Análisis Matemático 2 - Curso 22
Clase de repaso / ejercitación 10/05/2024.

Ejercicio 1. (Extremos condicionados) Sea $\vec{f}(x,y) = (\sqrt{y}, \sqrt{1-y^2-x^2})$. Determine en qué puntos del dominio natural de $\vec{f}$, la función $g(x,y) = \|\vec{f}(x,y)\|^2$ produce sus valores máximo y mínimo absolutos y calcule los valores de dichos extremos.

Ejercicio 2. Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación $x - yz = 0$ en el punto $P_1 = (x_0, 2, 1)$ y sea P_2 el punto diferente a P_1 en el cual r_0 también interseca a Σ. Calcule la longitud del segmento $\overline{P_2P_1}$.

Ejercicio 3. Sea $f(x,y) = x^2y + g(y)$, donde $u = g(y)$ es la función que queda definida en forma implícita en un entorno de $(y_0, u_0) = (2,3)$ mediante la ecuación $uy + \frac{\ln(u-y)}{y} = 6$. Calcule un valor aproximado de $f(1.98, 2.02)$ utilizando una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sean $f(u,v) = vu^2 - v^3$, $\vec{g}(x,y) = (x\,\mathrm{sen}(y-1)+1, 3x-y^2+2)$ y $h = f \circ \vec{g}$. Justifique la existencia de las derivadas direccionales de h en el punto $(-1,1)$ y encuentre los versores para los cuales h tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en ese punto.

Ejercicio 5. Halle todos los puntos de la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u+v, u-2v, u^2+v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, para los cuales el plano tangente a Σ en esos puntos resulta paralelo al plano de ecuación $x+y+z=0$. Halle tal plano tangente en cada punto hallado.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x+y > 1 \\ 2xy & \text{si} \quad x+y \leq 1 \end{cases}.$$

Determine todos los puntos donde f es continua y grafique el conjunto de nivel cero de f.

Ejercicio 7. Sabiendo que la ecuación $3x^2yz + z^2e^{x+y} + 2(x+y) = 0$ en el punto $(1,-1,0)$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,-1)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x,y) = f(x-y, x+y)$ en el punto $(0,-1,h(0,-1))$.

Ejercicio 8. Sea $f(x,y,z) = \frac{x^2}{y} + z^2 + (y-1)^2$. Halle los extremos relativos de f en el semiespacio $y > 0$.

Ejercicio 9. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^3 y $g(x,y) = f(3x-2y) + 2x(y-1)$. Demuestre que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$.

Ejercicio 10. Sea $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que $p(u,v) = 3u^2 - uv - v^2 + 2v + 1$ es su polinomio de Taylor de orden dos en $(1,-1)$, y sea $g(x,y) = f(x+y+1, x^2+2y-1)$. Halle la derivada direccional de g en $(0,0)$ en una dirección tangente a la curva de nivel 2 de f en el $(1,-1)$.
