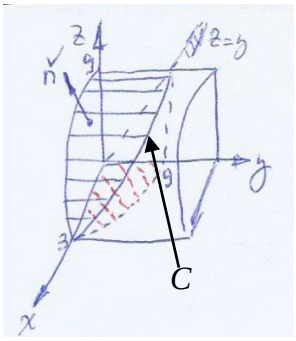
TEMA 1

1. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (x\,y, z\,x, 2\,y\,z)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = 9 - x^2$ con $z \geq y$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, orientada hacia z^+.



En el esquema se observa Σ rayada en color azul y su proyección D_{xy} rayada en rojo sobre el plano xy. La curva C es:

$$C = \begin{cases} z = 9 - x^2 \\ z = y \end{cases} \equiv \begin{cases} y = 9 - x^2 \\ z = y \end{cases}$$

Con lo cual $D_{xy} = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ y \leq 9 - x^2 \ \wedge \ x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$.

Con esto Σ admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(x,\ y,\ 9 - x^2)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D_{xy}$, siendo

$(\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y)(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2x, 0, 1)$ que tiene la orientación pedida (hacia z^+). Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{F}(x,y)) \cdot \frac{\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y}{\|\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y\|} \| \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y \| \, dx\, dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \underbrace{(x\,y,\ 9x - x^3,\ 18\,y - 2\,x^2 y) \cdot (2\,x, 0, 1)}_{2\,x^2 y + 18\,y - 2\,x^2 y = 18\,y} dx\, dy = \int_0^3 dx \int_0^{9-x^2} 18\,y\, dy =$$

$$= 9 \int_0^3 (9 - x^2)^2 dx = 9[81x - 6x^3 + x^5/5]_0^3 = 5832/5$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 5832/5}$.

---

2. Dado $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-4\,y}{x^2+y^2}, \frac{4\,x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$, **analice** si $\vec{f}$ admite función potencial en dicho dominio.

La matriz jacobiana $D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} & \frac{4\,y^2 - 4\,x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{4\,y^2 - 4\,x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-8\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ resulta continua y simétrica en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$.

Como $\Re^2 - \{\vec{0}\}$ no es simplemente conexo, debemos calcular la integral de línea de $\vec{f}$ alrededor de cualquier curva cerrada que rodee al origen de coordenadas. En este caso conviene utilizar una circunferencia del tipo $x^2 + y^2 = 1$ pues facilitará los cálculos al evaluar el campo en puntos de la misma.
Si para esta curva C adoptamos la ecuación $\vec{X} = \underbrace{(\cos(u),\ \text{sen}(u))}_{\vec{g}(u)}$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, se tiene que:

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{g}(u)) \cdot \vec{g}'(u)\, du = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-4\,\text{sen}(u), 4\cos(u)) \cdot (-\text{sen}(u), \cos(u))}_{=4} du = 4 \int_0^{2\pi} du = 8\pi$$

Como $\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq 0$, no existe función potencial.

Respuesta: $\boxed{\vec{f} \text{ no admite función potencial en } \Re^2 - \{\vec{0}\}}$.

---

3. **Demuestre** que $f(x,y) = e^{x^2+y^2+2x+5}$ produce un mínimo local en un punto (x_o, y_o) y **calcule** el volumen del cuerpo H definido por $0 \le z \le f(x,y)$ con $(x,y) \in D_{xy}$, donde D_{xy} es un círculo de radio $R = 1$ con centro en el mencionado punto (x_o, y_o).

Dado que f es la composición de un polinomio con una exponencial, $f \in C^2(\Re^2)$, entonces podemos analizar extremos locales en puntos estacionarios mediante el hessiano.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= (2x+2)\, e^{x^2+y^2+2x+5} \\ f'_y(x,y) &= 2y e^{x^2+y^2+2x+5} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} (2x+2)\, e^{x^2+y^2+2x+5} = 0 \\ 2y\, e^{x^2+y^2+2x+5} = 0 \end{cases} \rightarrow (x_o, y_o) = (-1,0)\ .$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= [2+(2x+2)^2]\, e^{x^2+y^2+2x+5} \\ f''_{xy}(x,y) &= 2y(2x+2) e^{x^2+y^2+2x+5} \\ f''_{yy}(x,y) &= (2+4y^2)\, e^{x^2+y^2+2x+5} \end{aligned} \rightarrow H(-1.0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-1,0) & f''_{xy}(-1,0) \\ f''_{xy}(-1,0) & f''_{yy}(-1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^4 & 0 \\ 0 & 2e^4 \end{vmatrix} = 4e^8 > 0$$

Dado que $H(-1,0) > 0$ y $f''_{xx}(-1,0) = 2e^4 > 0$, queda demostrado que $f(-1,0) = e^4$ es mínimo local. Acorde al enunciado el cuerpo está apoyado en el plano xy $(z = 0)$, el "techo" es $f(x,y) > 0$ y la base D_{xy} es el círculo de radio 1 con centro en $(x_o, y_o) = (-1,0)$, es decir, $(x+1)^2 + y^2 \le 1$.

Luego $\text{Vol}(H) = \iiint_H dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{D_{xy}} e^{x^2+y^2+2x+5}\, dx\,dy$.

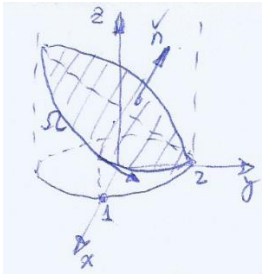
Aplicando el cambio de variables $\begin{cases} x = -1 + r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = r$, queda:

$$\text{Vol}(H) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 e^{r^2+4}\, r\, dr}_{[e^{r^2+4}/2]_0^1} = \frac{e^5 - e^4}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi(e^5 - e^4).$$ Respuesta: $\boxed{\text{Vol}(H) = \pi(e^5 - e^4)}$.

---

4. Sea la curva Ω definida por la intersección de $y + z = 2$ con $4x^2 + y^2 = 4$, orientada de manera que su versor tangente en $(1,0,2)$ tiene componente en $\breve{k}$ negativa. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Ω sabiendo que $\vec{f}(x,y,z) = (z^2, \varphi(z), y^2)$ con φ' continua en $\Re$.

En el gráfico de la derecha se observa que Ω es cerrada. Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ pues φ' es continua en $\Re$ y las otras dos componentes son polinómicas podemos aplicar el teorema del rotor.
Vamos a usar como superficie el trozo de plano Σ de ecuación $y + z = 2$ con $4x^2 + y^2 \le 4$ orientado con $\breve{n}$ según se indica en la figura, en correspondencia con la orientación dada para Ω.



$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & \varphi(z) & y^2 \end{vmatrix} = (2y - \varphi'(z),\, 2z,\, 0)$$

Ecuación de Σ: $\vec{X} = \underbrace{(x,\ y,\ 2-y)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D_{xy}$ definido por $4x^2 + y^2 \le 4$.

Normal a Σ: $\vec{n} = F'_x(x,y) \times F'_y(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$ correctamente orientada según gráfico.

$$\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \nabla\times\vec{f}(x,y,2-y)\cdot\tfrac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}\,\|(0,1,1)\|\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} (4-2y)\,dx\,dy$$

Aplicando el cambio de variables definido por $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 2r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = 2r$, se tiene:

$$\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 [4-4r\,\mathrm{sen}(\theta)]2r\,dr}_{[4r^2-\frac{8}{3}\mathrm{sen}(\theta)r^3]_0^1} = \int_0^{2\pi} [4-\tfrac{8}{3}\mathrm{sen}(\theta)]d\theta = [4\theta+\tfrac{8}{3}\cos(\theta)]_0^{2\pi} = 8\pi$$

Respuesta: $\boxed{\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = 8\pi}$.

---

5. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (2+x\,g(x),\, 3+y\,g(x),\, 4-3z\,g(x))$ con $\vec{f}(1,0,0) = (2,3,4)$ y $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, **halle** una $g(x)$ de manera que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera ∂H del cubo H definido por $[-a,a]\times[-a,a]\times[-a,a]$ con $a>0$ resulte entrante y con módulo igual al doble del volumen de H.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, en el cual se supone que ∂H está orientado hacia afuera de H. Por ello, para que el flujo resulte entrante debe ser negativo, es decir: $\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\;dx\,dy\,dz$ donde $\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) = g(x)+x\,g'(x)+g(x)-3g(x) = x\,g'(x)-g(x)$

Si por ejemplo imponemos que $\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) = -2$ constante, tendremos que:

$$\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_H \underbrace{\nabla\cdot\vec{f}}_{-2}\,dx\,dy\,dz = -2\iiint_H dx\,dy\,dz = -2\ \mathrm{vol}(H)$$, que es lo que se pide.

Entonces, una solución es hallar $g(x)$ tal que $x\,g'(x)-g(x) = -2$ con $g(1)=0$ que surge de imponer que $\vec{f}(1,0,0) = (2,3,4)$. Luego:

$$x\,g'(x) = g(x)-2 \;\rightarrow\; \frac{dg(x)}{g(x)-2} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integrando}} \ln|g(x)+2| = \ln|x| + A$$

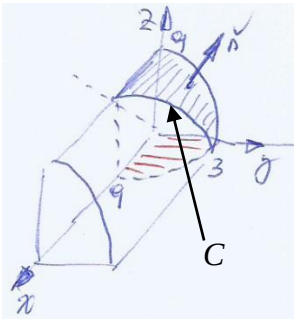
$$\rightarrow |g(x)-2| = e^A \underbrace{e^{\ln|x|}}_{|x|} \;\rightarrow\; g(x)-2 = \underbrace{\pm e^A}_{C}\,x\,.$$

Con lo cual todas las posibles expresiones (solución general) que se obtienen son $g(x) = 2+Cx$ (donde se sostiene el caso $C=0$ pues $g(x)=2$ es solución de la ecuación diferencial), imponiendo ahora que $g(1)=0$ es necesario que $C=-2$.

Respuesta: $\boxed{g(x) = 2-2x}$.

TEMA 2

1. Dado $\vec{f}(x,y,z)=(xz,\,xy,\,2xz)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z=9-y^2$ con $z\geq x,\ y\geq 0,\ x\geq 0$, orientada hacia z^+.



En el esquema se observa Σ rayada en color azul y su proyección D_{xy} rayada en rojo sobre el plano xy. La curva C es:

$$C=\begin{cases} z=9-y^2 \\ z=x \end{cases} \equiv \begin{cases} x=9-y^2 \\ z=x \end{cases}$$

Con lo cual $D_{xy}=\{(x,y)\in\Re^2 \ / \ x\leq 9-y^2 \ \wedge\ x\geq 0 \ \wedge\ y\geq 0\}$

Con esto Σ admite la parametrización $\vec{X}=\underbrace{(x,\ y,\ 9-y^2)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y)\in D_{xy}$, siendo

$$(\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y)(x,y)=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix}=(0,\,2y,\,1)$$ que tiene la orientación pedida (hacia z^+). Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{F}(x,y))\cdot\frac{\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y}{\|\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y\|}\,\|\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y\|\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{D_{xy}} \underbrace{(x(9-y^2),\,xy,\,18x-2xy^2)\cdot(0,2y,1)}_{2xy^2+18x-2x^2y=18x}\,dx\,dy=\int_0^3 dy\int_0^{9-y^2}18x\,dx=$$

$$=9\int_0^3(9-y^2)^2\,dy=9[81y-6y^3+y^5/5]_0^3=5832/5$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=5832/5}$.

---

2. Dado $\vec{f}(x,y)=\left(\frac{-2y}{x^2+y^2},\,\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\Re^2-\{\vec{0}\}$, **analice** si $\vec{f}$ admite función potencial en dicho dominio.

La matriz jacobiana $D\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ resulta continua y simétrica en $\Re^2-\{\vec{0}\}$.

Como $\Re^2-\{\vec{0}\}$ no es simplemente conexo, debemos calcular la integral de línea de $\vec{f}$ alrededor de cualquier curva cerrada que rodee al origen de coordenadas. En este caso conviene utilizar una circunferencia del tipo $x^2+y^2=1$ pues facilitará los cálculos al evaluar el campo en puntos de la misma.

Si para esta curva C adoptamos la ecuación $\vec{X}=\underbrace{(\cos(u),\,\mathrm{sen}(u))}_{\vec{g}(u)}$ con $0\leq u\leq 2\pi$, se tiene que:

$$\oint_{C^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_0^{2\pi}\vec{f}(\vec{g}(u))\cdot\vec{g}'(u)\,du=\int_0^{2\pi}\underbrace{(-2\mathrm{sen}(u),\,2\cos(u))\cdot(-\mathrm{sen}(u),\cos(u))}_{=2}\,du=2\int_0^{2\pi}du=4\pi$$

Como $\oint_{C^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}\neq 0$, no existe función potencial.

Respuesta: $\boxed{\vec{f}\text{ no admite función potencial en }\Re^2-\{\vec{0}\}}$.

---

3. **Demuestre** que $f(x,y) = e^{x^2+y^2+2y+5}$ produce un mínimo local en un punto (x_o, y_o) y **calcule** el volumen del cuerpo H definido por $0 \le z \le f(x,y)$ con $(x,y) \in D_{xy}$, donde D_{xy} es un círculo de radio $R = 1$ con centro en el mencionado punto (x_o, y_o).

Dado que f es la composición de un polinomio con una exponencial, $f \in C^2(\Re^2)$, entonces podemos analizar extremos locales en puntos estacionarios mediante el hessiano.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x\, e^{x^2+y^2+2y+5} \\ f'_y(x,y) &= (2y+2) e^{x^2+y^2+2y+5} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 2x\, e^{x^2+y^2+2y+5} = 0 \\ (2y+2)\, e^{x^2+y^2+2y+5} = 0 \end{cases} \rightarrow (x_o, y_o) = (0,-1).$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= (2+4x^2)\, e^{x^2+y^2+2y+5} \\ f''_{xy}(x,y) &= 2x(2y+2) e^{x^2+y^2+2y+5} \\ f''_{yy}(x,y) &= [2+(2y+2)^2]\, e^{x^2+y^2+2y+5} \end{aligned} \rightarrow H(0,-1) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,-1) & f''_{xy}(0,-1) \\ f''_{xy}(0,-1) & f''_{yy}(0,-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^4 & 0 \\ 0 & 2e^4 \end{vmatrix} = 4e^8 > 0$$

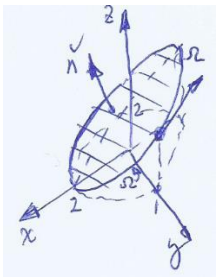
Dado que $H(0,-1) > 0$ y $f''_{xx}(0,-1) = 2e^4 > 0$, queda demostrado que $f(0,-1) = e^4$ es mínimo local. Acorde al enunciado el cuerpo está apoyado en el plano xy ($z = 0$), el "techo" es $f(x,y) > 0$ y la base D_{xy} es el círculo de radio 1 con centro en $(x_o, y_o) = (0,-1)$, es decir, $x^2 + (y+1)^2 \le 1$.

Luego $\text{Vol}(H) = \iiint_H dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{D_{xy}} e^{x^2+y^2+2y+5}\, dx\,dy$.

Aplicando el cambio de variables $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = -1 + r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = r$, queda:

$$\text{Vol}(H) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 e^{r^2+4}\, r\, dr}_{[e^{r^2+4}/2]_0^1} = \frac{e^5 - e^4}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi(e^5 - e^4).$$ Respuesta: $\boxed{\text{Vol}(H) = \pi(e^5 - e^4)}$.

4. Sea la curva Ω definida por la intersección de $x + z = 2$ con $x^2 + 4y^2 = 4$, orientada de manera que su versor tangente en $(0,1,2)$ tiene componente en $\breve{k}$ positiva. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Ω sabiendo que $\vec{f}(x,y,z) = (\varphi(z),\, z^2,\, x^2)$ con φ' continua en $\Re$.



En el gráfico de la derecha se observa que Ω es cerrada. Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ pues φ' es continua en $\Re$ y las otras dos componentes son polinómicas podemos aplicar el teorema del rotor.
Vamos a usar como superficie el trozo de plano Σ de ecuación $x + z = 2$ con $x^2 + 4y^2 \le 4$ orientado con $\breve{n}$ según se indica en la figura, en correspondencia con la orientación dada para Ω.

$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \varphi(z) & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (-2z,\, \varphi'(z) - 2x,\, 0)$$

Ecuación de Σ: $\vec{X} = \underbrace{(x,\, y,\, 2-x)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D_{xy}$ definido por $x^2 + 4y^2 \le 4$.

Normal a Σ: $\vec{n} = F'_x(x,y) \times F'_y(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,\, 0,\, 1)$ correctamente orientada según gráfico.

$$\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \nabla\times\vec{f}(x,y,2-x)\cdot\tfrac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}\,\|(1,0,1)\|\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} (2x-4)\,dx\,dy$$

Aplicando el cambio de variables definido por $\begin{cases} x = 2r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = 2r$, se tiene:

$$\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 [4r\cos(\theta)-4]2r\,dr}_{[\frac{8}{3}\cos(\theta)r^3-4r^2]_0^1} = \int_0^{2\pi} [\tfrac{8}{3}\cos(\theta)-4]\,d\theta = [\tfrac{8}{3}\mathrm{sen}(\theta)-4\theta]_0^{2\pi} = -8\pi$$

Respuesta: $\boxed{\oint_{\Omega^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -8\pi}$.

---

5. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (7+x\,g(x),\ 2-4\,y\,g(x),\ 4+z\,g(x))$ con $\vec{f}(1,0,0) = (7,2,4)$ y $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, **halle** una $g(x)$ de manera que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera ∂H del cubo H definido por $[-b,b]\times[-b,b]\times[-b,b]$ con $b > 0$ resulte entrante y con módulo igual al doble del volumen de H.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, en el cual se supone que ∂H está orientado hacia afuera de H. Por ello, para que el flujo resulte entrante debe ser negativo, es decir:

$$\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\;dx\,dy\,dz \quad \text{donde}$$

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) = g(x) + x\,g'(x) - 4g(x) + g(x) = x\,g'(x) - 2\,g(x)$$

Si por ejemplo imponemos que $\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) = -2$ constante, tendremos que:

$$\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_H \underbrace{\nabla\cdot\vec{f}}_{-2}\,dx\,dy\,dz = -2\iiint_H dx\,dy\,dz = -2\ \mathrm{vol}(H)$$, que es lo que se pide.

Entonces, una solución es hallar $g(x)$ tal que $x\,g'(x) - 2\,g(x) = -2$ con $g(1) = 0$ que surge de imponer que $\vec{f}(1,0,0) = (7,2,4)$. Luego:

$$x\,g'(x) = 2\,g(x) - 2 \;\rightarrow\; \frac{dg(x)}{g(x)-1} = 2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integrando}} \ln|g(x)-1| = 2\ln|x| + A$$

$$\rightarrow |g(x)-1| = e^A \underbrace{e^{\ln|x|^2}}_{x^2} \;\rightarrow\; g(x)-1 = \underbrace{\pm e^A}_{C}\,x^2 .$$

Con lo cual todas las posibles expresiones (solución general) que se obtienen son $g(x) = 1 + C\,x^2$ (donde se sostiene el caso $C = 0$ pues $g(x) = 1$ es solución de la ecuación diferencial), imponiendo ahora que $g(1) = 0$ es necesario que $C = -1$.

Respuesta: $\boxed{g(x) = 1 - x^2}$.