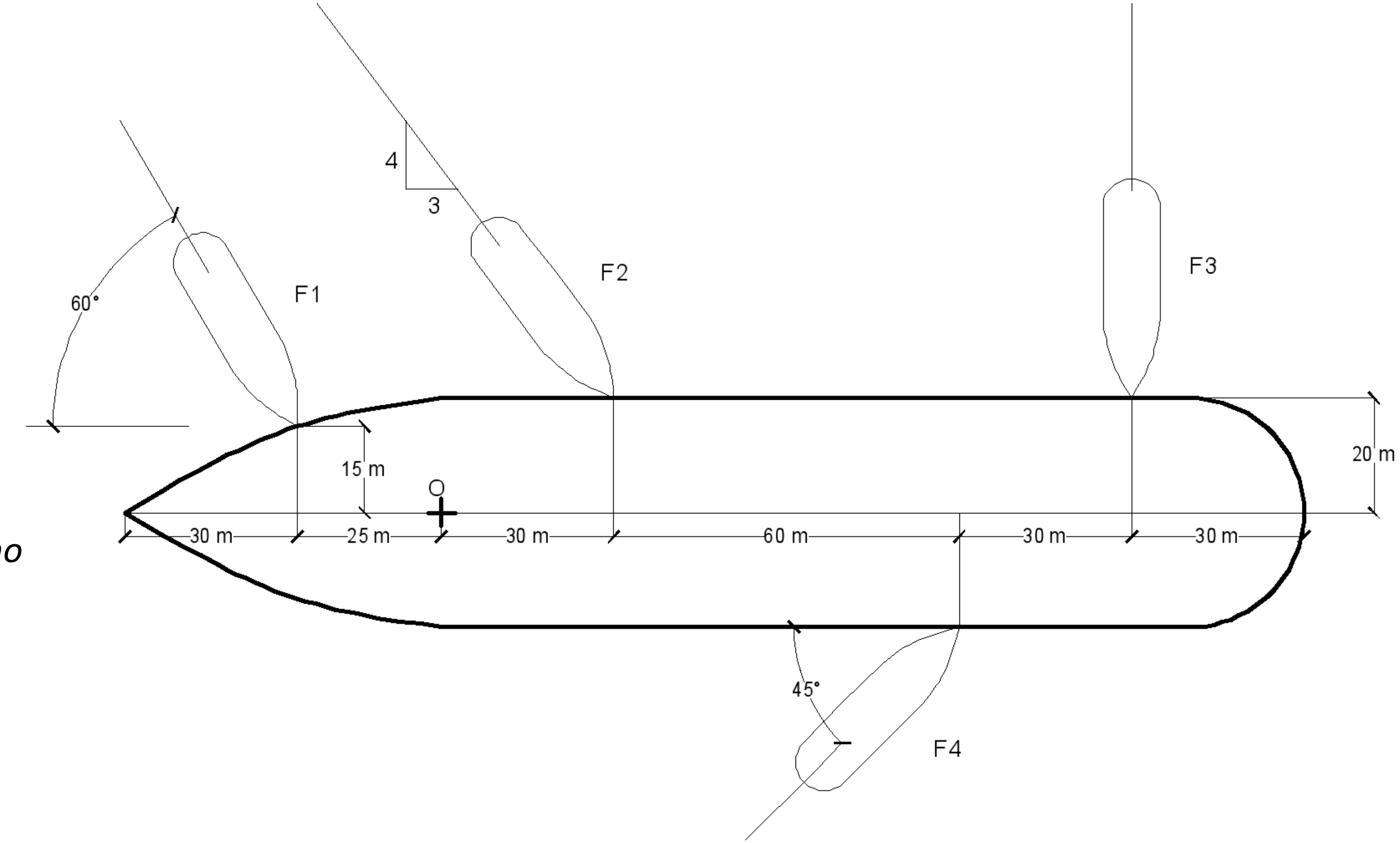
Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un transatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 25 kN en la dirección mostrada en la figura.

Determine:

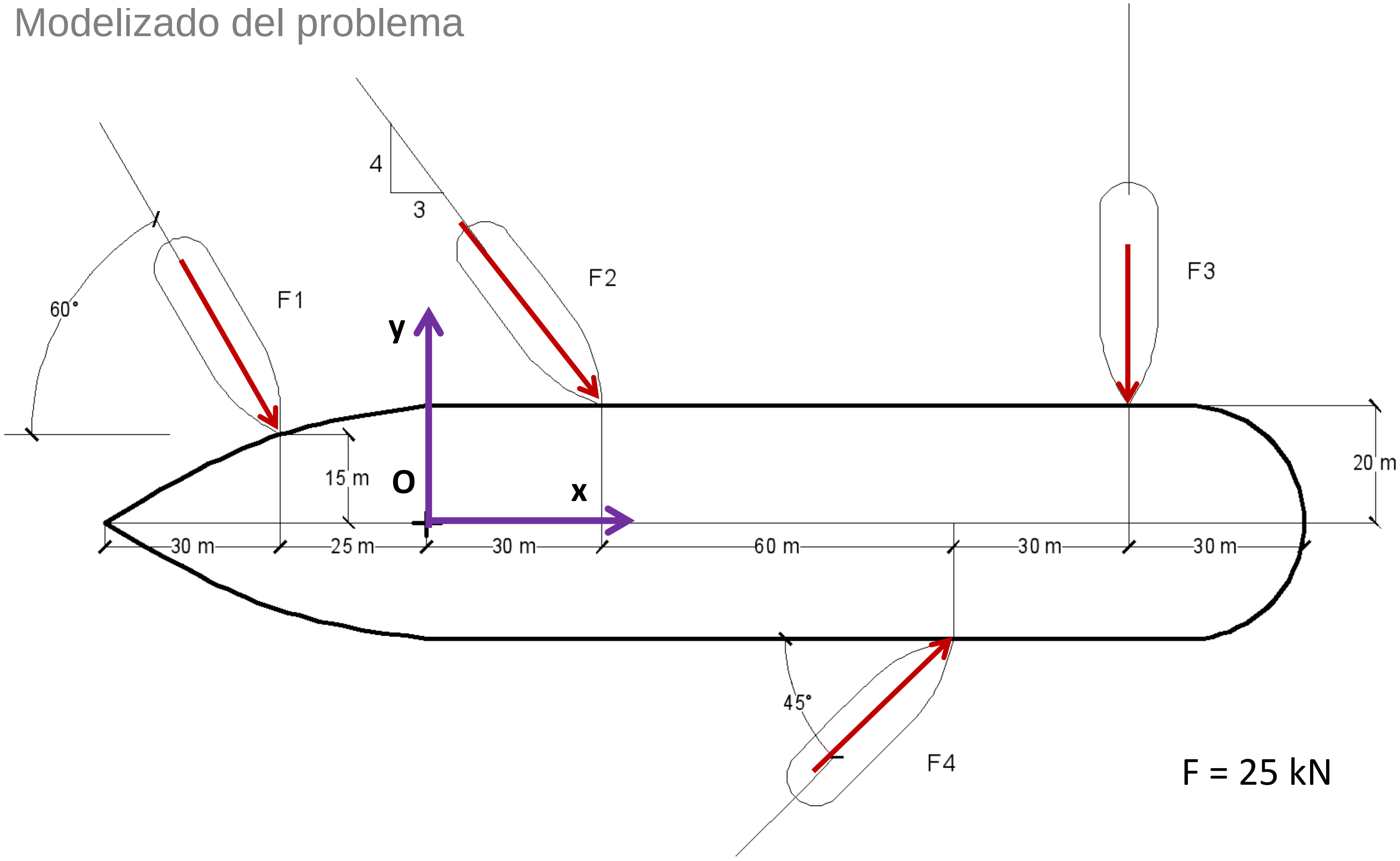
1. *El sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.*
2. *El punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.*



Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Modelizado del problema



F = 25 kN

Debemos poder realizar un esquema lo suficientemente simple y que represente de la mejor manera el problema físico. **Es muy importante establecer un sistema de referencias en este momento. Esto nos determinará los signos de todo lo que hagamos.**

Luego, habiendo realizado nuestra modelización, tenemos que poder discernir **qué es lo que se nos está pidiendo,** para este problema en particular podemos resumirlo en dos partes:

- **Para la parte 1**, se trata de una reducción de un sistema de fuerzas plano.
- **Para la 2,** una traslación de un sistema.

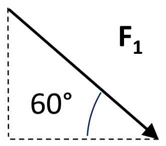
Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Encontrar el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.

1. Primero obtenemos las componentes de las fuerzas aplicadas, mediante el uso de geometría.

<u>Remolque 1</u>



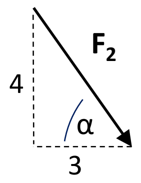
$F_{1x} = F_1 .\cos(60°) = 12.5$ kN

$F_{1y} = - F_1 .\sin(60°) = - 21.6$ kN

Una regla mnemotécnica para saber cuándo es coseno y cuando seno, es la frase *"el que cae es el coseno"*.
En este caso, la fuerza F1 *cae* sobre la horizontal con el ángulo de 60°, por lo tanto, la componente horizontal se encuentra multiplicándola por el coseno del mismo.

Cuidado! *La dirección en **y** es de signo <u>negativo</u> debido a que la dirección es contraria a nuestro sistema de referencias.*

<u>Remolque 2</u>



$F_{2x} = F_1 .0.6 = 15$ kN

$F_{2y} = - F_1 .0.8 = - 20$ kN

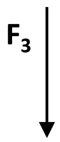
El triángulo 3/4/5 es *famoso* debido a su simplicidad. Con un poco de maña trigonométrica sabemos que la hipotenusa es 5 y por lo tanto encontrar el coseno o seno es relativamente fácil, sin necesidad de encontrar el ángulo propiamente dicho.
Otra buena regla mnemotécnica es *SOHCAHTOA.*

$$\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$sin(\alpha) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Cuidado! *La dirección en **y** es de signo <u>negativo</u> debido a que la dirección es contraria a nuestro sistema de referencias.*

<u>Remolque 3</u>

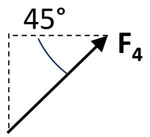


$F_{3x} = 0$

$F_{3y} = - F = - 25$kN

Cuidado! *La dirección en **y** es de signo <u>negativo</u> debido a que la dirección es contraria a nuestro sistema de referencias.*

<u>Remolque 4</u>



$F_{4x} = F_1 .\cos(45°) = 17.7$ kN

$F_{4y} = F_1 .\sin(45°) = 17.7$ kN

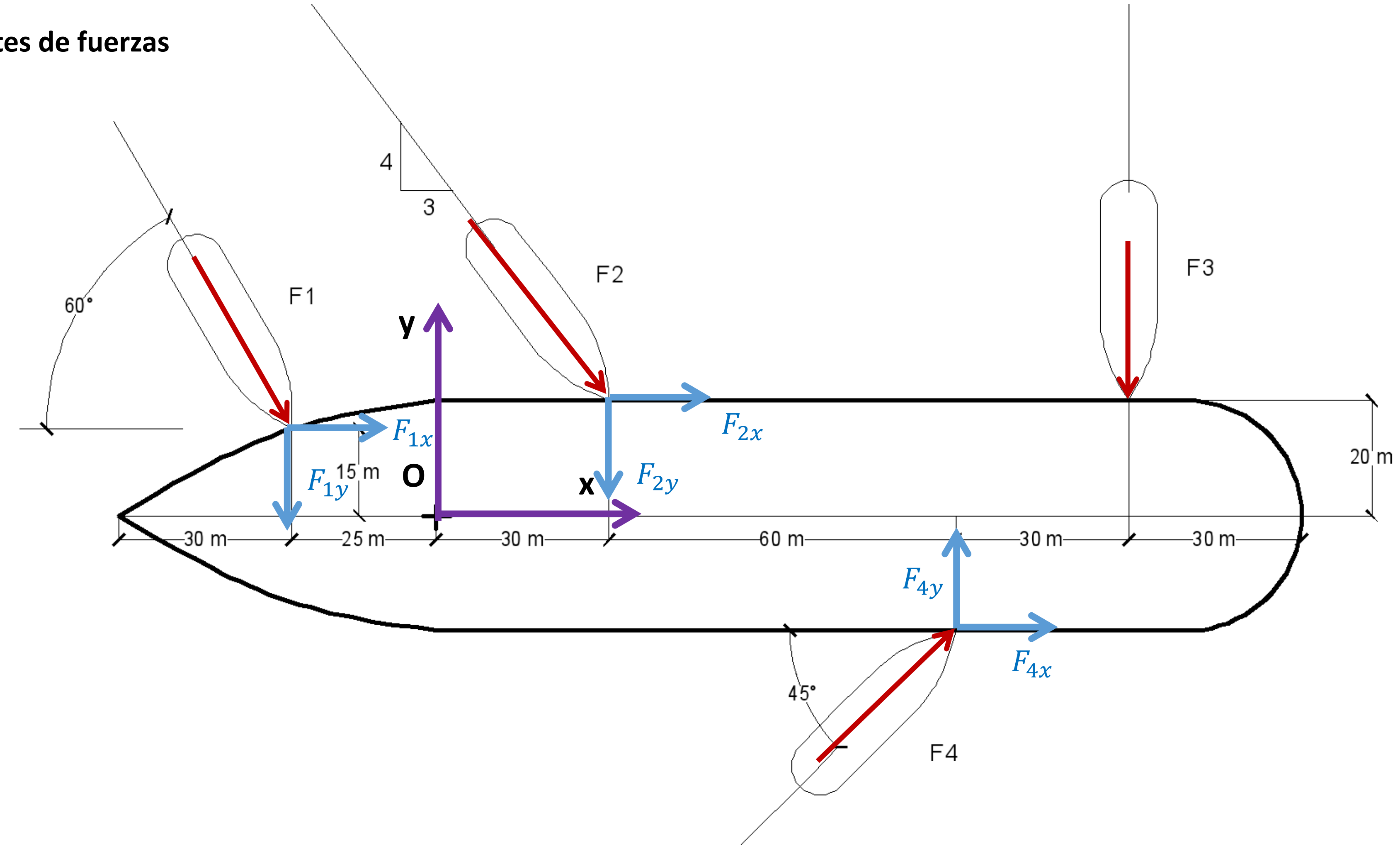
De nuevo, la fuerza F4 cae sobre la horizontal con el ángulo de 45°, luego se multiplica por el coseno del mismo.

Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Encontrar el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.

Esquema de componentes de fuerzas



Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Encontrar el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.

2. Luego, reducimos al punto O para encontrar el sistema fuerza-par equivalente.

2.1 - Para eso, vamos a trabajar con las componentes de la resultante y las componentes de las fuerzas que encontramos anteriormente

$$R^O = Rx^O + Rx^O \qquad Rx^O = \sum F_{xi} \qquad Ry^O = \sum F_{yi}$$

	$\boldsymbol{Rx^O = \sum F_{xi}}$	$\boldsymbol{Ry^O = \sum F_{yi}}$
F1	12.5 kN	-22.7 kN
F2	15 kN	- 20 kN
F3	0	-25 kN
F4	17.7 kN	17.7 kN
R	**45.2 kN**	**-50 kN**

Para ambos ítems, contamos con las mismas herramientas

Por un lado, sabemos que la resultante de un sistema de fuerzas se puede obtener cómo:

$$R^O = \sum F_i$$

Y por otro, debido a la acción de reducción/traslación, sabemos que, en general, obtendremos un momento asociado:

$$Mr^O = \sum M_i + \sum r_i \times F_i$$

compuesto de la suma de los momentos aplicados y de los momentos de traslación.

Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Encontrar el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.

2. Luego, reducimos al punto O para encontrar el sistema fuerza-par equivalente.

2.2 – Habiendo encontrado la **resultante de reducción**, resta encontrar el **par equivalente** de reducción. Lo haremos componente a componente, tomando momentos respecto a los ejes x e y pasantes por O. **Acá nos va a ser útil el esquema de las componentes previo.**

Remolque 1

$$\boldsymbol{M_{F1}} = +25\ m \cdot F_{1y} - 15\ m \cdot F_{1x} = +25\text{m} \cdot 22.7kN - 15m \cdot 12.5kN = 567.5\ kNm - 187.5\ kNm = \mathbf{380}\ \boldsymbol{kNm}$$

Remolque 2

$$\boldsymbol{M_{F2}} = -30\ m \cdot F_{2y} - 20\ m \cdot F_{2x} = -30m \cdot 20kN - 20m \cdot 15kN = -600\ kNm\ - 300\ kNm = \mathbf{-900}\ \boldsymbol{kNm}$$

Remolque 3

$$\boldsymbol{M_{F3}} = -120\ m \cdot F_{3y} = -120m \cdot 25kN = \mathbf{-3000}\ \boldsymbol{kNm}$$

Remolque 4

$$\boldsymbol{M_{F4}} = +90\ m \cdot F_{4y} + 20m \cdot F_{4x} = +90m \cdot 17.7kN + 20m \cdot 17.7kN = 1594\ kNm + 354\ kNm = \mathbf{1948}\ \boldsymbol{kNm}$$

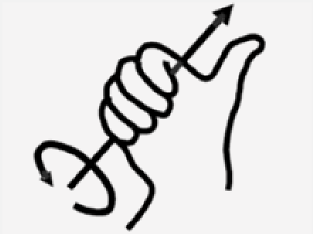
$$\boldsymbol{Mr^O} = \sum r_i \times F_i = 380kNm - 900kNm - 3000kNm + 1948kNm = \mathbf{-1572}\ \boldsymbol{kNm}$$

Recordatorio

El momento de una fuerza respecto de un eje pasante por un punto cualquiera es nulo cuando:

- La fuerza corta al eje respecto del que tomamos momento.
- La fuerza es paralela al eje respecto del que tomamos momento.

Dado el sistema de referencias adoptado, utilizaremos la regla de la mano derecha.



Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Encontrar el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O.

2. Luego, reducimos al punto O para encontrar el sistema fuerza-par equivalente.

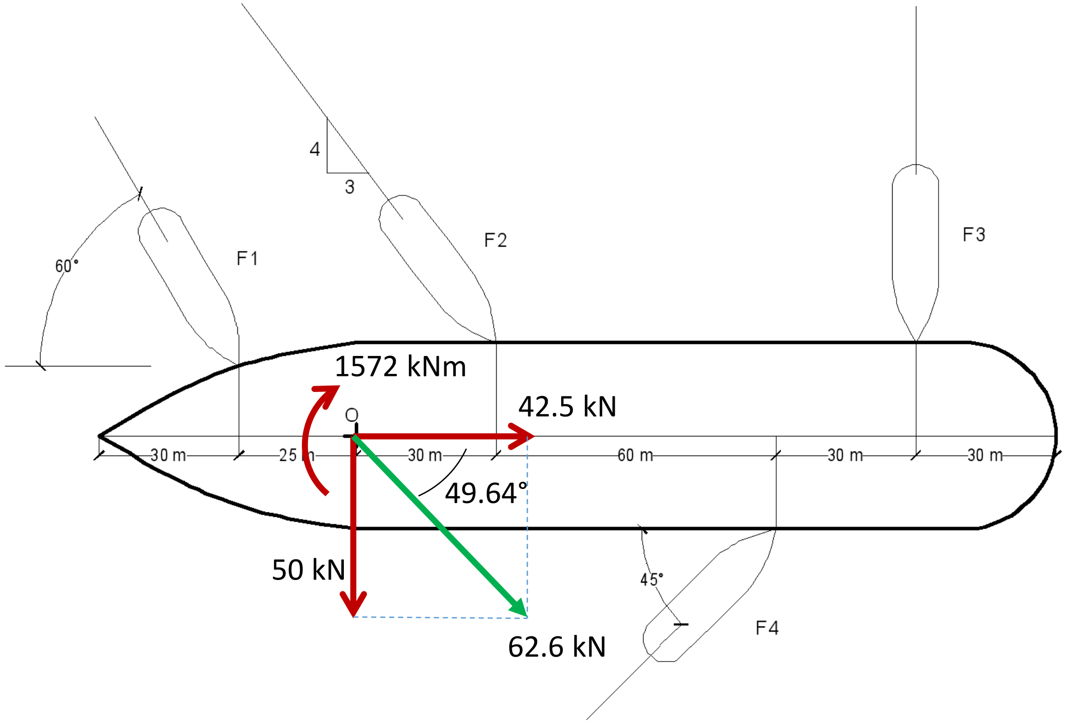
2.3 – Ya contamos con el duo **fuerza-par** pedido para el primer inciso.

Es una buena práctica realizar un esquema con los resultados, además de mostrar el valor resultante.

$$\boldsymbol{R} = \{\mathbf{42.5}\ \boldsymbol{kN}\ ; -\mathbf{50}\ \boldsymbol{kN}\}$$

$$\boldsymbol{Mr^{O}} = -\mathbf{1572}\ \boldsymbol{kNm}$$

Si quisiéramos mostrar el resultado como el módulo de la resultante y el ángulo que forma con la horizontal, basta con hacer lo siguiente.



$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = \sqrt{(42.5\ kN)^2 + (-50\ kN)^2} = \mathbf{62.6}\ \boldsymbol{kN}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Ry}}{Rx}\right) = \arctan\left(\frac{-50}{42.5}\right) = -\mathbf{49.64}°$$

Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

El punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

Lo que se nos pide, es relativamente sencillo, tomando el sistema equivalente en O como punto de partida.

Ya podemos determinar que en este nuevo punto, llamémoslo **A**, la resultante será la misma que en O.

$$R_A = R_O = \{42.5\ kN\ ; -50\ kN\}$$

Para encontrar el punto A, nos valdremos de lo siguiente:

El punto de aplicación A debe ser tal que el momento de la Resultante en A respecto a O sea igual al Momento Mr^o, calculado anteriormente.

Sabemos además que el punto de aplicación está en algún lugar del casco. Luego:

$$Mr^O = -1572\ kNm = -x_a \cdot R_{ay} - 20m \cdot R_{ax} = M_{Ra}^O$$

$$\boldsymbol{x_a} = \frac{+1572m - 20m * 42.5kN}{50\ kN} = \mathbf{14\ m}$$

Recordemos las definiciones de Invariantes para un sistema.

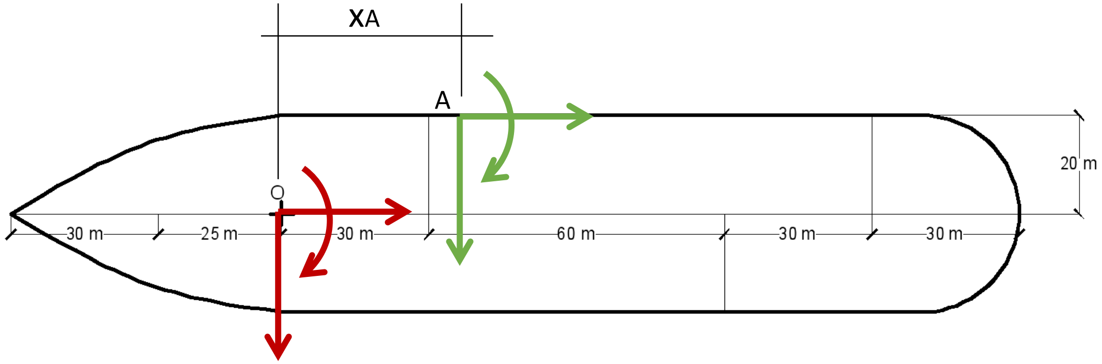
Por un lado tenemos la *Invariante Vectorial,* que no es otra cosa que la Resultante.

Por otro, el *Invariante Escalar* que es la proyección del momento sobre la dirección dada por la resultante.

En fórmulas:

$$I_v = R$$

$$I_e = M \cdot \frac{R}{||R||}$$



Sistema de Fuerzas

Ejercicio en el Plano

Algunas conclusiones

El ejercicio desarrollado trata de mostrar un procedimiento metódico para la resolución de un problema plano de Fuerzas No Concurrentes.

Como dijimos oportunamente, lo único que se aplicó fue la traslación de fuerzas. En efecto, el inciso 2 de lo pedido podría haberse abordado sin tener en cuenta lo obtenido en el 1. Bastaba recordar que la resultante de fuerzas del sistema no varía y plantear un momento respecto de cualquier punto conocido, para luego igualarlo al momento respecto del nuevo punto. Lo único que hubiese cambiado, en cuanto a resultado, es desde dónde medimos el nuevo punto A del sistema equivalente de un solo remolcador.