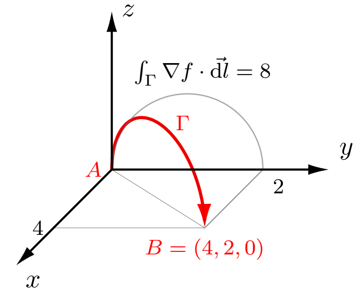
1. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ y la curva Γ definida por las ecuaciones $y^2+z^2=2y, x=2y$. Calcular la circulación del ∇f a lo largo de Γ en sus puntos con coordenada $z\geq 0$, indicando claramente qué puntos se escogen como inicial y final del recorrido.

♣ Una vez graficada y orientada la curva Γ, el ejercicio se reduce a una línea:

$$\int_\Gamma \nabla f\cdot \mathrm{d}\vec{l} = f(B)-f(A) = 8-0 = 8$$

La expresión anterior resulta de que, siendo $\vec{\sigma}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ una parametrización regular de Γ con $A=\vec{\sigma}(a), B=\vec{\sigma}(b)$, considerando la diferenciabilidad de f, la definición de integral curvilínea, la regla de la cadena para la composición $f\circ\vec{\sigma}$ y la regla de Barrow, es:

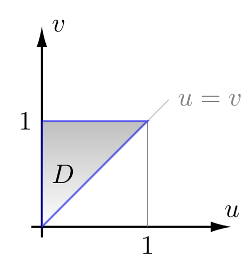
$$\int_\Gamma \nabla f\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \nabla f(\vec{\sigma}(t))\cdot\vec{\sigma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [f(\vec{\sigma}(t))]'\,\mathrm{d}t = f(\vec{\sigma}(b))-f(\vec{\sigma}(a)) = f(B)-f(A)$$



2. En el espacio xyz la superficie Σ tiene ecuación vectorial $(x,y,z)=(v-u,u+v,2u+v^2)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Calcular el área del trozo de Σ cuyos puntos cumplen con $x+y\leq 2, 0\leq x\leq y$.

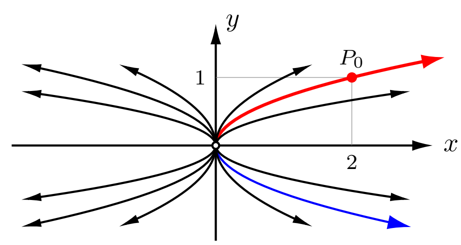
♣ La superficie es $\Sigma=\vec{\sigma}(D)$, siendo $\vec{\sigma}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(u,v)=(v-u,u+v,2u+v^2)$, con $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq v\leq 1, 0\leq u\leq v\}$. El recinto D se obtiene observando que $x+y=2v\leq 2, y-x=2u\geq 0, x=v-u\geq 0$, y como $\vec{\sigma}$ es una parametrización regular e inyectiva de Σ, se sabe que área$(\Sigma)=\iint_\Sigma \mathrm{d}\Sigma=\iint_D \parallel\vec{n}(u,v)\parallel \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, siendo $\vec{n}(u,v)=\vec{\sigma}_u(u,v)\times\vec{\sigma}_v(u,v))$ el producto vectorial fundamental $\vec{n}(u,v)=(-1,1,2)\times(1,1,2v)=2(v-1,v+1,-1)$ cuya norma es $\parallel\vec{n}(u,v)\parallel=2\sqrt{2v^2+3}$. Resulta finalmente que el área de la superficie Σ es:

$$\iint_D \parallel\vec{n}(u,v)\parallel\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1\int_0^v 2\sqrt{2v^2+3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 2v\sqrt{2v^2+3}\,\mathrm{d}v = (2v^2+3)^{3/2}/3\ |_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{3}$$
.



3. Dado el campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y)=(2x,y)$, hallar una ecuación para la línea de campo que pasa por $P_0=(2,1)$, graficarla e indicar su orientación en ese punto.

♣ Por definición de línea de campo, puede responderse de inmediato que un vector tangente en P_0 es el vector $\vec{f}(P_0)=(4,1)$. Una línea de campo para $\vec{f}(x,y)=(p(x,y),q(x,y))$ debe satisfacer la ecuación diferencial $q(x,y)\,\mathrm{d}x-p(x,y)\,\mathrm{d}y=0$, que en este caso es $y\,\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0$, la que se satisface para cualquier curva de la familia de parábolas $x=cy^2, c\in\mathbb{R}$. La única curva de esa familia que pasa por P_0 debe satisfacer $2=c(1)^2$, de donde $c=2$, estando entonces contenida en la parábola de ecuación $x=2y^2$ (observar que las líneas de campo no están definidas en $(0,0)$, de modo que se trata del tramo de la parábola en que $y>0$, tal como se indica en rojo en la figura, pero no el azul, en que es $y<0$).

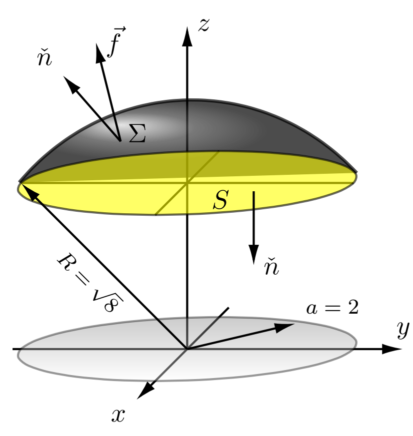


4. Calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $x^2+y^2+z^2=8$ con $z\geq 2$, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z)=(h(y),h(x),4z)$ es $C^1(\mathbb{R}^3)$, indicando gráficamente la orientación adoptada para Σ.

♣ Definiendo el compacto $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2\leq z\leq\sqrt{8-x^2-y^2}\}$ de cúpula esférica Σ y base $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=2, x^2+y^2\leq 4\}$ orientadas como en la figura, resulta que $\Sigma\cup S=\partial M^+$ es suave excepto en $\Sigma\cap S$ que es de área nula, y dada la diferenciabilidad de $\vec{f}$, se aplica el teorema de la divergencia como $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma+\iint_S \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. El cálculo de $\iint_S \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S$ es inmediato observando que para cualquier $(x,y,z)\in S$ se tiene que $\vec{f}(x,y,z)\cdot\check{n}=(h(y),h(x),4(2))\cdot(0,0,-1)=-8$, de modo que $\iint_S \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S=-8\iint_S \mathrm{d}S=-8\,\text{área}(S)=-8\pi(2)^2=-32\pi$. Por otra parte, la divergencia del campo es constante (de valor 4) así que utilizando coordenadas cilíndricas queda:

$$\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V = 4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\,\mathrm{d}r\int_2^{\sqrt{8-r^2}}\mathrm{d}z = 8\pi\int_0^2(\sqrt{8-r^2}-2)r\,\mathrm{d}r$$

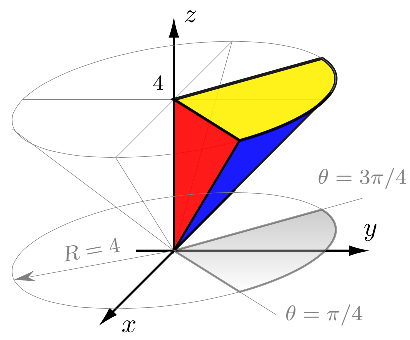
y como $\int_0^2(\sqrt{8-r^2}-2)r\,\mathrm{d}r=-[(8-r^2)^{3/2}/3+r^2]\ |_0^2=(8^{3/2}-4^{3/2})/3-4=(16\sqrt{2}-8)/3-4$ resulta que $\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V=8\pi(16\sqrt{2}-8)/3-32\pi$, y como $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma+\iint_S \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$, queda finalmente el flujo pedido: $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=8\pi(16\sqrt{2}-8)/3$.



$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=8\pi(16\sqrt{2}-8)/3$

5. El cuerpo H definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4, y \geq \mid x \mid$ tiene densidad $\delta(x,y,z) = kz$ con $k > 0$. Calcular la masa de H.

♣ La proyección de H sobre el plano xy es el sector circular de abertura $pi/2$ (grisado en la figura). El cuerpo tiene cuatro caras, una cara cónica (en azul en la figura) y tres caras planas; en la figura son visibles el plano de ecuación $z = 4$ (amarillo) y el plano de ecuación $y = x$ (rojo), en tanto que queda detrás en la perspectiva escogida el plano de ecuación $y = -x$ Se sabe que masa$(H) = \int_H \delta \, \mathrm{d}V$, cálculo para el cual son apropiadas las coordenadas cilíndricas (r, θ, z), tal como lo muestra la siguiente línea.



$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, 0 \leq r \leq 4, r \leq z \leq 4$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^4 \int_r^4 \underbrace{kz}_{\delta} \underbrace{r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}V} = \frac{k\pi}{4} \int_0^4 (16r^2 - r^3) \, \mathrm{d}r = \frac{k\pi}{4} (8r^2 - r^4/4) \mid_0^4 = 16k\pi$$

♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) Si bien la resolución del ejercicio (1) es sencilla, pues no requiere sino determinar los puntos que son conectados por la curva, alternativamente podría practicarse el ejercicio de realizar el cálculo del gradiente de f y parametrizar el segmento AB (¡y no la curva Γ, ya que la circulación no dependerá de la trayectoria!). También es recomendable obtener la ecuación del cilindro proyectante sobre el plano xz y graficarlo, para visualizar la curva Γ como contenida también en ese cilindro.

(b) Una forma alternativa de resolver el ejercicio (2), sumamente engorrosa, consiste en obtener la acuación cartesiana de la superficie para luego calcular su área como la de una porción del gráfico del campo escalar que la define. Sin preocuparse por la eficiencia, es un buen ejercicio hacerlo, adquiriendo cierta sensibilidad para escoger los procedimientos ante casos de la misma clase.

(c) Al resolver la ecuación diferencial del ejercicio (3), $y \, \mathrm{d}x - 2x \, \mathrm{d}y = 0$, es imprescindible, cualquiera sea el método utilizado, que se seleccione *previamente* el cuadrante en el que se busca la solución (en el caso del ejercicio, el primero). Detallar esa resolución e indicar en qué parte de la misma debe necesariamente escogerse un cuadrante. En el mismo ejercicio, al determinar las trayectorias ortogonales a la familia de líneas de campo se obtienen elipses: obtenerlas y darle darle una interpretción física es un buen ejercicio adicional.

(d) En el ejercicio (4), la integral de la divergencia termina siendo proporcional al volumen de la lentejuela M. Se sugiere incluir este problema en una clase más amplia, el cálculo del volumen de la región del espacio interior a la esfera de radio R por encima del plano $z = h$ (con $0 \leq h \leq R$) y resolverlo, para encontrar el valor $\pi(2R^3 - 3R^2h + h^3)/3$.

(e) El ejercicio (5) corresponde al tema 2 de la fecha, cuando el resto corresponde al tema 1 (son completamente equivalentes, desde luego); se sugiere realizar el ejercicio adicional de calcular la posición G del centro de masa de H.