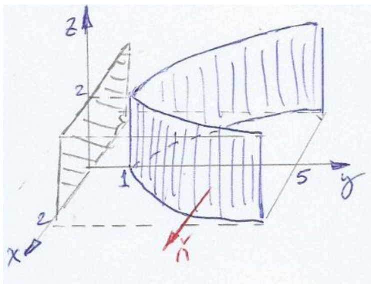
TEMA 1

1. Sean la superficie Σ de ecuación $y = x^2 + 1$ con $y \le 5$, $0 \le z \le 2$ y el campo vectorial $\vec{f}$ definido en $\Re^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (3x,\, 2y,\, xz)$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ **indicando** gráficamente cómo decidió orientar a la superficie.

La superficie admite la ecuación vectorial:



$$\vec{X} = \underbrace{(x,\, x^2+1,\, z)}_{\vec{F}(x,z)} \text{ con } (x,z) \in D_{xz}\,,$$

donde, como surge de la representación gráfica,

$$D_{xz} = \{(x,z) \in \Re^2 \,/\, -2 \le x \le 2 \wedge 0 \le z \le 2\}$$

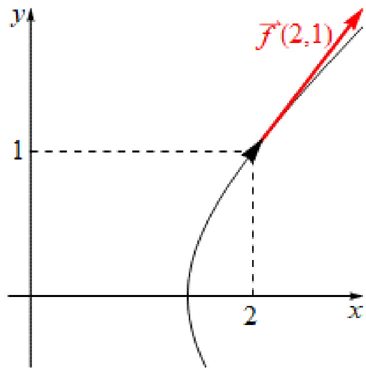
es la proyección de Σ sobre el plano xz.

Una normal a la superficie es $\vec{n} = \vec{F}'_x \times \vec{F}'_z = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2x,\, -1,\, 0)$, cuya orientación coincide con la elegida para Σ y que se indica con un $\breve{n}$ en el gráfico. Luego,

$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} \vec{f}(\vec{F}(x,z))\cdot \frac{\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z}{\|\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z\|}\, \|\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z\|\, dx\, dz = \iint_{D_{xz}} \underbrace{(3x, 2(x^2+1), xz)\cdot(2x, -1, 0)}_{4x^2-2}\, dxdz$$

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\, d\sigma} = \int_{-2}^{2} dx \underbrace{\int_0^2 (4x^2-2)\, dz}_{(4x^2-2)[z]_0^2} = 2\int_{-2}^{2} (4x^2-2)\, dx = 2\left[\tfrac{4}{3}x^3 - 2x\right]_{-2}^{2} = \boxed{80/3}.$$

2. Sabiendo que $\phi(x, y) = x^2 y + 1$ es la función potencial del campo $\vec{f}$ en $\Re^2$, **halle** una ecuación para la línea de campo de $\vec{f}$ que pasa por el punto $(2,1)$ e **indique** gráficamente la orientación de dicha línea en ese punto.



Siendo $\vec{f} = \nabla\phi$, resulta $\vec{f}(x, y) = (2xy,\, x^2)$ en $\Re^2$. Entonces una ecuación diferencial para las líneas de campo de $\vec{f}$ se obtiene imponiendo que $d\vec{s} \,//\, \vec{f}$, donde $d\vec{s} = (dx, dy)$ es el diferencial vectorial de longitud de arco de curva. De ello resulta que:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2}$$

Es decir $x\,dx = 2y\,dy \;\rightarrow\; \int x\,dx = \int 2y\,dy \;\rightarrow\; x^2/2 = y^2 + C$. En particular, para la línea que pasa por $(2,1)$ es $2^2/2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$. Es decir, $\boxed{\text{la ecuación de la línea es } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1}$.

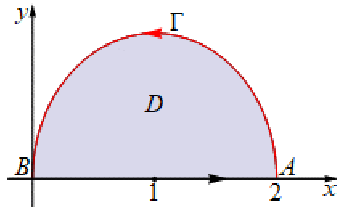
Se trata de una hipérbola cuya orientación en el punto $(2,1)$ se indica en el gráfico (es la del campo en dicho punto), sólo se representa una parte de la rama derecha de la hipérbola.

3. Siendo $\vec{f}(x,y)=(x+y,\,5x+\varphi(y))$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ desde $A=(2,0)$ hasta $B=(0,0)$ a lo largo de la curva Γ de ecuación $x^2+y^2=2x$ con $y\geq 0$.

Completando cuadrados vemos que la curva Γ puede expresarse como:

$$(x-1)^2+y^2=1 \text{ con } y\geq 0\,,$$

que es la semicircunferencia que se representa en color rojo en la figura de la derecha.



Dado que $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$ se puede aplicar el teorema de Green en la frontera $\partial D=\Gamma\cup\overline{BA}$ de la región D sombreada en el gráfico, donde $\overline{BA}$ es el segmento que tiene como extremos los puntos dados como dato. Así,

$$\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_D (Q'_x-P'_y)\,dx\,dy \text{ con } \vec{f}=(P,Q)\,, \qquad (1)$$

donde:

- $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}+\int_{\overline{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ con Γ recorrida según se solicita ($A\to B$).
- $\iint_D (Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=\iint_D (5-1)\,dx\,dy= 4\,\text{área}(D)=4\pi 1^2/2=2\pi$.

Reemplazando en (1) y despejando $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ resulta $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}=2\pi-\int_{\overline{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ donde, dado que una ecuación para $\overline{BA}$ recorrido desde B hasta A es $\vec{X}=B+t(A-B)=\underbrace{(2t,0)}_{\vec{g}(t)}$ con $0\leq t\leq 1$,

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}}=2\pi-\int_0^1 \vec{f}(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}\,'(t)\,dt=2\pi-\int_0^1 \underbrace{(2t,10t+\varphi(0))\cdot(2,0)}_{4t}\,dt=2\pi-2[t^2]_0^1=\boxed{2(\pi-1)}$$

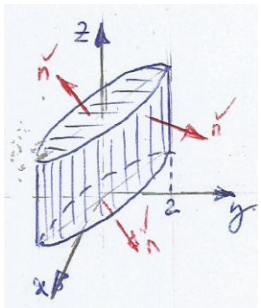
4. Siendo $\vec{f}(x,y,z)=(3xy^2+g(y),\,g(x)-y^3,\,z^2)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo D definido por: $x^2+y^2\leq 4,\ y\leq z\leq y+1$ **indicando** qué orientación adopta para dicha superficie.

Dado que $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, con la ventaja que

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z)=3y^2-3y^2+2z=2z$$

no depende de g.

En este caso el resultado obtenido corresponde a considerar la frontera ∂D orientada con $\breve{n}$ saliente de D, como se indica en el esquema de la derecha.



Entonces $\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 2z\,dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}}dx\,dy\underbrace{\int_y^{y+1}2z\,dz}_{[z^2]_y^{y+1}}=\iint_{D_{xy}}(2y+1)\,dx\,dy$, como D_{xy} es el círculo $x^2+y^2\leq 4$ en el plano xy, pasando a coordenadas polares queda:

$$\boxed{\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma}=\int_0^{2\pi}d\theta\underbrace{\int_0^2(2r\,\text{sen}(\theta)+1)\,r\,dr}_{[2r^3/3\,\text{sen}(\theta)+r^2/2]_0^2}=\int_0^{2\pi}(\tfrac{16}{3}\text{sen}(\theta)+2)d\theta=[-\tfrac{16}{3}\cos(\theta)+2\theta]_0^{2\pi}=\boxed{4\pi}.$$

5. Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : x^2 y + xz = 3 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 : xy - z^2 = 1.$$

Si r_o es la recta tangente a C en $P = (1,2,1)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de r_o desde el punto A hasta el B donde r_o interseca a la superficie de ecuación $z = x^2$, sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (x-1,\ y-2, z-1)$.

En la resolución debe aclararse cuál de los dos puntos es el que se adopta como punto A, el otro será el B.

Denotando $F(x, y, z) = x^2 y + xz - 3$ y $G(x, y, z) = xy - z^2 - 1$, vemos que $C = \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, cumpliéndose que:

- $F(P) = G(P) = 0$,
- $\begin{matrix} \nabla F(x, y, z) = (2xy + z,\ x^2,\ x) \\ \nabla G(x, y, z) = (y,\ x,\ -2z) \end{matrix}$ son continuos por tener componentes polinómicas,
- $\vec{d} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 12, 3) \neq \vec{0}$.

Entonces $\vec{d}$ es director de la recta tangente a C en P, con lo cual una ecuación para r_o es:

$$\vec{X} = (1,2,1) + \lambda(-3,12,3) = \underbrace{(1 - 3\lambda,\ 2 + 12\lambda,\ 1 + 3\lambda)}_{\vec{g}(\lambda)} \quad \text{con} \quad \lambda \in \Re.$$

Esta recta interseca a la superficie dada cuando $1 + 3\lambda = (1 - 3\lambda)^2$, es decir, $9\lambda^2 - 9\lambda = 0$. Para lo cual debe ser $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$, de donde –reemplazando en la ecuación de r_o– se obtienen los puntos $A = (1,2,1)$ y $B = (-2,14,4)$ respectivamente.

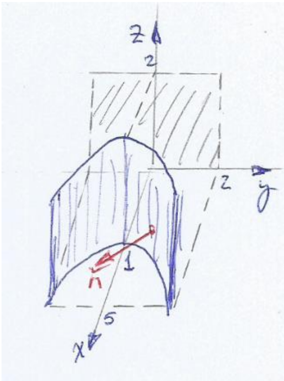
La circulación pedida es $\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{g}(\lambda)) \cdot \vec{g}'(\lambda)\, d\lambda$.

Siendo $\vec{f}(\vec{g}(\lambda)) \cdot \vec{g}'(\lambda) = (-3\lambda, 12\lambda, 3\lambda) \cdot (-3,12,3) = 162\lambda$, resulta:

$$\boxed{\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 162\lambda\, d\lambda = 162\,\tfrac{1}{2}\left[\lambda^2\right]_0^1 = 81}.$$

TEMA 2

1. Sean la superficie Σ de ecuación $x = y^2 + 1$ con $x \le 5$, $0 \le z \le 2$ y el campo vectorial $\vec{f}$ definido en $\Re^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (2x, 3y, yz)$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ **indicando** gráficamente cómo decidió orientar a la superficie.



La superficie admite la ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(y^2+1,\ y,\ z)}_{\vec{F}(y,z)} \text{ con } (y,z) \in D_{yz},$$

donde, como surge de la representación gráfica,

$$D_{yz} = \{(y,z) \in \Re^2 \,/\, -2 \le y \le 2 \wedge 0 \le z \le 2\}$$

es la proyección de Σ sobre el plano yz.

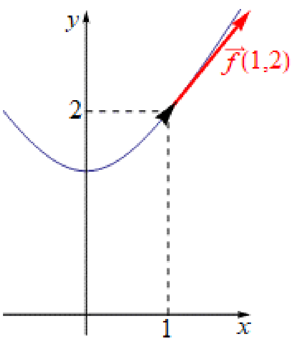
Una normal a la superficie es $\vec{n} = \vec{F}'_y \times \vec{F}'_z = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2y, 0)$, cuya orientación coincide con la elegida para Σ y que se indica con un $\breve{n}$ en el gráfico. Luego,

$$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} \vec{f}(\vec{F}(y,z)) \cdot \frac{\vec{F}'_y \times \vec{F}'_z}{\|\vec{F}'_y \times \vec{F}'_z\|} \, \|\vec{F}'_y \times \vec{F}'_z\| \, dy\, dz = \iint_{D_{yz}} \underbrace{(2(y^2+1), 3y, yz) \cdot (1, -2y, 0)}_{-4y^2+2} \, dydz$$

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma} = \int_{-2}^{2} dy \underbrace{\int_0^2 (-4y^2+2)\, dz}_{(-4y^2+2)[z]_0^2} = 2\int_{-2}^{2} (-4y^2+2)\, dy = 2\left[-\tfrac{4}{3}y^3 + 2y\right]_{-2}^{2} = \boxed{-80/3}.$$

---

2. Sabiendo que $\phi(x,y) = x\,y^2 + 1$ es la función potencial del campo $\vec{f}$ en $\Re^2$, **halle** una ecuación para la línea de campo de $\vec{f}$ que pasa por el punto $(1,2)$ e **indique** gráficamente la orientación de dicha línea en ese punto.



Siendo $\vec{f} = \nabla\phi$, resulta $\vec{f}(x,y) = (y^2, 2xy)$ en $\Re^2$. Entonces una ecuación diferencial para las líneas de campo de $\vec{f}$ se obtiene imponiendo que $d\vec{s} \,//\, \vec{f}$, donde $d\vec{s} = (dx, dy)$ es el diferencial vectorial de longitud de arco de curva. De ello resulta que:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

Es decir $2x\,dx = y\,dy \ \rightarrow \ \int 2x\,dx = \int y\,dy \ \rightarrow \ x^2 = y^2/2 + C$. En particular, para la línea que pasa por $(1,2)$ es $1 = 2^2/2 + C \Rightarrow C = -1$. Es decir, $\boxed{\text{la ecuación de la línea es } \frac{y^2}{2} - x^2 = 1}$.

Se trata de una hipérbola cuya orientación en el punto $(1,2)$ se indica en el gráfico (es la del campo en dicho punto), sólo se representa una parte de la rama superior de la hipérbola.

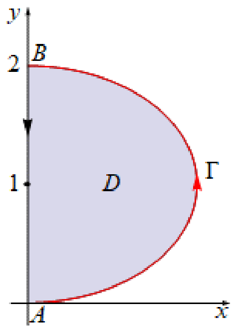
---

3. Siendo $\vec{f}(x,y)=(y+\varphi(x),\,5x+y)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ desde $A=(0,0)$ hasta $B=(0,2)$ a lo largo de la curva Γ de ecuación $x^2+y^2=2y$ con $x\geq 0$.

Completando cuadrados vemos que la curva Γ puede expresarse como:

$$x^2+(y-1)^2=1 \text{ con } x\geq 0$$

Que es la semicircunferencia que se representa en color rojo en la figura de la derecha.



Dado que $\vec{f}\in C^1(\Re^2)$ se puede aplicar el teorema de Green en la frontera $\partial D=\Gamma\cup\overline{BA}$ de la región D sombreada en el gráfico, donde $\overline{BA}$ es el segmento que tiene como extremos los puntos dados como dato. Así,

$$\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_D(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy \text{ con } \vec{f}=(P,Q), \qquad (1)$$

donde:

- $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_\Gamma\vec{f}\cdot d\vec{s}+\int_{\overline{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ con Γ recorrida según se solicita ($A\to B$).
- $\iint_D(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=\iint_D(5-1)\,dx\,dy=4\,\text{área}(D)=4\pi 1^2/2=2\pi$.

Reemplazando en (1) y despejando $\int_\Gamma\vec{f}\cdot d\vec{s}$ resulta $\int_\Gamma\vec{f}\cdot d\vec{s}=2\pi-\int_{\overline{BA}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ donde, dado que una ecuación para $\overline{BA}$ recorrido desde B hasta A es $\vec{X}=B+t(A-B)=\underbrace{(0,\,2-2t)}_{\vec{g}(t)}$ con $0\leq t\leq 1$,

$$\int_\Gamma\vec{f}\cdot d\vec{s}=2\pi-\int_0^1\vec{f}(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}\,'(t)\,dt=2\pi-\int_0^1\underbrace{(2-2t+\varphi(0),2-2t)\cdot(0,-2)}_{4t-4}\,dt=2\pi-\underbrace{[2t^2-4t]_0^1}_{-2}$$

$$\boxed{\int_\Gamma\vec{f}\cdot d\vec{s}=2(\pi+1)}.$$

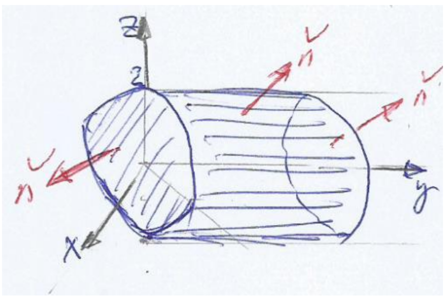
4. Siendo $\vec{f}(x,y,z)=(3xz^2+g(y),\,y^2,\,g(x)-z^3)$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo D definido por: $x^2+z^2\leq 4$, $x\leq y\leq x+1$ **indicando** qué orientación adopta para dicha superficie.

Dado que $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, con la ventaja que

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z)=3z^2+2y-3z^2=2y$$

no depende de g.

En este caso el resultado obtenido corresponde a considerar la frontera ∂D orientada con $\breve{n}$ saliente de D, como se indica en el esquema de la derecha.



Entonces $\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iiint_D 2y\,dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xz}}dx\,dz\,\underbrace{\int_x^{x+1}2y\,dy}_{[y^2]_x^{x+1}}=\iint_{D_{xz}}(2x+1)\,dx\,dz$, como D_{xz} es el círculo $x^2+z^2\leq 4$ en el plano xz, pasando a coordenadas polares queda:

$$\boxed{\oiint_{\partial D}\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma}=\int_0^{2\pi}d\theta\underbrace{\int_0^2(2r\cos(\theta)+1)\,r\,dr}_{[2r^3/3\cos(\theta)+r^2/2]_0^2}=\int_0^{2\pi}(\tfrac{16}{3}\cos(\theta)+2)d\theta=[\tfrac{16}{3}\text{sen}(\theta)+2\theta]_0^{2\pi}=\boxed{4\pi}.$$

5. Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : x\,y^2 + y\,z = 3 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 : x\,y - z^2 = 1 .$$

Si r_o es la recta tangente a C en $P = (2,1,1)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de r_o desde el punto A hasta el B donde r_o interseca a la superficie de ecuación $y = z^2$, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z) = (x-2,\ y-1, z-1)$.

En la resolución debe aclararse cuál de los dos puntos es el que se adopta como punto A, el otro será el B.

Denotando $F(x,y,z) = x\,y^2 + y\,z - 3$ y $G(x,y,z) = x\,y - z^2 - 1$, vemos que $C = \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$, cumpliéndose que:

- $F(P) = G(P) = 0$,
- $\begin{array}{l} \nabla F(x,y,z) = (\,y^2,\, 2\,x\,y + z,\ y) \\ \nabla G(x,y,z) = (\,y,\, x,\, -2\,z) \end{array}$ son continuos por tener componentes polinómicas,
- $\vec{d} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-12,\, 3,\, -3) \neq \vec{0}$.

Entonces $\vec{d}$ es director de la recta tangente a C en P, con lo cual una ecuación para r_o es:

$$\vec{X} = (2,1,1) + \lambda(-12,3,-3) = \underbrace{(2-12\lambda,\, 1+3\lambda,\, 1-3\lambda)}_{\vec{g}(\lambda)} \quad \text{con} \quad \lambda \in \Re .$$

Esta recta interseca a la superficie dada cuando $1+3\lambda = (1-3\lambda)^2$, es decir, $9\lambda^2 - 9\lambda = 0$. Para lo cual debe ser $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$, de donde –reemplazando en la ecuación de r_o– se obtienen los puntos $A = (2,1,1)$ y $B = (-10,4,-2)$ respectivamente.

La circulación pedida es $\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{g}(\lambda)) \cdot \vec{g}\,'(\lambda)\, d\lambda$.

Siendo $\vec{f}(\vec{g}(\lambda)) \cdot \vec{g}\,'(\lambda) = (-12\,\lambda,\, 3\lambda,\, -3\lambda) \cdot (-12,3,-3) = 162\,\lambda$, resulta:

$$\boxed{\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 162\,\lambda\, d\lambda = 162\,\tfrac{1}{2}\left[\lambda^2\right]_0^1 = 81}.$$