^{0}(x + x^2)\,dx}_{[x^2/2 + x^3/3]_{-1}^{0}} + \frac{4}{3}\underbrace{\int_0^2 (2x - x^2)\,dx}_{[x^2 - x^3/3]_0^2} = -\frac{4}{9} + \frac{16}{9} = 4/3$$

<u>Respuesta</u>: $\boxed{\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4/3}$.

3. Siendo $\vec{f}(x,y,z)=(2x,\,2y,\,2z)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x+y+2z=4$ con $x+y\le 2$, $y\le x$, $y\ge 0$. Oriente Σ de manera que, en cada punto, su versor normal $\breve{n}$ cumpla con $\breve{n}\cdot\breve{k}>0$.



La superficie Σ admite ecuación vectorial:

$$\vec{X}=\underbrace{(x,\,y,\,(4-x-y)/2)}_{\vec{F}(x,y)}\ \text{ con } (x,y)\in D_{xy}$$

donde D_{xy} es la proyección de Σ sobre el plano xy.

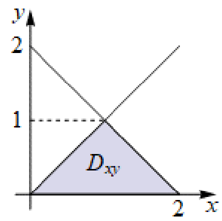
Un vector normal a Σ es:

$$\vec{n}=F'_x\times F'_y=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1/2\end{vmatrix}=(1/2,1/2,1)\ \text{que es constante y cumple con } \breve{n}\cdot\breve{k}>0.$$

Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\vec{f}(\vec{F}(x,y))\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\,\|\vec{n}\|\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}4\,dx\,dy=$$

$$=4\int_0^1 dy\underbrace{\int_y^{2-y}dx}_{[x]_y^{2-y}}=4\int_0^1(2-2y)\,dy=4\,[2y-y^2]_0^1=4$$



Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=4}$.

4. Dada la familia de curvas planas F de ecuación $y-Cx=2C$, **calcule** el área de la región del semiplano $x\ge 0$ limitada por la curva de la familia ortogonal a F que pasa por $(0,2)$.

Comenzamos hallando la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de F

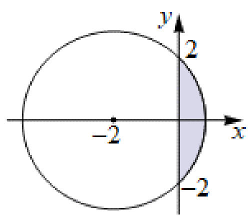
$$\begin{cases}y-Cx=2C\\ y'-C=0\end{cases}\ \to\ y-y'x=2y'\ \to\ \underbrace{y=y'(2+x)}_{\text{EDO de } F}\ \xrightarrow[y' \text{ por } -1/y']{\text{reemplazo}}\ \underbrace{y=(-1/y')(2+x)}_{\text{EDO de flia. ortogonal a } F}$$

Es decir $y\,\dfrac{dy}{dx}=-(x+2)$ es la EDO de la familia ortogonal a F, de donde:

$$y\,dy=-(x+2)\,dx\ \to\ \int y\,dy=-\int(x+2)\,dx\ \to\ \tfrac{1}{2}y^2=-\tfrac{1}{2}(x+2)^2+A$$

es la ecuación de dicha familia. La curva que pasa por $(0,2)$ cumple con $2=-2+A\Rightarrow A=4$, con lo cual la ecuación de Γ es $(x+2)^2+y^2=8$ (circunferencia con centro en $(-2,0)$ y radio $\sqrt{8}$).

El área que se pide es la de la región D sombreada en el gráfico, es decir:



$$\text{área}(D)=\iint_D dx\,dy=\int_{-2}^{2}dy\int_0^{-2+\sqrt{8-y^2}}dx=\int_{-2}^{2}(-2+\sqrt{8-y^2})\,dy$$

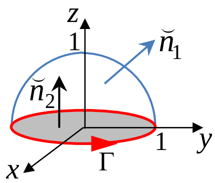
$$\text{área}(D)=[-2y+\tfrac{1}{2}y\sqrt{8-y^2}+4\,\text{sen}^{-1}(y/\sqrt{8})]_{-2}^{2}=2\pi-4$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}=2\pi-4}$.

5. Sea $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ con rotor: $\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = (\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), z+8)$. **Calcule** el flujo de $\nabla \times \vec{f}$ a través de la superficie abierta de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, orientada hacia z^+.

Según se observa en el gráfico, la superficie Σ_1 dada (con versor normal $\breve{n}_1$) tiene como borde la curva Γ, que también es borde de la superficie sombreada Σ_2 de ecuación:

$$z = 0 \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ cuyo versor normal es } \breve{n}_2$$



6.

En estas condiciones y adoptando como sentido de circulación en Γ el indicado en el gráfico, como por enunciado $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, aplicando el teorema del rotor resulta:

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 \, d\sigma$$

Siendo $\breve{n}_2 = (0,0,1)$, en puntos de Σ_2 resulta $\nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 = [z+8]_{z=0} = 8$, por lo tanto:

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_2 \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} 8 \, dx\,dy = 8 \text{ área}(D_{xy}) = 8\,\pi\,1^2$$

Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}_1 \, d\sigma = 8\pi}$.