- **Ejercicio 2.** Sean Σ la superficie de ecuación $xy^2 + yz - e^x + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización

$$\vec{X} = (0, t^2, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

1. $\Sigma: xy^2 + yz - e^x + z^2 = 0$ $\qquad \Sigma \cap \Gamma = ?$

$\Gamma: \vec{X} = (\underbrace{0}_{x}, \underbrace{t^2}_{y}, \underbrace{1+t}_{z})$

El problema podría estar planteado con

$\Gamma: \begin{cases} x=0 \\ y=t^2 \\ z=1+t \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=(z-1)^2 \\ t=z-1 \end{cases}$ ⊛

Γ en cartesianas $\to \begin{cases} x=0 \\ y=(z-1)^2 \end{cases}$

Si $P \in \Sigma \Rightarrow P = (\underbrace{0}_{x}, \underbrace{t^2}_{y}, \underbrace{1+t}_{z})$ para algún t y tiene que cumplir la ec. de Σ:

$$0 \cdot (t^2)^2 + t^2(1+t) - e^0 + (1+t)^2 = 0$$

$$t^2(1+t) - 1 + (1+t)^2 = 0$$

$$t^2 + t^3 \cancel{-1} + \cancel{1} + 2t + t^2 = 0$$

$$t^3 + 2t^2 + 2t = 0$$

$$t(t^2+2t+2) = 0 \begin{cases} \nearrow \boxed{t=0} \\ \searrow t^2+2t+2=0 \quad \text{No tiene raíces reales} \end{cases}$$

Hay un solo punto de intersección

$$P = (0, t^2, 1+t)\big|_{t=0} = (0,0,1)$$

$$\boxed{\Sigma \cap \Gamma = \{(0,0,1)\}}$$

Si hubiera estado el problema planteado en cartesianas:

$\Sigma: xy^2 + yz - e^x + z^2 = 0$

$\Gamma: \begin{cases} x=0 \\ y=(z-1)^2 \end{cases}$

$$\Sigma \cap \Gamma: \begin{cases} xy^2 + yz - e^x + z^2 = 0 \\ x = 0 \\ y = (z-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (z-1)^2 z - 1 + z^2 = 0 \\ x=0 \\ y=(z-1)^2 \end{cases}$$

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$$

$L \quad y = (z-1) \qquad\qquad L \quad y = (z-1)$

$$\left\{\begin{array}{l} (z^2-2z+1)z - 1 + z^2 = 0 \\ x=0 \\ y=(z-1)^2 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \overbrace{z^3-2z^2+z-1+z^2=0}^{z^3-z^2+z-1=0} \\ x=0 \\ y=(z-1)^2 \end{array}$$

$z^3-z^2+z-1=0 \longrightarrow z=1$ solución $\Rightarrow$ puedo dividir el pol. por $z-1$

$$\begin{array}{rl|l} & z^3-z^2+z-1 & z-1 \\ - & z^3-z^2 & z^2+1 \\ \hline & 0+0z^2+z-1 & \\ - & z-1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (z^3-z^2+z-1) = (z-1)(z^2+1)$

$(z-1)(z^2+1)=0 \nearrow \boxed{z=1}$

$\searrow z^2+1=0 \quad \nexists z \in \mathbb{R}$

$z=1, \quad x=0, \quad y=0$

$$\boxed{P=(0,0,1)}$$

2. Plano tangente a Σ en $P=(0,0,1)$

$$\Sigma: \; xy^2+yz-e^x+z^2=0$$

$\Sigma: f(x,y,z)=k$

$\nabla f \perp$ plano tangente

Si $f(x,y,z)=xy^2+yz-e^x+z^2 \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$

$$\Sigma: \; f(x,y,z)=0$$

Si $\nabla f(0,0,1) \neq (0,0,0) \Rightarrow \nabla f(0,0,1)$ es un vector normal al plano Π tangente a Σ en $P=(0,0,1)$

$$\nabla f(0,0,1) = (y^2-e^x, \; 2xy+z, \; y+2z)\big|_{(0,0,1)} = (-1,1,2) \perp \Pi$$

$$\Pi: \quad (-1,1,2)\cdot\big[(x,y,z)-(0,0,1)\big]=0$$

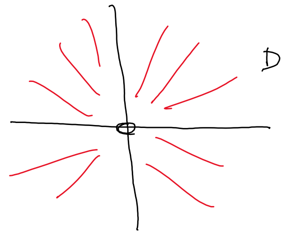
$$(-1,1,2)\cdot(x,y,z-1)=0$$

$$-x+y+2z-2=0 \iff \boxed{-x+y+2z=2}$$

- **Ejercicio 3.** Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2+2x}{2x^2+y^2}.$$

Sean D el dominio natural de f y sea $N_k(f)$ el conjunto de nivel k de f. Grafique los conjuntos $N_0(f)$, $N_{1/4}(f)$ y $N_1(f)$, y explique por qué lo obtenido implica que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

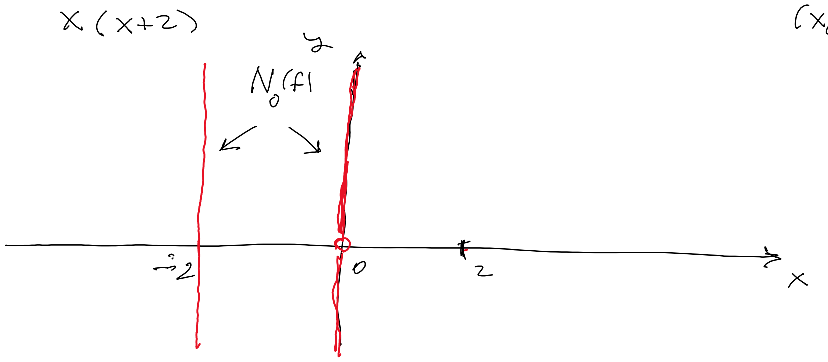


$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Curvas de nivel:

$$N_0(f): \quad f(x,y) = 0 \iff \frac{x^2+2x}{2x^2+y^2} = 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

$$\iff \underbrace{x^2+2x}_{x(x+2)} = 0 \wedge (x,y) \neq (0,0) \iff (x=0 \vee x=-2) \wedge (x,y) \neq (0,0)$$



$$N_{1/4}(f): \quad f(x,y) = 1/4 \iff \frac{x^2+2x}{2x^2+y^2} = 1/4 \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

$$\iff x^2+2x = (2x^2+y^2)\cdot\frac{1}{4} \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

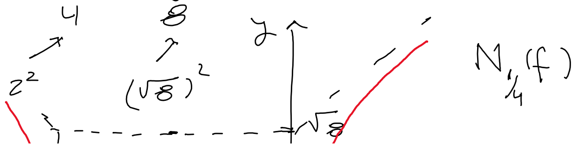
$$\iff 4(x^2+2x) = 2x^2+y^2 \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

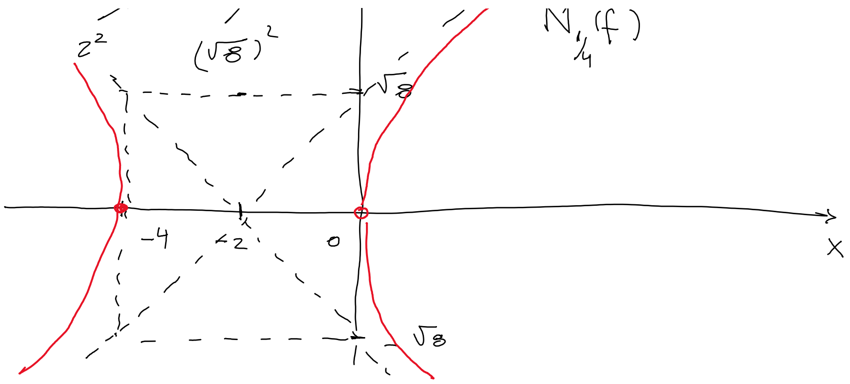
$$\iff 4x^2+8x = 2x^2+y^2 \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

$$\iff 2x^2+8x-y^2 = 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

$$\iff \left.\begin{array}{l} x^2+4x-\frac{y^2}{2} = 0 \\ (x^2+2.2x+4)-4-\frac{y^2}{2} = 0 \\ (x+2)^2 - \frac{y^2}{2} = 4 \\ \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1 \end{array}\right\} \wedge (x,y) \neq (0,0)$$

$2^2 \qquad (\sqrt{8})^2$





Conjunto de nivel 1

$$N_1(f): \quad f(x,y)=1 \iff \frac{x^2+2x}{2x^2+y^2}=1 \quad \wedge \quad (x,y)\neq(0,0)$$

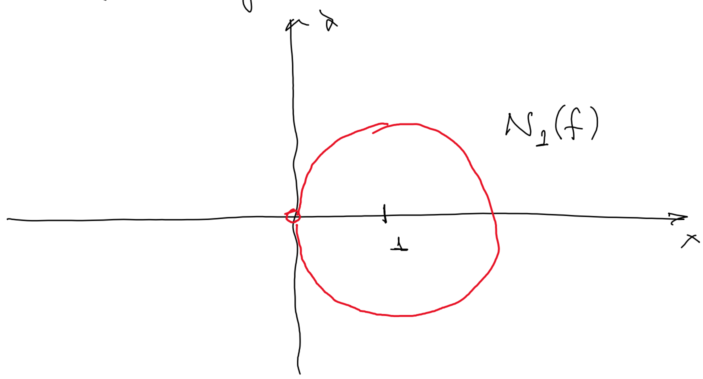
$$\iff \quad x^2+2x = 2x^2+y^2 \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

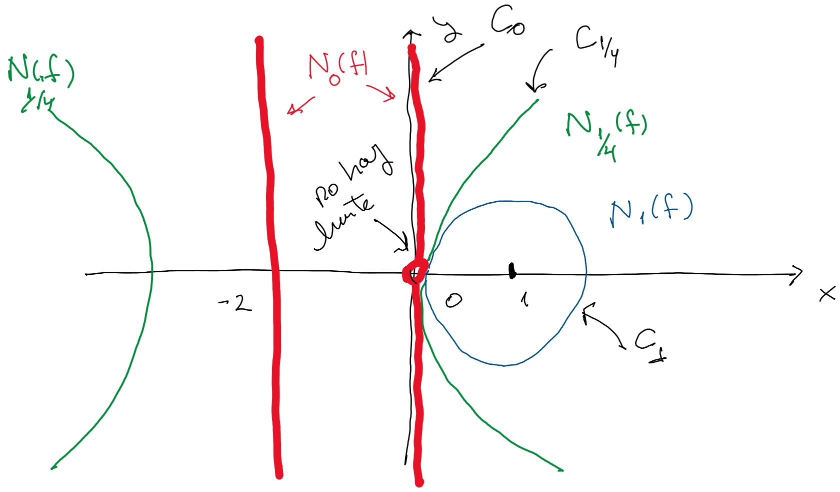
$$0 = x^2-2x+y^2$$

$$0 = x^2-2x+1-1+y^2$$

$$0 = (x-1)^2+y^2-1$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \qquad \wedge \qquad (x,y)\neq(0,0)$$





$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_0}} f(x,y) = 0$$

$$\neq$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_{1/4}}} f(x,y) = 1/4$$

- **Ejercicio 5.** Sean $\vec{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\vec{h}(u,v)=(uv, v+u, v-u) \quad\wedge\quad \vec{f}(x,y,z)=(x+z, yz, x^2+z^2).$$

Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X}=\vec{f}\circ\vec{h}(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P=\vec{f}\circ\vec{h}(1,-1)$.

$\vec{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. $\vec{h}\in\mathcal{C}^\infty$ y $\vec{f}\in\mathcal{C}^\infty$ (componentes polinómicas)

$\Sigma: \vec{X}=(\vec{f}\circ\vec{h})(u,v) \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2$

(La superficie está dada en forma paramétrica.)

Hallar ec. plano tangente a Σ en $P=f\circ\vec{h}(1,-1)$

Sea $\vec{\phi}(u,v)=\vec{f}\circ\vec{h}(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

Entonces $P=\vec{\phi}(1,-1)$. $\qquad P=\vec{f}(\underbrace{\vec{h}(1,-1)})=\vec{f}(-1,0,-2)=(x+z, yz, x^2+z^2)\Big|_{(-1,0,-2)}$

$\vec{h}(1,-1)=(uv, v+u, v-u)\Big|_{(1,-1)}=(-1,0,-2)$

$\boxed{P=(-3,0,5)}$

$\boxed{P=\vec{\phi}(1,-1)}$

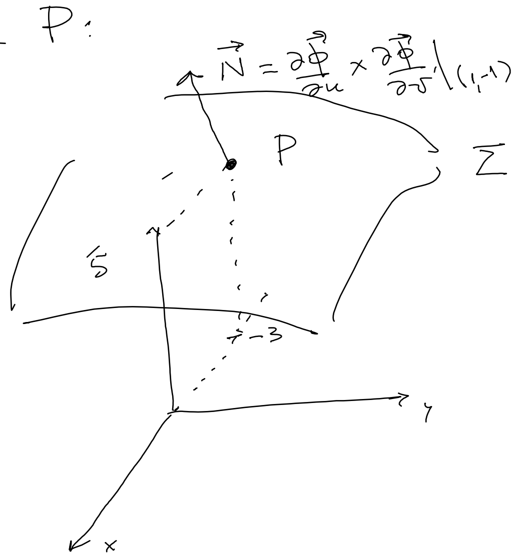
$\Sigma: \vec{X}=\vec{\phi}(u,v) \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2$

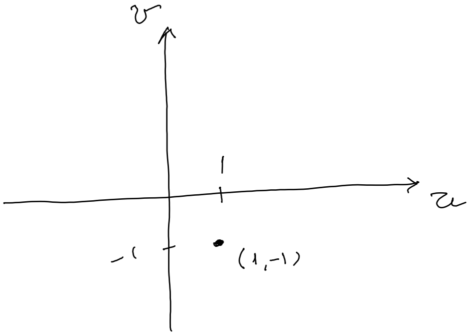
$\vec{\phi}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ porque $\vec{f}$ y $\vec{h}$ son $\mathcal{C}^\infty$

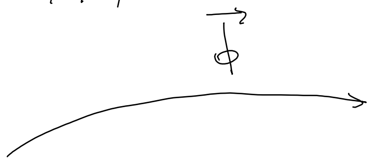
Normal al plano tangente a Σ en P:

$$\vec{N}=\underline{\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}(1,-1)}\times\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}(1,-1)$$

Siempre que $\vec{N}\neq(0,0,0)$







$\vec{\phi}(u,v)=(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$

$$\vec{\phi}(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$$

$$D\vec{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u,v) \qquad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u,v)$$

$$\vec{\phi}(u,v) = \vec{f} \circ \vec{h}(u,v) \underset{\substack{\text{regla} \\ \text{cadena}}}{\Longrightarrow} D\vec{\phi}(u,v) = D\vec{f}(\vec{h}(u,v))\, D\vec{h}(u,v)$$

$$D\vec{\phi}(1,-1) = D\vec{f}(\underbrace{\vec{h}(1,-1)}_{(-1,0,-2)})\, D\vec{h}(1,-1)$$

$$D\vec{\phi}(1,-1) = D\vec{f}(-1,0,-2)\, D\vec{h}(1,-1)$$

$$\vec{h}(u,v) = (uv,\ v+u,\ v-u)$$

$$D\vec{h}(1,-1) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(x,y,z) = (x+z,\ yz,\ x^2+z^2)$$

$$D\vec{f}(-1,0,-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & z & y \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}_{(-1,0,-2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D\phi(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(1,-1) \qquad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(1,-1)$$

$$\vec{N} = (-2,-2,6) \times (2,-2,-6)$$

$$\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -2 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \breve{i}(12+12) - \breve{j}(12-12) + \breve{k}(4+4)$$

$$= (24, 0, 8) = 8\underbrace{(3,0,1)}_{\text{uso ésta}}$$

Plano tangente:

$\Pi: \quad (3,0,1) \cdot ((x,y,z) - P) = 0$

$(3,0,1) \cdot (x+3, y, z-5) = 0 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Sale la ecuación}}$

L una recta en $\mathbb{R}^3$

↗ cartesiana $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$ $(a_1, b_1, c_1) \not\parallel (a_2, b_2, c_2)$

↘ paramétrica o vectorial $P = P_0 + \lambda \vec{v}$

P: (x, y, z)

P_0: (x_0, y_0, z_0), punto de la recta

$\vec{v}$: vector director, (v_1, v_2, v_3)

- **Ejercicio 3.** Pruebe que la ecuación

$$2xy - \cos(y)z + xz^2 = 0$$

define implícitamente una función $z = f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (1,0)$ tal que $f(1,0) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(1,0)$ se anula.

Sea $F(x,y,z) = 2xy - \cos(y)z + xz^2$.

- F es de clase $\mathcal{C}^1$ por suma, producto y comp. de funciones $\mathcal{C}^1$
- $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = f(x_0, y_0) = 1 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$

$F(1,0,1) = 2xy - \cos(y)z + xz^2 \Big|_{(1,0,1)} = -1 + 1 = 0$ ✓

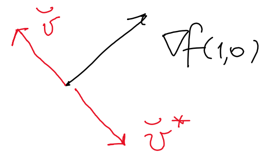
$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = -\cos(y) + 2xz \Big|_{(1,0,1)} = -1 + 2 = 1 \neq 0$

Por el teorema de la función implícita existe tal función $z = f(x,y)$.

Hallar los versores $\breve{v}$ / $f'((1,0), \breve{v}) = 0$ $\Big\{$ $f'((1,0), \breve{v}) = \nabla f(1,0) \cdot \breve{v}$ porque f es $\mathcal{C}^1$

Como $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \nabla f(1,0) \cdot \breve{v} = 0 \qquad (\breve{v} \perp \nabla f(1,0))$

Como $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \nabla f(1,0) \cdot \breve{v} = 0$ $\quad (\breve{v} \perp \nabla f(1,0))$



Calculamos $\nabla f(1,0)$

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \right)$$

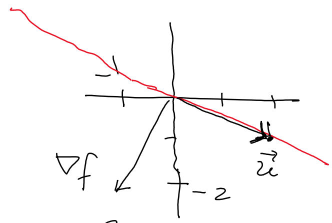
Fórmulas de Dini:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = - \frac{2y + z^2 \big|_{(1,0,1)}}{1} = \boxed{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = - \frac{2x + \operatorname{Sen}(y) z \big|_{(1,0,1)}}{1} = \boxed{-2}$$

$$\nabla f(1,0) = (-1,-2)$$

Buscamos $\breve{v} \,/\, \breve{v} \perp \nabla f(1,0)$ y $\|\breve{v}\| = 1$



$$\breve{v} \perp \nabla f(1,0) \Rightarrow \breve{v} = k\overbrace{(2,-1)}^{\vec{u}} \wedge \|\breve{v}\| = 1$$

$$\breve{v} = (2k, -k) \wedge \underbrace{(2k)^2 + (-k)^2 = 1}_{5k^2 = 1}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow \breve{v}_1 = \left(2\sqrt{1/5}, -\sqrt{1/5}\right) \text{ y } \breve{v}_2\left(-2\sqrt{1/5}, \sqrt{1/5}\right)$$