

Nombre y Apellido:

Número de Padrón:

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios. En la resolución de integrales, cada paso de integración debe resolverse indicando la primitiva y los límites correspondientes.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Calcule el volumen del sólido $H \subset \mathbb{R}^3$ definido por las condiciones

$$x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \quad \wedge \quad x - 4 \leq z \leq 4 - x.$$

Haga un gráfico de H .

- **Ejercicio 2.** Sea D la región encerrada entre las curvas de ecuaciones $y^2 - 2y - x = 0$ y $x = 3$. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\oint_{\partial D^+} 4ay \, dx + a^2 x \, dy$$

sea mínima y halle ese valor extremo.

- **Ejercicio 3.** Sea Σ la superficie definida por las condiciones $y - x^2 = 1$, $y \leq 5$ y $0 \leq z \leq 2$ orientada de modo que el versor normal en $(0, 1, 0)$ sea \check{j} .

Calcule $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ con $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, ze^x)$.

- **Ejercicio 4.** Sea $\vec{f}(x, y, z) = (x g(x), y g(x), 1 - 3z g(x))$ con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Halle g para que $\vec{f}(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, la divergencia de \vec{f} sea constante y el flujo de \vec{f} a través de la frontera de un cubo H de arista 2 sea 16, cuando ∂H se orienta tomando la normal entrante a H .

- **Ejercicio 5.** Sea $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ tal que $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y \vec{g} tiene componentes en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

Calcule la circulación \vec{f} a lo largo de la curva $\vec{X} = (1 + 2 \cos(t), 2 \sin(t), 1 + \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$, con la orientación dada por la parametrización, sabiendo que:

1. $\varphi(x, 0, 1) = x^2$;
2. $\vec{g}(x, 0, 1) = (1, x, 2)$;
3. $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x, 2z - y, 0)$.