

TEMA 1

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (x + g(yz), y + g(xz), z - x^2)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 0$ y orientada hacia z^+ .

Observando que $\vec{f}$ no está totalmente definido (g no se conoce) pero:

- $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,
- la divergencia resulta $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$, independiente de la expresión de g ,
- la tercera componente de $\vec{f}$ no depende de g .

Se puede cerrar Σ con Σ_{aux} de ecuación $z = 0$ y aplicar el teorema de

la divergencia con la superficie $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_{\text{aux}}$ que es frontera del cuerpo D , según se indica en la representación gráfica. Es decir,

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz \quad (1)$$

donde, la proyección de ambas superficies y del cuerpo sobre el plano xy es la región plana D_{xy} definida por $x^2 + 4y^2 \leq 4$ cuyo borde es la elipse de ecuación $x^2/2^2 + y^2 = 1$. Entonces:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz = \iiint_D 3 \, dx dy dz = 3 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-4y^2}} dz = 3 \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-4y^2} \, dx dy$$

Aplicando el cambio de variables definido por $\begin{cases} x = 2r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ con $|J(r, \theta)| = 2r$, queda:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{2\sqrt{1-r^2} \, 2r \, dr}_{-\frac{4}{3}[(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3}} = 3 \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

- $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, donde $\Sigma \uparrow$ simboliza orientación de Σ hacia z^+ y $\Sigma_{\text{aux}} \downarrow$ que Σ_{aux} se orienta hacia z^- .

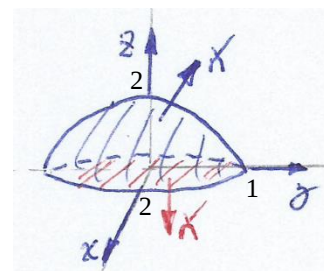
Dado que $\iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \underbrace{\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_{x^2} \, dx dy$, aplicando el mismo cambio de variables del punto anterior, resulta:

$$\iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{[2r \cos(\theta)]^2 \, 2r \, dr}_{8\cos^2(\theta)[r^4/4]_0^1} = \int_0^{2\pi} 2\cos^2(\theta) \, d\theta = [\theta + \sin(2\theta)/2]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Reemplazando en (1) se tiene que $\iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + 2\pi = 8\pi \Rightarrow \boxed{\iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 6\pi}.$

2. Dado $\vec{f}(x, y) = (g(x)e^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, **determine** $g(x)$ de manera que $\vec{f}$ admita función potencial en $\mathbb{R}^2$ y, en ese caso, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ desde $A=(0,3)$ hasta $B=(1,4)$ a lo largo de la curva de ecuación $y = x^5 + 3$.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ con $\vec{f} = (P, Q)$, si la matriz jacobiana de $\vec{f}$ es simétrica ($P'_y = Q'_x$) existe la función potencial ϕ . Luego, debe ser: $g(x)e^{x^2+y^2} 2y = 2ye^{x^2+y^2} 2x$, es decir, $g(x) = 2x$.



Con esto $\vec{f}(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})$, de donde $\begin{cases} \phi'_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} & (1) \\ \phi'_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$.

$$\text{De (1), } \phi(x, y) = \int 2xe^{x^2+y^2} dx = e^{x^2+y^2} + \phi(y) \quad (*)$$

Luego $\phi'_y(x, y) = e^{x^2+y^2} 2y + \phi'(y) \stackrel{(2)}{=} e^{x^2+y^2} 2y \Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = K$, que reemplazada en (*) permite obtener $\phi(x, y) = e^{x^2+y^2} + K$. Esta es la familia de posibles funciones potenciales (K es una constante arbitraria), cualquier componente de la familia puede usarse para calcular la integral de línea pedida, la cual es independiente de la curva que se utilice.

Por ejemplo con $K=0$ tenemos $\phi_0(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $\boxed{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi_0(B) - \phi_0(A) = e^{17} - e^9}$ donde la curva C está recorrida desde $A=(0,3)$ hasta $B=(1,4)$.

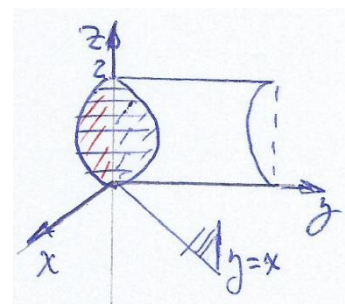
3. **Calcule** el volumen del cuerpo D definido por: $x^2 + (z-1)^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$.

Como se observa en el esquema de la derecha, el cuerpo proyecta contra el plano xz en el semicírculo $x^2 + (z-1)^2 \leq 1$ con $x \geq 0$.

$$\text{Luego, } \text{vol}(D) = \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_0^x dy = \iint_{D_{xz}} x dx dz$$

que pasando a polares en el xz resulta:

$$\boxed{\text{vol}(D) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\sin(\theta)} \underbrace{r \cos(\theta) r dr}_{\cos(\theta) \frac{1}{3} [r^3]_0^{2\sin(\theta)}} = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3(\theta) \cos(\theta) d\theta}_{\frac{1}{4} [\sin^4(\theta)]_0^{\pi/2}} = \frac{2}{3}}$$



4. Siendo $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 y z + h(y), g(x, z), x^3 y)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\vec{X} = (3\cos(t), 5, 3\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ respetando la orientación impuesta por esta parametrización.

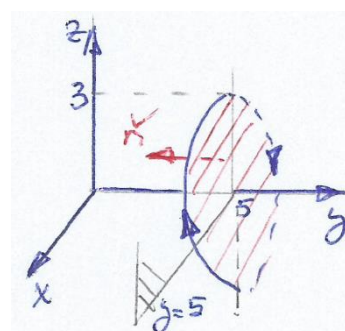
Según surge de la parametrización la curva C es una circunferencia de radio 3 en el plano $y = 5$ con centro en el punto $(0, 5, 0)$ y orientada según se muestra en el gráfico de la derecha (que denotamos C^+).

Como $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se puede aplicar el teorema del rotor, en este caso:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y z + h(y) & g(x, z) & x^3 y \end{vmatrix} = \\ &= (x^3 - g'_z(x, z), x^2 y - 3x^2 y, g'_x(x, z) - x^2 z - h'(y)) \end{aligned}$$

Usando $y = 5$ con $x^2 + z^2 \leq 3^2$ como superficie Σ que tiene a la curva como borde, con la orientación que se indica en el gráfico y siendo D_{xz} la región $x^2 + z^2 \leq 3^2$ en $y = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \boxed{\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}} &= \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \nabla \times \vec{f}(x, 5, z) \cdot (0, -1, 0) dx dz = 10 \iint_{D_{xz}} x^2 dx dz = \\ &= 10 \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^3 r^2 \cos^2(\theta) r dr}_{\cos^2(\theta) \frac{1}{4} [r^4]_0^3} = \frac{405}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{405}{4} [\theta + \sin(2\theta)/2]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{405}{2} \pi}. \end{aligned}$$



5. Calcule $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq x+y \leq 4 \wedge y \geq x \wedge x \geq 0\}$ aplicando el cambio de variables definido por $(x,y) = (v-2u, 2u)$.

A la derecha se representa la región de integración D en el plano xy , limitada por cuatro arcos de curva C_1 a C_4 .

Mediante el cambio de variables $\begin{cases} x = v-2u \\ y = 2u \end{cases}$, las rectas a las que pertenecen dichos arcos de curva se transforman en:

$$\begin{aligned} C_1 : y = x & \xleftarrow{2u = v-2u} v = 4u : C_1^* \\ C_2 : x + y = 4 & \xleftarrow{v-2u+2u = 4} v = 4 : C_2^* \\ C_3 : x = 0 & \xleftarrow{v-2u = 0} v = 2u : C_3^* \\ C_4 : x + y = 2 & \xleftarrow{v-2u+2u = 2} v = 2 : C_4^* \end{aligned}$$

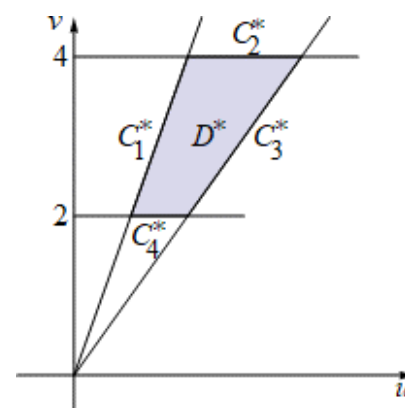
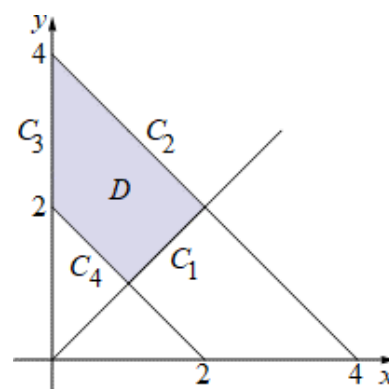
Siendo C_1^* a C_4^* los arcos de curva que constituyen la frontera de la región D^* del plano uv , en la que se transforma D a través del cambio de variables. La nueva región de integración se representa en la figura de abajo.

Por su parte el jacobiano de la transformación es:

$$J(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J(u,v)| = 2.$$

Entonces, aplicando el cambio de variables, resulta:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^2 dx dy &= \iint_{D^*} \underbrace{(v-2u+2u)^2}_{v^2} \underbrace{|J(u,v)|}_2 du dv = \\ &= 2 \int_2^4 v^2 dv \int_{v/4}^{v/2} du = \frac{1}{2} \int_2^4 v^3 dv = \frac{1}{8} [u^4]_2^4 = 30 \end{aligned}$$



Respuesta: $\boxed{\iint_D (x+y)^2 dx dy = 30}.$

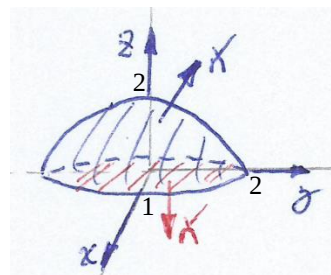
TEMA 2

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (3x + g(yz), g(xz) - y, z - y^2)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 0$ y orientada hacia z^+ .

Observando que $\vec{f}$ no está totalmente definido (g no se conoce) pero:

- $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,
- la divergencia resulta $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = 3 - 1 + 1 = 3$, independiente de la expresión de g ,
- la tercera componente de $\vec{f}$ no depende de g .

Se puede cerrar Σ con Σ_{aux} de ecuación $z = 0$ y aplicar el teorema de la divergencia con la superficie $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_{\text{aux}}$ que es frontera del cuerpo D , según se indica en la representación gráfica. Es decir,



$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz \quad (1)$$

donde, la proyección de ambas superficies y del cuerpo sobre el plano xy es la región plana D_{xy} definida por $4x^2 + y^2 \leq 4$ cuyo borde es la elipse de ecuación $x^2 + y^2/2^2 = 1$. Entonces:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz = \iiint_D 3 \, dx dy dz = 3 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{\sqrt{4-4x^2-y^2}} dz = 3 \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-4x^2-y^2} \, dx dy$$

Aplicando el cambio de variables definido por $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = 2r \sin(\theta) \end{cases}$ con $|J(r, \theta)| = 2r$, queda:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{2\sqrt{1-r^2} \cdot 2r}_{-\frac{4}{3}[(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3}} dr = 3 \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

- $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, donde $\Sigma \uparrow$ simboliza orientación de Σ hacia z^+ y $\Sigma_{\text{aux}} \downarrow$ que Σ_{aux} se orienta hacia z^- .

Dado que $\iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \underbrace{\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_{y^2} dx dy$, aplicando el mismo cambio de variables del punto anterior, resulta:

$$\iint_{\Sigma_{\text{aux}} \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{[2r \sin(\theta)]^2 \cdot 2r}_{8\sin^2(\theta)[r^4/4]_0^1} dr = \int_0^{2\pi} 2\sin^2(\theta) d\theta = [\theta - \sin(2\theta)/2]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Reemplazando en (1) se tiene que $\iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + 2\pi = 8\pi \Rightarrow \boxed{\iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 6\pi}.$

2. Dado $\vec{f}(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, g(y)e^{x^2+y^2})$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, **determine** $g(y)$ de manera que $\vec{f}$ admita función potencial en $\mathbb{R}^2$ y, en ese caso, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ desde $A=(3,0)$ hasta $B=(4,1)$ a lo largo de la curva de ecuación $x = y^5 + 3$.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ con $\vec{f} = (P, Q)$, si la matriz jacobiana de $\vec{f}$ es simétrica ($P'_y = Q'_x$) existe la función potencial ϕ . Luego, debe ser: $2xe^{x^2+y^2} \cdot 2y = g(y)e^{x^2+y^2} \cdot 2x$, es decir, $g(y) = 2y$.

Con esto $\vec{f}(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})$, de donde $\begin{cases} \phi'_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} & (1) \\ \phi'_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$

$$\text{De (1), } \phi(x, y) = \int 2xe^{x^2+y^2} dx = e^{x^2+y^2} + \phi(y) \quad (*)$$

Luego $\phi'_y(x, y) = e^{x^2+y^2} 2y + \phi'(y) \stackrel{(2)}{=} e^{x^2+y^2} 2y \Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = K$, que reemplazada en (*) permite obtener $\phi(x, y) = e^{x^2+y^2} + K$. Esta es la familia de posibles funciones potenciales (K es una constante arbitraria), cualquier componente de la familia puede usarse para calcular la integral de línea pedida, la cual es independiente de la curva que se utilice.

Por ejemplo con $K=0$ tenemos $\phi_0(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi_0(B) - \phi_0(A) = e^{17} - e^9$ donde la curva C está recorrida desde $A=(3,0)$ hasta $B=(4,1)$.

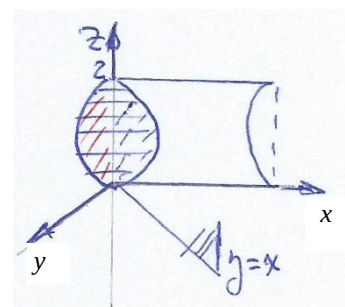
3. **Calcule** el volumen del cuerpo D definido por: $y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, $0 \leq x \leq y$.

Como se observa en el esquema de la derecha, el cuerpo proyecta contra el plano yz en el semicírculo $y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ con $y \geq 0$.

$$\text{Luego, } \text{vol}(D) = \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^y dx = \iint_{D_{yz}} y dy dz$$

que pasando a polares en el yz resulta:

$$\boxed{\text{vol}(D)} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\sin(\theta)} \underbrace{r \cos(\theta) r dr}_{\cos(\theta) \frac{1}{3} [r^3]_0^{2\sin(\theta)}} = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3(\theta) \cos(\theta) d\theta}_{\frac{1}{4} [\sin^4(\theta)]_0^{\pi/2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

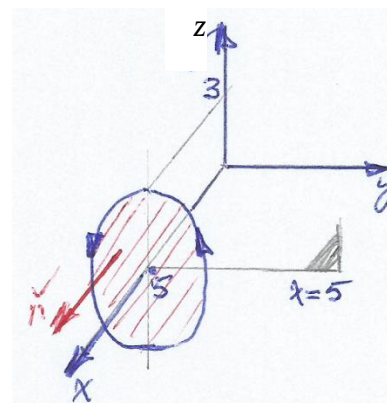


4. Siendo $\vec{f}(x, y, z) = (g(y, z), xy^2z + h(x), xy^3)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\vec{X} = (5, 3\cos(t), 3\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ respetando la orientación impuesta por esta parametrización.

Según surge de la parametrización la curva C es una circunferencia de radio 3 en el plano $x=5$ con centro en el punto $(5, 0, 0)$ y orientada según se muestra en el gráfico de la derecha (que denotamos C^+).

Como $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se puede aplicar el teorema del rotor, en este caso:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ g(y, z) & xy^2z + h(x) & xy^3 \end{vmatrix} = \\ &= (3xy^2 - xy^2, g'_z(y, z) - y^3, y^2z + h'(x) - g'_y(y, z)) \end{aligned}$$



Usando $x=5$ con $y^2 + z^2 \leq 3^2$ como superficie Σ que tiene a la curva como borde, con la orientación que se indica en el gráfico y siendo D_{yz} la región $y^2 + z^2 \leq 3^2$ en $x=0$, resulta:

$$\begin{aligned} \boxed{\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}} &= \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \nabla \times \vec{f}(5, y, z) \cdot (1, 0, 0) dy dz = 10 \iint_{D_{yz}} y^2 dy dz = \\ &= 10 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \underbrace{r^2 \cos^2(\theta) r dr}_{\cos^2(\theta) \frac{1}{4} [r^4]_0^3} = \frac{405}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{405}{4} [\theta + \sin(2\theta)/2]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{405}{2} \pi}. \end{aligned}$$

5. Calcule $\iint_D (2x+y)^2 dx dy$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq 2x+y \leq 6 \wedge y \leq x \wedge y \geq 0\}$ aplicando el cambio de variables definido por $(x,y) = (2v, u-4v)$.

A la derecha se representa la región de integración D en el plano xy , limitada por cuatro arcos de curva C_1 a C_4 .

Mediante el cambio de variables $\begin{cases} x = 2v \\ y = u - 4v \end{cases}$, las rectas a las que pertenecen dichos arcos de curva se transforman en:

$$\begin{array}{lll} C_1 : y = x & \xleftarrow{u-4v=2v} & v = u/6 : C_1^* \\ C_2 : 2x+y = 6 & \xleftarrow{4v+u-4v=6} & u = 6 : C_2^* \\ C_3 : y = 0 & \xleftarrow{u-4v=0} & v = u/4 : C_3^* \\ C_4 : 2x+y = 4 & \xleftarrow{4v+u-4v=4} & u = 4 : C_4^* \end{array}$$

Siendo C_1^* a C_4^* los arcos de curva que constituyen la frontera de la región D^* del plano uv , en la que se transforma D a través del cambio de variables. La nueva región de integración se representa en la figura de abajo.

Por su parte el jacobiano de la transformación es:

$$J(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J(u,v)| = 2.$$

Entonces, aplicando el cambio de variables, resulta:

$$\begin{aligned} \iint_D (2x+y)^2 dx dy &= \iint_{D^*} \underbrace{(4v+u-4v)^2}_{u^2} \underbrace{|J(u,v)|}_2 du dv = \\ &= 2 \int_4^6 u^2 du \int_{u/6}^{u/4} dv = \frac{1}{6} \int_4^6 u^3 du = \frac{1}{24} [u^4]_4^6 = \frac{130}{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\iint_D (2x+y)^2 dx dy = \frac{130}{3}}.$

