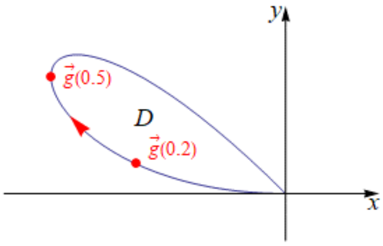
TEMA 1



1. **Calcule** el área de la región D del plano xy que se representa en la figura, sabiendo que su curva frontera ∂D admite la ecuación $\vec{X} = (t^2 - t\,,\, t^2 - t^3)$ con $0 \le t \le 1$.

Denotando $\vec{g}(t) = (t^2 - t, t^2 - t^3)$ vemos que $\vec{g}(0) = \vec{g}(1) = (0,0)$, lógicamente ∂D es una curva cerrada. Podemos calcular el área pedida mediante una conveniente aplicación del teorema de Green, usando –por ejemplo– el campo $\vec{f}(x,y) = (\underbrace{0}_{P(x,y)}\,,\,\underbrace{x}_{Q(x,y)})$ para el cual $Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 1$ constante.

Luego $\int_{\partial D^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_D 1\,dx\,dy = \text{área}(D)$.

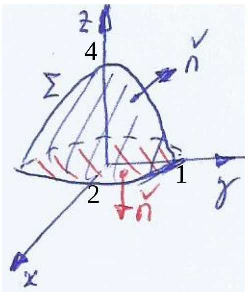
Debemos verificar si la curva está bien orientada. Para ello calculamos y representamos aproximadamente en el gráfico (en rojo), por ejemplo, $\vec{g}(0.2) = (-0.16,\, 0.032)$ y $\vec{g}(0.5) = (-0.25,\, 0.125)$, con lo cual vemos que a través de $\vec{g}$ la frontera queda orientada en sentido negativo. Entonces:

$$\text{área}(D) = \int_{\partial D^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_{\partial D^-} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_0^1 \vec{f}(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}\,'(t)\,dt = -\int_0^1 (0, t^2 - t)\cdot(2t-1, 2t-3t^2)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \underbrace{(t^2-t)\,(2t-3t^2)}_{5t^3-2t^2-3t^4}\,dt = -[\tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{3}{5}t^5]_0^1 = 1/60$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}(D) = 1/60}$.

2. Sabiendo que en puntos del plano xy es $\vec{f}(x,y,0) = (y^2, x\,y, x^2)$, $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ y que $\vec{f}$ es solenoidal, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = 4 - x^2 - 4y^2$ con $z \ge 0$, orientada hacia z^+.



Observando el esquema, vemos que si "cerramos" la superficie Σ con el trozo Σ_1 (en rojo) del plano de ecuación $z = 0$ con $x^2 + 4y^2 \le 4$, queda definido un cuerpo D cuya frontera es $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_1$.

Ya que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{f})}_{\substack{=0 \\ solenoidal}}\,dx\,dy\,dz = 0$$

Entonces $\oiint_{\partial D} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma + \iint_{\Sigma_1\downarrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = 0$ donde $\Sigma\uparrow$ indica orientación hacia z^+ y $\Sigma_1\downarrow$ hacia z^-.

De donde, $\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = -\iint_{\Sigma_1\downarrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma_1\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} x^2\,dx\,dy$.

Dado que D_{xy} queda definido por $x^2 + 4y^2 \le 4$ o bien $x^2/2^2 + y^2 \le 1$, para resolver la integral podemos aplicar el cambio de variables $\begin{cases} x = 2r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = 2r$. $\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} x^2\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 4r^2\cos^2(\theta)\,2r\,dr}_{\cos^2(\theta)[2r^4]_0^1} = 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 d\theta}_{[\theta/2+\text{sen}(2\theta)/4]_0^{2\pi}} = 2\pi.$$ Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = 2\pi}$.

3. Dado $\vec{f}:\Re^2\to\Re^2$ / $\vec{f}(x,y)=((2+2x)e^{x^2+2x+y^2}, 2y\,e^{x^2+2x+y^2})$, que admite función potencial ϕ en su dominio, sabiendo que $\phi(0,0)=3$ **calcule** la longitud de la curva de nivel 3 de ϕ.

Siendo $\vec{f}=\nabla\phi$ debe cumplirse que $\begin{cases}\phi'_x(x,y)=(2+2x)e^{x^2+2x+y^2} & (1)\\ \phi'_y(x,y)=2y\,e^{x^2+2x+y^2} & (2)\end{cases}$.

De (2) $\Rightarrow$ $\phi(x,y)=\int 2y\,e^{x^2+2x+y^2}dy=e^{x^2+2x+y^2}+\lambda(x)$ (*)

Desde $(*)$, teniendo en cuenta (1) resulta:

$$\phi'_x(x,y)=(2x+2)e^{x^2+2x+y^2}+\lambda'(x)\overset{(1)}{=}(2+2x)e^{x^2+2x+y^2}\Rightarrow\lambda'(x)=0\Rightarrow\lambda(x)=C$$

Reemplazando en $(*)$ se tiene que la familia de posibles funciones potenciales es:

$\phi(x,y)=e^{x^2+2x+y^2}+C$ pero se especifica que $\phi(0,0)=3$, de donde $3=1+C\Rightarrow C=2$

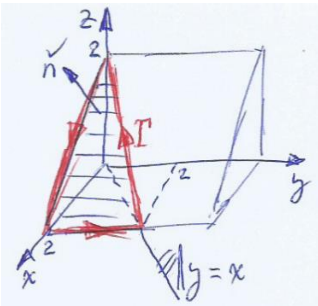
Con lo cual, la función potencial es $\phi(x,y)=e^{x^2+2x+y^2}+2$.

Entonces la curva de nivel 3 de ϕ, L_3, tiene ecuación $e^{x^2+2x+y^2}+2=3\Rightarrow e^{x^2+2x+y^2}=1$, por lo tanto resulta $x^2+2x+y^2=0$. Completando cuadrados se tiene $(x+1)^2+y^2=1$ que es una circunferencia de radio $R=1$ con centro en el punto $(-1,0)$, por lo tanto su longitud ($2\pi R$) es 2π.

Respuesta: $\boxed{\operatorname{long}(L_3)=2\pi}$.

4. Sea Γ la curva borde del trozo de plano de ecuación $x+z=2$ con $y\le x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ si $\vec{f}(x,y,z)=(4y,\ z+g(y),\ 2x+g(z))$ con $\vec{f}\in C^1(\Re^3)$, **indique** gráficamente cómo decidió orientar a Γ.

En el esquema de la derecha se representa en color rojo la curva Γ y la orientación elegida para la misma.



Dado que Γ es cerrada podemos aplicar el teorema del rotor, usando como superficie Σ el mismo trozo de plano que es dato. Es decir:

$$\int_{\Gamma^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_\Sigma \nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma$$

Donde $\nabla\times\vec{f}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 4y & z+g(y) & 2x+g(z)\end{vmatrix}=(-1,-2,-4)$.

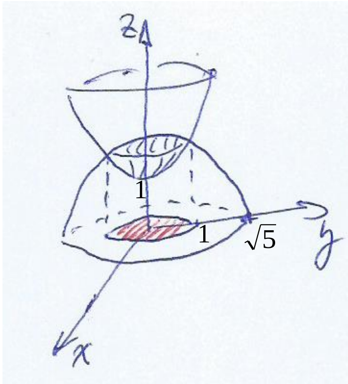
Por su parte una ecuación vectorial para Σ es $\vec{X}=\underbrace{(x,\ y,\ 2-x)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y)\in D_{xy}$, donde –como se observa en el gráfico– D_{xy} es el triángulo proyección de Σ (rayada en azul) sobre el plano xy.

Con esto, $\vec{n}=\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,0,1)$ que tiene la orientación correcta (ver en el gráfico el versor normal a Σ, en coherencia con la orientación elegida para Γ).

Entonces, $\int_{\Gamma^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\underbrace{\nabla\times\vec{f}(x,y,2-x)\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\|\vec{n}\|}_{(-1,-2,-4)\cdot(1,0,1)\,=\,-5}dx\,dy$.

$$\int_{\Gamma^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-5\iint_{D_{xy}}dx\,dy=-5\,\text{área}(D_{xy})=-5\,\frac{2\,2}{2}=-10.$$ Respuesta: $\boxed{\int_{\Gamma^+}\vec{f}\cdot d\vec{s}=-10}$.

5. Calcule el volumen del cuerpo H cuyos puntos cumplen con $x^2+y^2+z^2 \le 5$, $z \ge x^2+y^2+1$.



Según se observa en el esquema la curva intersección entre ambas superficies que forman la frontera de H es:

$$C=\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z-1+z^2=5 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z^2+z-6=0 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases}$$

Pero $z^2+z-6=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \to z_1=2,\ z_2=-3$, pero se descarta z_2 pues debe ser $z>0$ (surge del esquema o bien de observar que una de las ecuaciones es $z=x^2+y^2+1$).

Entonces:

$C=\begin{cases} z=2 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, de donde la región D_{xy} rayada en rojo en el esquema cumple con $x^2+y^2 \le 1$.

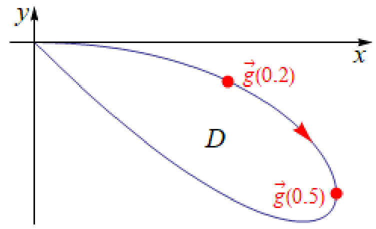
Luego, $\mathrm{vol}(H)=\iiint_H dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{x^2+y^2+1}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dz=\iint_{D_{xy}} [\sqrt{5-x^2-y^2}-(x^2+y^2+1)]\,dx\,dy$.

Pasando a coordenadas polares, ya que D_{xy} es un círculo de radio 1 con centro en el origen, queda:

$$\mathrm{vol}(H)=\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 [\sqrt{5-r^2}-(r^2+1)]\,r\,dr}_{[-\frac{1}{3}(5-r^2)^{3/2}-r^4/4-r^2/2]_0^1}=\frac{20\sqrt{5}-41}{12}\int_0^{2\pi} d\theta=\pi\,\frac{20\sqrt{5}-41}{6}$$

Respuesta: $\boxed{\mathrm{vol}(H)=\pi\,\frac{20\sqrt{5}-41}{6}}$.

TEMA 2



1. **Calcule** el área de la región D del plano xy que se representa en la figura, sabiendo que su curva frontera ∂D admite la ecuación $\vec{X} = (t-t^2\,,\, t^3-t^2)$ con $0 \le t \le 1$.

Denotando $\vec{g}(t) = (t-t^2\,,\, t^3-t^2)$ vemos que $\vec{g}(0) = \vec{g}(1) = (0,0)$, lógicamente ∂D es una curva cerrada. Podemos calcular el área pedida mediante una conveniente aplicación del teorema de Green, usando –por ejemplo– el campo $\vec{f}(x,y) = (\underbrace{0}_{P(x,y)}\,,\,\underbrace{x}_{Q(x,y)})$ para el cual $Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 1$ constante.

Luego $\int_{\partial D^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_D 1\,dx\,dy = \text{área}(D)$.

Debemos verificar si la curva está bien orientada. Para ello calculamos y representamos aproximadamente en el gráfico (en rojo), por ejemplo, $\vec{g}(0.2) = (0.16, -0.032)$ y $\vec{g}(0.5) = (0.25, -0.125)$, con lo cual vemos que a través de $\vec{g}$ la frontera queda orientada en sentido negativo. Entonces:

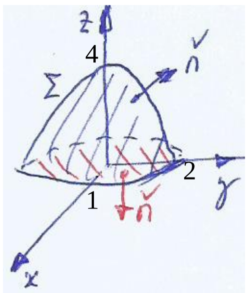
$$\text{área}(D) = \int_{\partial D^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_{\partial D^-} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_0^1 \vec{f}(\vec{g}(t))\cdot \vec{g}\,'(t)\,dt = -\int_0^1 (0, t-t^2)\cdot(1-2t, 3t^2-2t)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \underbrace{(t-t^2)\,(3t^2-2t)}_{5t^3-2t^2-3t^4}\,dt = -[\tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{3}{5}t^5]_0^1 = 1/60$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}(D) = 1/60}$.

---

2. Sabiendo que en puntos del plano xy es $\vec{f}(x,y,0) = (x\,y, y^2, y^2)$, $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ y que $\vec{f}$ es solenoidal, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = 4 - 4x^2 - y^2$ con $z \ge 0$, orientada hacia z^+.



Observando el esquema, vemos que si “cerramos” la superficie Σ con el trozo Σ_1 (en rojo) del plano de ecuación $z = 0$ con $4x^2 + y^2 \le 4$, queda definido un cuerpo D cuya frontera es $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_1$.

Ya que $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{f})}_{\substack{=0\\ solenoidal}}\,dx\,dy\,dz = 0$$

Entonces $\oiint_{\partial D} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma + \iint_{\Sigma_1\downarrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = 0$ donde $\Sigma\uparrow$ indica orientación hacia z^+ y $\Sigma_1\downarrow$ hacia z^-.

De donde, $\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = -\iint_{\Sigma_1\downarrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma_1\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} y^2\,dx\,dy$.

Dado que D_{xy} queda definido por $4x^2 + y^2 \le 4$ o bien $x^2 + y^2/2^2 \le 1$, para resolver la integral podemos aplicar el cambio de variables $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 2r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ con $|J(r,\theta)| = 2r$. $\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} y^2\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 4\,r^2\,\text{sen}^2(\theta)\,2r\,dr}_{\text{sen}^2(\theta)[2r^4]_0^1} = 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 d\theta}_{[\theta/2-\text{sen}(2\theta)/4]_0^{2\pi}} = 2\pi.$$

Respuesta: $\boxed{\iint_{\Sigma\uparrow} \vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = 2\pi}$.

3. Dado $\vec{f}:\Re^2 \to \Re^2 \;/\; \vec{f}(x,y) = (2x\,e^{x^2+2y+y^2}\,,(2+2y)\,e^{x^2+2y+y^2})$, que admite función potencial ϕ en su dominio, sabiendo que $\phi(0,0)=4$ **calcule** la longitud de la curva de nivel 4 de ϕ.

Siendo $\vec{f} = \nabla\phi$ debe cumplirse que $\begin{cases} \phi'_x(x,y) = 2x\,e^{x^2+2y+y^2} & (1) \\ \phi'_y(x,y) = (2+2y)\,e^{x^2+2y+y^2} & (2) \end{cases}$.

De (1) $\Rightarrow\ \phi(x,y) = \int 2x e^{x^2+2y+y^2} dx = e^{x^2+2y+y^2} + \lambda(y) \quad (*)$

Desde $(*)$, teniendo en cuenta (2) resulta:

$$\phi'_y(x,y) = (2y+2)e^{x^2+2y+y^2} + \lambda'(y) \overset{(1)}{=} (2+2y)e^{x^2+2y+y^2} \Rightarrow \lambda'(y) = 0 \Rightarrow \lambda(y) = C$$

Reemplazando en $(*)$ se tiene que la familia de posibles funciones potenciales es:

$\phi(x,y) = e^{x^2+2y+y^2} + C$ pero se especifica que $\phi(0,0)=4$, de donde $4 = 1 + C \Rightarrow C = 3$

Con lo cual, la función potencial es $\phi(x,y) = e^{x^2+2y+y^2} + 3$.

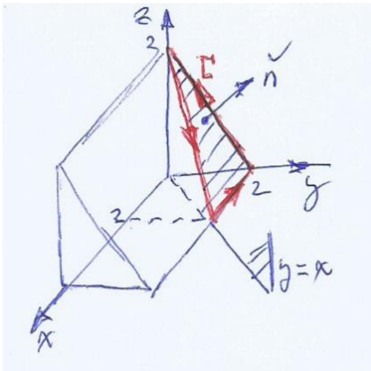
Entonces la curva de nivel 4 de ϕ, L_4, tiene ecuación $e^{x^2+2y+y^2} + 3 = 4 \Rightarrow e^{x^2+2y+y^2} = 1$, por lo tanto resulta $x^2 + 2y + y^2 = 0$. Completando cuadrados se tiene $x^2 + (y+1)^2 = 1$ que es una circunferencia de radio $R=1$ con centro en el punto $(0,-1)$, por lo tanto su longitud ($2\pi R$) es 2π.

Respuesta: $\boxed{\operatorname{long}(L_4) = 2\pi}$.

---

4. Sea Γ la curva borde del trozo de plano de ecuación $y+z=2$ con $y \ge x,\ x \ge 0,\ z \ge 0$. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ si $\vec{f}(x,y,z) = (5y,\ z+4g(y),\ 3x+g(z))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$, **indique** gráficamente cómo decidió orientar a Γ.

En el esquema de la derecha se representa en color rojo la curva Γ y la orientación elegida para la misma.



Dado que Γ es cerrada podemos aplicar el teorema del rotor, usando como superficie Σ el mismo trozo de plano que es dato. Es decir:

$$\int_{\Gamma^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma$$

Donde $\nabla\times\vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 5y & z+4g(y) & 3x+g(z) \end{vmatrix} = (-1,-3,-5)$.

Por su parte una ecuación vectorial para Σ es $\vec{X} = \underbrace{(x,\ y,\ 2-y)}_{\vec{F}(x,y)}$ con $(x,y)\in D_{xy}$, donde –como se observa en el gráfico– D_{xy} es el triángulo proyección de Σ (rayada en azul) sobre el plano xy.

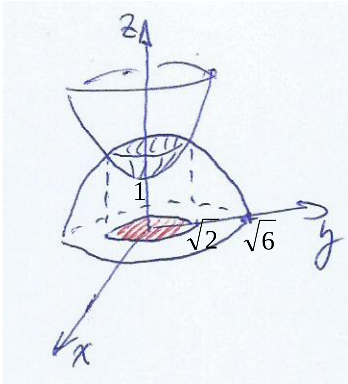
Con esto, $\vec{n} = \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$ que tiene la orientación correcta (ver en el gráfico el versor normal a Σ, en coherencia con la orientación elegida para Γ).

Entonces, $\int_{\Gamma^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \underbrace{\nabla\times\vec{f}(x,y,2-y)\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\|\vec{n}\|}_{(-1,-3,-5)\cdot(0,1,1)\,=\,-8}\,dx\,dy$.

$$\int_{\Gamma^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -8\iint_{D_{xy}} dx\,dy = -8\ \text{área}(D_{xy}) = -8\,\frac{2\,2}{2} = -16.$$

Respuesta: $\boxed{\int_{\Gamma^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -16}$.

5. Calcule el volumen del cuerpo H cuyos puntos cumplen con $x^2+y^2+z^2 \le 6$, $2z \ge x^2+y^2+2$.



Según se observa en el esquema la curva intersección entre ambas superficies que forman la frontera de H es:

$$C=\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ 2z=x^2+y^2+2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2z-2+z^2=6 \\ 2z=x^2+y^2+2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z^2+2z-8=0 \\ 2z=x^2+y^2+2 \end{cases}$$

Pero $z^2+2z-8=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} \to z_1=2,\ z_2=-4$, pero se descarta z_2 pues debe ser $z>0$ (surge del esquema o bien de observar que una de las ecuaciones es $2z=x^2+y^2+2$).

Entonces:

$$C=\begin{cases} z=2 \\ 2z=x^2+y^2+2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases},$$ de donde la región D_{xy} rayada en rojo en el esquema cumple con $x^2+y^2 \le 2$.

Luego,

$$\mathrm{vol}(H)=\iiint_H dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{(x^2+y^2+2)/2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz=\iint_{D_{xy}} [\sqrt{6-x^2-y^2}-(x^2+y^2+2)/2]\,dx\,dy\,.$$

Pasando a coordenadas polares, ya que D_{xy} es un círculo de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen, queda:

$$\mathrm{vol}(H)=\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} [\sqrt{6-r^2}-(r^2+2)/2]\,r\,dr}_{[-\frac{1}{3}(6-r^2)^{3/2}-r^4/8-r^2/2]_0^{\sqrt{2}}}=\frac{12\sqrt{6}-25}{6}\int_0^{2\pi} d\theta=\pi\,\frac{12\sqrt{6}-25}{3}$$

Respuesta: $\boxed{\mathrm{vol}(H)=\pi\,\frac{12\sqrt{6}-25}{3}}$.