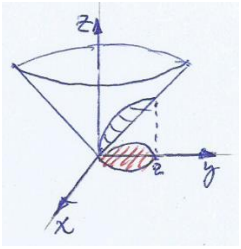
TEMA 1

1. **Calcule** el área del trozo de superficie cónica Σ de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \le 2y$, $z \ge 0$.



Dado que los puntos de la superficie cumplen con $z \ge 0$, Σ admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(x, y, \sqrt{x^2+y^2})}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D$, donde D cumple con $x^2 + y^2 \le 2y$ o bien $x^2 + (y-1)^2 \le 1$ que es un círculo de radio 1 con centro en $(0,1)$, rayado en rojo. Siendo $\text{área}(\Sigma) = \iint_D \| \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y \| dx\,dy$.

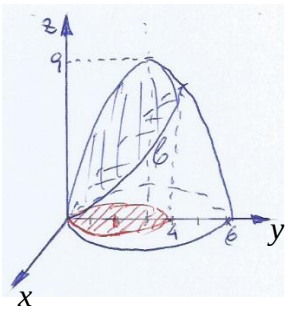
Dado que $(\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y)(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & x/\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & 1 & y/\sqrt{x^2+y^2} \end{vmatrix} = (-x/\sqrt{x^2+y^2}, -y/\sqrt{x^2+y^2}, 1)$, resulta:

$$\| \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y \|(x,y) = [x^2/(x^2+y^2) + y^2/(x^2+y^2) + 1]^{1/2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Entonces, } \text{área}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2}\, dx\,dy = \sqrt{2}\ \text{área}(D) = \sqrt{2}\,\pi\, 1^2 \ \rightarrow\ \boxed{\text{área}(\Sigma) = \sqrt{2}\,\pi}.$$

---

2. **Calcule** el volumen del cuerpo D definido por: $z \le 9 - x^2 - (y-3)^2$, $z \ge 2y$.



Como se observa en la figura, la proyección de D sobre el plano xy es la región D_{xy} rayada en color rojo. La curva C es:

$$C = \begin{cases} z = 9 - x^2 - (y-3)^2 \\ z = 2y \end{cases} \equiv \begin{cases} 2y = 9 - x^2 - (y-3)^2 \\ z = 2y \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

Con lo cual $x^2 + y^2 - 4y = 0$ es la ecuación de la proyección de C sobre el plano xy, es decir, es el borde de D_{xy}.

Completando cuadrados es $x^2 + (y-2)^2 = 4$, entonces:

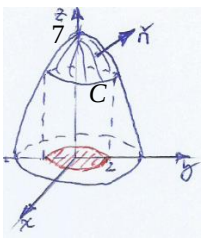
$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{2y}^{9-x^2-(y-3)^2} dz = \iint_{D_{xy}} [4y - x^2 - y^2]\,dx\,dy.$$

Aplicando el cambio de variables $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 2 + r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = r$, resulta:

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr}_{[2r^2 - \frac{1}{4}r^4]_0^2} = 4\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \quad \boxed{\text{Vol}(D) = 8\pi}.$$

---

3. Sea $\phi(x,y,z) = 3 + e^{z+x^2+y^2-7}$ la función potencial de $\vec{f}$ en $\Re^3$ y sea Σ el trozo de superficie de potencial 4 del campo cuyos puntos cumplen con $z \ge 3$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ orientada hacia z^+.



La ecuación de Σ es $3 + e^{z+x^2+y^2-7} = 4 \Leftrightarrow z + x^2 + y^2 - 7 = 0$, es decir, $z = 7 - x^2 - y^2$ con $z \ge 3$. Observando el gráfico surge que:

$$C = \begin{cases} z = 7 - x^2 - y^2 \\ z = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} 3 = 7 - x^2 - y^2 \\ z = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Con lo cual Σ admite la parametrización:

$$\vec{X} = \underbrace{(x,\ y,\ 7-x^2-y^2)}_{\vec{F}(x,y)} \text{ con } (x,y) \in D = \{(x,y) \in \Re^2 / x^2+y^2 \le 4\}$$

Un vector normal a Σ es $\vec{n}(x,y) = (\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y)(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x,\ 2y,\ 1)$, que está orientado –como se pide– hacia z^+ (su tercera componente es positiva). Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{F}(x,y)) \cdot \frac{\vec{n}(x,y)}{\|\vec{n}(x,y)\|} \|\vec{n}(x,y)\|\, dx\, dy \quad (*)$$

Dado que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z) = (2xe^{z+x^2+y^2-7},\ 2ye^{z+x^2+y^2-7},\ e^{z+x^2+y^2-7})$,

$$\vec{f}(\vec{F}(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y) = (2x,\ 2y,\ 1) \cdot (2x, 2y,\ 1) = 4x^2 + 4y^2 + 1.$$

Reemplazando en $(*)$ resulta $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} (4x^2+4y^2+1)\, dx\, dy$, y pasando a coordenadas polares: $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (4r^2+1)\, r\, dr}_{[r^4+r^2/2]_0^2} = 18\int_0^{2\pi} d\theta = 36\pi \rightarrow \boxed{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 36\pi}$.

---

4. Sea F la familia de curvas planas de ecuación $y = Cx^2$. **Calcule** el área de la región H limitada por la curva de la familia ortogonal a F que contiene al punto $(2,2)$, con $x \ge 0$.

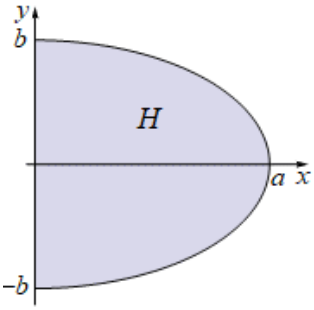
Siendo $\begin{cases} y = Cx^2 \\ y' = 2Cx \end{cases} \xrightarrow{\text{eliminando } C} y = \frac{1}{2}y'x$, que es la ecuación diferencial de la familia F.

Reemplazando en esta última y' por $-1/y'$ resulta $y = \frac{-1}{2y'}x$, o bien $2yy' = -x$ que es la ecuación diferencial de la familia $F_\perp$, ortogonal a F.

Siendo $2yy' = -x \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow 2y\,dy = -x\,dx \rightarrow \int 2y\,dy = -\int x\,dx \rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + K$.

Así, la ecuación de $F_\perp$ es: $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = K$. La curva de esta familia que contiene al punto $(2,2)$ debe cumplir con $2+4 = K$.

De donde, la curva buscada tiene ecuación $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 6$, llevándola a la forma canónica resulta $\frac{x^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$.



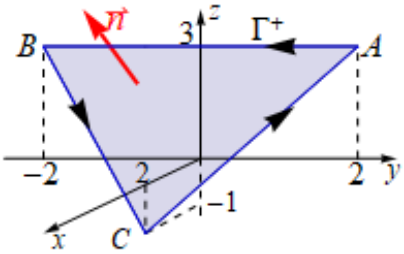
Entonces la región H, para $x \ge 0$, está limitada por esta elipse de semiejes $a = \sqrt{12}$ y $b = \sqrt{6}$. Para calcular el área se puede aplicar el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = \sqrt{12}\, r\cos(\theta) \\ y = \sqrt{6}\, r\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \text{ con } |J(r,\theta)| = \sqrt{12}\sqrt{6}\, r = 6\sqrt{2}\, r.$$

$$\text{área}(H) = \iint_H dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^1 6\sqrt{2}\, r\, dr}_{3\sqrt{2}[r^2]_0^1} = 3\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 3\sqrt{2}\,\pi \rightarrow \boxed{\text{área}(H) = 3\sqrt{2}\,\pi}.$$

---

5. La superficie Σ de ecuación $z = x^2 - 4x + xy^2 + 3$ tiene tres puntos (A, B y C) donde el plano tangente es paralelo al plano xy. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (xy + z^2,\ x^2 + h(y),\ h(x))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde del triángulo cuyos vértices son los puntos mencionados. La circulación debe realizarse en el sentido $A \to B \to C \to A$, indicando cuáles son las coordenadas de cada uno de los puntos a los que se decidió denominar A, B y C.



Denotando $g(x,y) = x^2 - 4x + xy^2 + 3$, siendo g diferenciable por ser polinómica, los puntos de Σ con plano tangente paralelo al plano xy son del tipo $(x_o, y_o, g(x_o, y_o))$ para los cuales $\nabla g(x_o, y_o) = \vec{0}$.

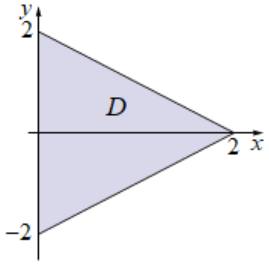
$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 2x - 4 + y^2 \\ g'_y(x,y) = 2xy \end{cases} \cdot \begin{cases} 2x - 4 + y^2 = 0 \ \ (*) \\ 2xy = 0 \qquad \to x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \xrightarrow{(*)} -4 + y^2 = 0 \to y = -2 \vee y = 2 \to (0,-2)$ y $(0,2)$

$y = 0 \xrightarrow{(*)} 2x - 4 = 0 \to x = -2 \to (2,0)$

Así, los puntos buscados son $A = (0,2,3)$, $B = (0,-2,3)$ y $C = (2,0,-1)$, representados en el esquema.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ pero no se conoce la expresión de h, intentaremos calcular la circulación pedida aplicando el teorema del rotor, usando como superficie S la del triángulo que tiene como vértices a dichos puntos. Del esquema anterior surge directamente que la proyección de S sobre el plano xy es la región D dibujada a la derecha.



Con lo cual conviene parametrizar S en función de x e y.

Un vector normal al plano es $\vec{N} = (B - A) \times (C - A) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (16,0,8)$. Con lo cual, una ecuación cartesiana para el mismo es $((x,y,z) - (0,2,3)) \cdot (16,0,8) = 0$. Es decir, $z = 3 - 2x$, de donde S admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(x, y, 3 - 2x)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D$.

Siendo que $\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,0,1)$, se obtiene de la parametrización y es normal al plano con la orientación buscada (hacia z^+), usamos como vector normal $\vec{n} = (2,0,1)$.

Denotando con Γ^+ la orientación representada en el esquema (para el borde del triángulo):

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_D \nabla \times \vec{f}\,(\vec{F}(x,y)) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \|\vec{n}\|\, dx\, dy \qquad (*)$$

Como $\nabla \times \vec{f}\,(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy + z^2 & x^2 + h(y) & h(x) \end{vmatrix} = (0,\ 2z - h'(x),\ x) \ \Rightarrow\ \nabla \times \vec{f}\,(\vec{F}(x,y)) \cdot \vec{n} = x$,

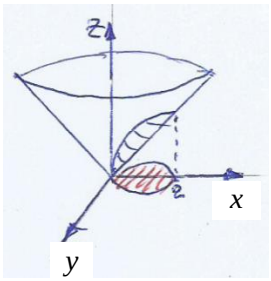
reemplazando en $(*)$ resulta: $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D x\, dx\, dy = \int_0^2 x\, dx \int_{x-2}^{2-x} dy = \int_0^2 x(4 - 2x)\, dx =$

$= [2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^2 = 8/3$. Respuesta.: $\boxed{\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8/3}$.

Nota: Para el cálculo del flujo se usó el vector $\vec{n} = (2,0,1)$ obtenido desde la parametrización de S. Es incorrecto aplicar el mismo procedimiento usando $\vec{N} = (16,0,8)$, aunque ambos tienen la misma orientación y son normales a la superficie.

TEMA 2

1. **Calcule** el área del trozo de superficie cónica Σ de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \le 2x$, $z \ge 0$.



Dado que los puntos de la superficie cumplen con $z \ge 0$, Σ admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(x,\, y,\, \sqrt{x^2+y^2})}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D$, donde D cumple con $x^2 + y^2 \le 2x$ o bien $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ que es un círculo de radio 1 con centro en $(1,0)$, rayado en rojo. Siendo $\text{área}(\Sigma) = \iint_D \| \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y \| dx\,dy$.

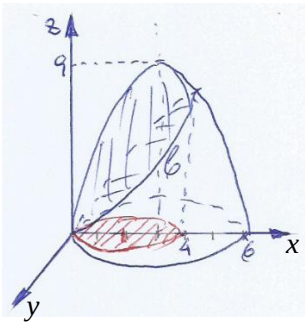
Dado que $(\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y)(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & x/\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & 1 & y/\sqrt{x^2+y^2} \end{vmatrix} = (-x/\sqrt{x^2+y^2}\,,\, -y/\sqrt{x^2+y^2}\,,\, 1)$, resulta:

$$\| \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y \|(x,y) = [x^2/(x^2+y^2) + y^2/(x^2+y^2) + 1]^{1/2} = \sqrt{2}\,.$$

Entonces, $\text{área}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2}\; dx\,dy = \sqrt{2}\ \text{área}(D) = \sqrt{2}\,\pi\, 1^2 \rightarrow \boxed{\text{área}(\Sigma) = \sqrt{2}\,\pi}$.

---

2. **Calcule** el volumen del cuerpo D definido por: $z \le 9 - (x-3)^2 - y^2$, $z \ge 2x$.



Como se observa en la figura, la proyección de D sobre el plano xy es la región D_{xy} rayada en color rojo. La curva C, intersección del paraboloide con el plano, es:

$$C = \begin{cases} z = 9-(x-3)^2-y^2 \\ z = 2x \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x = 9-(x-3)^2-y^2 \\ z = 2x \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2-4x = 0 \\ z = 2x \end{cases}$$

Con lo cual $x^2 + y^2 - 4x = 0$ es la ecuación de la proyección de C sobre el plano xy, es decir, es el borde de D_{xy}.

Completando cuadrados es $(x-2)^2 + y^2 = 4$, entonces:

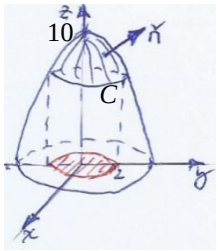
$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{2x}^{9-(x-2)^2-y^2} dz = \iint_{D_{xy}} [4x - x^2 - y^2]\,dx\,dy\,.$$

Aplicando el cambio de variables $\begin{cases} x = 2 + r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = r$, resulta:

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr}_{[2r^2 - \frac{1}{4}r^4]_0^2} = 4\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi\,. \quad \boxed{\text{Vol}(D) = 8\pi}.$$

---

3. Sea $\phi(x,y,z) = 5 + e^{z+x^2+y^2-10}$ la función potencial de $\vec{f}$ en $\Re^3$ y sea Σ el trozo de superficie de potencial 6 del campo cuyos puntos cumplen con $z \ge 6$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ orientada hacia z^+.



La ecuación de Σ es $5 + e^{z+x^2+y^2-10} = 6 \Leftrightarrow z + x^2 + y^2 - 10 = 0$, es decir, $z = 10 - x^2 - y^2$ con $z \ge 6$. Observando el gráfico surge que:

$$C = \begin{cases} z = 10 - x^2 - y^2 \\ z = 6 \end{cases} \equiv \begin{cases} 6 = 10 - x^2 - y^2 \\ z = 6 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 6 \end{cases}$$

Con lo cual Σ admite la parametrización:

$$\vec{X} = \underbrace{(x,\ y,\ 10-x^2-y^2)}_{\vec{F}(x,y)} \text{ con } (x,y) \in D = \{(x,y) \in \Re^2 / x^2+y^2 \le 4\}$$

Un vector normal a Σ es $\vec{n}(x,y) = (\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y)(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x,\ 2y,\ 1)$, que está orientado –como se pide– hacia z^+ (su tercera componente es positiva). Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{F}(x,y)) \cdot \frac{\vec{n}(x,y)}{\|\vec{n}(x,y)\|} \|\vec{n}(x,y)\|\, dx\, dy \quad (*)$$

Dado que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z) = (2xe^{z+x^2+y^2-10},\ 2ye^{z+x^2+y^2-10},\ e^{z+x^2+y^2-10})$,

$$\vec{f}(\vec{F}(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y) = (2x,\ 2y,\ 1) \cdot (2x, 2y,\ 1) = 4x^2+4y^2+1.$$

Reemplazando en $(*)$ resulta $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} (4x^2+4y^2+1)\, dx\, dy$, y pasando a coordenadas polares: $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^2 (4r^2+1)\, r\, dr}_{[r^4+r^2/2]_0^2} = 18\int_0^{2\pi} d\theta = 36\pi \rightarrow \boxed{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 36\pi}$.

---

4. Sea F la familia de curvas planas de ecuación $y = Cx^4$. **Calcule** el área de la región limitada por la curva de la familia ortogonal a F que contiene al punto $(2,1)$, con $x \ge 0$.

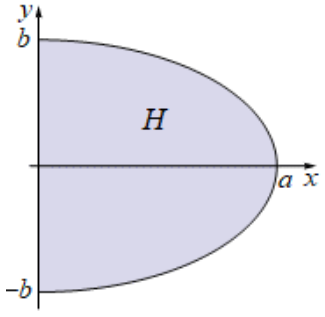
Siendo $\begin{cases} y = Cx^4 \\ y' = 4Cx^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{eliminando } C} y = \frac{1}{4}y'x$, que es la ecuación diferencial de la familia F.

Reemplazando en esta última y' por $-1/y'$ resulta $y = \frac{-1}{4y'}x$, o bien $4yy' = -x$ que es la ecuación diferencial de la familia $F_\perp$, ortogonal a F.

Siendo $4yy' = -x \rightarrow 4y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow 4y\,dy = -x\,dx \rightarrow \int 4y\,dy = -\int x\,dx \rightarrow 2y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + K$.

Así, la ecuación de $F_\perp$ es: $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = K$. La curva de esta familia que contiene al punto $(2,1)$ debe cumplir con $2+2 = K$.

De donde, la curva buscada tiene ecuación $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 4$, llevándola a la forma canónica resulta $\frac{x^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.



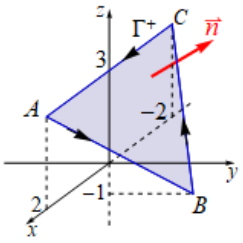
Entonces la región H, para $x \ge 0$, está limitada por esta elipse de semiejes $a = \sqrt{8}$ y $b = \sqrt{2}$. Para calcular el área se puede aplicar el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = \sqrt{8}\, r\cos(\theta) \\ y = \sqrt{2}\, r\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \text{ con } |J(r,\theta)| = \sqrt{8}\sqrt{2}\, r = 4r.$$

$$\text{área}(H) = \iint_H dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^1 4r\, dr}_{2[r^2]_0^1} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2\pi \rightarrow \boxed{\text{área}(H) = 2\pi}.$$

---

5. La superficie Σ de ecuación $z = y^2 - 4y + x^2 y + 3$ tiene tres puntos (A, B y C) donde el plano tangente es paralelo a plano xy. Dado $\vec{f}(x,y,z) = (y^2 + h(x),\ 3xy + z^2,\ h(y))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde del triángulo cuyos vértices son los puntos mencionados. La circulación debe realizarse en el sentido $A \to B \to C \to A$, indicando cuáles son las coordenadas de cada uno de los puntos a los que se decidió denominar A, B y C.



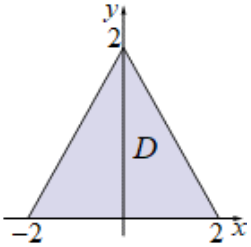
Denotando $g(x,y) = y^2 - 4y + x^2 y + 3$, siendo g diferenciable por ser polinómica, los puntos de Σ con plano tangente paralelo al plano xy son del tipo $(x_o, y_o, g(x_o, y_o))$ para los cuales $\nabla g(x_o, y_o) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 2xy \\ g'_y(x,y) = 2y - 4 + x^2 \end{cases} \to \begin{cases} 2xy = 0 & \to x = 0 \vee y = 0 \\ 2y - 4 + x^2 = 0 & (*) \end{cases}$$

$x = 0 \xrightarrow{(*)} 2y - 4 = 0 \to y = 2 \to (0,2)$

$y = 0 \xrightarrow{(*)} -4 + x^2 = 0 \to x = -2 \ \vee \ x = 2 \to (-2,0)$ y $(2,0)$

Así, los puntos buscados son $A = (2,0,3)$, $B = (0,2,-1)$ y $C = (-2,0,3)$, representados en el esquema.



Dado que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ pero no se conoce la expresión de h, intentaremos calcular la circulación pedida aplicando el teorema del rotor, usando como superficie S la del triángulo que tiene como vértices a dichos puntos. Del esquema anterior surge directamente que la proyección de S sobre el plano xy es la región D dibujada a la derecha.

Con lo cual conviene parametrizar S en función de x e y.

Un vector normal al plano es $\vec{N} = (B - A) \times (C - A) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,16,8)$. Con lo cual, una ecuación cartesiana para el mismo es $((x,y,z) - (2,0,3)) \cdot (0,16,8) = 0$. Es decir, $z = 3 - 2y$, de donde S admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(x, y, 3-2y)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y) \in D$.

Siendo que $\vec{F}'_x \times \vec{F}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0,2,1)$ se obtiene de la parametrización y es normal al plano con la orientación buscada (hacia z^+), usamos como vector normal $\vec{n} = (0,2,1)$.

Denotando con Γ^+ la orientación representada en el esquema (para el borde del triángulo):

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_D \nabla \times \vec{f}\,(\vec{F}(x,y)) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \|\vec{n}\|\, dx\, dy \quad (*)$$

Como $\nabla \times \vec{f}\,(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 + h(x) & 3xy + z^2 & h(y) \end{vmatrix} = (h'(y) - 2z,\ 0,\ y) \Rightarrow \nabla \times \vec{f}\,(\vec{F}(x,y)) \cdot \vec{n} = y$,

reemplazando en $(*)$ resulta: $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D y\, dx\, dy = \int_0^2 y\, dy \int_{y-2}^{2-y} dx = \int_0^2 y(4 - 2y)\, dx =$

$= [2y^2 - \tfrac{2}{3} y^3]_0^2 = 8/3$. Respuesta: $\boxed{\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8/3}$.

Nota: Para el cálculo del flujo se usó el vector $\vec{n} = (0,2,1)$ obtenido desde la parametrización de S. Es incorrecto aplicar el mismo procedimiento usando $\vec{N} = (0,16,8)$, aunque ambos tienen la misma orientación y son normales a la superficie.