

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Una ecuación diferencial, es una ecuación en la cual la incógnita es una función que puede depender de una o más variables, y en la cual aparecen además de la función alguna de sus derivadas.

• $xy' + y^2 = \text{Sen}(x)$ incógnita: $y = y(x)$ (EDO)

• $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = e^{xy}$ incógnita: $u = u(x,y)$ (EDP)

- Una ecuación diferencial ordinaria es aquella en la cual la función incógnita depende de una sola variable.
- Si la incógnita depende de dos o más variables, es una ecuación en derivadas parciales

Ejemplos de EDOs

$x \cdot y'^2 + y y'' + \text{Sen}(xy) = 0$ función incógnita $\rightarrow y = y(x)$

$w'' + 3w' - w = 1$ función incógnita $\rightarrow w = w(x)$
 $\rightarrow w = w(t)$

Aca' la variable independiente puede tener cualquier nombre

$\frac{d^2 w}{dz^2} + 3 \frac{dw}{dz} - w = 1$ función incógnita $\rightarrow w = w(z)$

Orden de una EDO: Máximo orden de derivación en la ecuación

• $xy'' - 3yy' + e^y = 1 \rightarrow$ EDO de orden 2

- $\frac{d^3 y}{dt^3} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^4 - 1 = 0 \rightarrow \text{EDO de orden 3}$
 $y''' - (y')^4 - 1 = 0$

A veces las EDO de 1º orden se escriben de la forma:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

que es equivalente a:

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sigma \quad P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$$

Ejemplo:

$$(x^2 + y) dx + e^{xy} dy = 0$$

$$x^2 + y + e^{xy} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^{xy} \frac{dy}{dx} = -(x^2 + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 + y)}{e^{xy}}$$

Forma general de una EDO de orden n:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ejemplo:

$$x \sin(y) + y^{(3)} x - e^{yx} = 0$$

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0$$

Forma explícita de una EDO de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Ejemplo:

$$x \sin(y) + y^{(3)} x - e^{yx} = 0 \quad (\text{Forma general})$$

Ejemplo: $x \operatorname{Sen}(y) + y^{(3)} x - e^{yx} = 0$ (Forma general)

$$y^{(3)} = \frac{e^{yx} - x \operatorname{Sen}(y)}{x} \quad (\text{Forma explícita})$$

EDO lineal de orden n :

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

Si $f(x) = 0 \forall x$, la ecuación es homogénea. Caso contrario es no homogénea

Ejemplo:

$$x^2 y'' - \operatorname{Sen}(x) y' + 3y = e^x \quad \text{EDO lineal de 2º orden no homogénea}$$

$$y''' - 2xy' - y = 0 \quad \text{EDO lineal de 3º orden homogénea.}$$

$$y'' + x e^{y'} - y = x^2 \quad \rightarrow \text{por este término no es lineal}$$

$$2y''' - (yy') + y'' = 1$$

Solución particular de una ecuación diferencial de orden n :

Una solución de la EDO de orden n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

es una función $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, con I un intervalo abierto tal que:

- 1) ϕ es n -veces derivable en I
- 2) $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

Ejemplos: Consideremos

$$y'' + y = 0$$

EDO lineal de 2º orden homogénea.

• $\phi(x) = \operatorname{Sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es una solución particular de la ec.

1) ϕ es 2-veces derivable en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es un intervalo

2)

$$\phi''(x) + \phi(x) = \underbrace{(-\sin(x))}_{\phi''(x)} + \underbrace{\sin(x)}_{\phi(x)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• $\psi(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, también es solución particular:

1) ψ es 2-veces derivable en $\mathbb{R}$

2)

$$\psi''(x) + \psi(x) = \underbrace{(-\cos(x))}_{\psi''(x)} + \underbrace{\cos(x)}_{\psi(x)} = 0$$

En general, una EDO tiene infinitas soluciones

En muchos casos las soluciones particulares se dan en forma implícita

Ejemplo:

Consideremos la EDO

$$y' = -\frac{x}{y}$$

La ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

define implícitamente una solución particular de la EDO.

Esto quiere decir que cualquier función $y = y(x)$ que cumpla la ecuación (1) y sea derivable, va a ser solución de la EDO.

Si $y = y(x)$ derivable, que cumple (1), entonces

$$x^2 + (y(x))^2 = 1 \quad \forall x \in \text{dom}(y)$$

derivando m.a.m.

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{dom}(y)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2}y(x)y'(x) = -\cancel{2}x$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \quad \forall x \in \text{dom}(y)$$

Solución general

consideremos la ecuación

$$y' = x$$

$$y' = x \Rightarrow \underbrace{\int y' dx}_y = \underbrace{\int x dx}_{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

↖ constante arbitraria

Todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$y = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{con } c \text{ una cte arbitraria}$$

• $y'' = x$ EDO de 2º orden

$$y'' = x \Rightarrow \underbrace{\int y'' dx}_{y'} = \underbrace{\int x dx}_{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \underbrace{\int y' dx}_y = \underbrace{\int \left(\frac{x^2}{2} + c\right) dx}_{\frac{x^3}{6} + cx + d}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + cx + d \quad c, d \in \mathbb{R}$$

↙ ↘
arbitrarias

Solución general de una EDO de orden n

Dada la ecuación de orden n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Una familia de funciones que depende de n constantes arbitrarias: $y = \phi(x, c_1, \dots, c_n)$

es solución general de la EDO de orden n

- 1) Para cada valor de las constantes, se obtiene una solución particular de la ecuación
- 2) El número de constantes no puede reducirse sin perder soluciones, es decir, no puede expresarse la misma familia con menos constantes.

Por ejemplo:

$$y = \frac{x^3}{6} + cx + d \quad c, d \in \mathbb{R}$$

es solución general de la ec. $y'' = x$.

- Para cada valor de c y d tengo una solución de la ecuación
- La familia de funciones no puede expresarse con menos constantes.

Ejemplos:

$$y'' + y = 0$$

Comprobar que

$$y = A \sin(x) + B \cos(x) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

es solución general de la ecuación

- 1) La familia depende de 2 constantes arbitrarias cuyo número no puede reducirse.
- 2) Para cada valor posible de las constantes obtengo una solución:

$$\begin{aligned}
 y'' + y &= \underbrace{(A \sin(x) + B \cos(x))''}_{y''} + \underbrace{(A \sin(x) + B \cos(x))}_y \\
 &= -A \cancel{\sin(x)} - B \cancel{\cos(x)} + A \cancel{\sin(x)} + B \cancel{\cos(x)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo: $y'' - y = 0$

La familia $y = (A+B)e^x$ $A, B \in \mathbb{R}$

1) para cada valor de A, B , y es solución de la ec.

$$\begin{aligned} y'' - y &= ((A+B)e^x)'' - (A+B)e^x \\ &= (A+B)e^x - (A+B)e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) llamando $A+B=c$, obtenemos la misma familia, pero expresada usando una sola constante.

$\Rightarrow y = (A+B)e^x$ No es solución general de la ec.

Si es solución general:

$$y = Ae^x + Be^{-x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Objetivo $\rightarrow$ encontrar soluciones generales de EDO de 1º orden.

Ecuaciones de variables separadas

$$y' = p(x)q(y) \quad (p \text{ y } q \text{ son continuas})$$

Ejemplos:

a) $y' = x \cdot y$ $p(x) = x$
 $q(y) = y$

b) $y' = xy - xy^2 \rightarrow y' = x(y - y^2)$ $p(x) = x$
 $q(y) = y - y^2$

c) $y' = y^2$ $p(x) = 1$
 $q(y) = y^2$

1 $\rightarrow$ $p(x) = 2$ (también $p(x) = 1$)

$$y \text{ } f(y) = y^2$$

$$d) \quad y' = 2e^y \quad \begin{matrix} \nearrow p(x) = 2 \\ \searrow f(y) = e^y \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} \text{tambi\u00e9n } p(x) = 1 \\ f(y) = 2e^y \end{matrix} \right)$$

¿C\u00f3mo se resuelven?

Ejemplo: $y' = x(y - y^2)$

($y=0, y=1$ son soluciones constantes)

pasamos dividiendo $y - y^2$ ($y - y^2 \neq 0, y \neq 0, y \neq 1$)

$$\frac{y'}{y - y^2} = x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y - y^2} = x$$

$$\frac{dy}{y - y^2} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int x dx$$

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Usando fracciones simples: $y - y^2 = y(1 - y) \Rightarrow \frac{1}{y - y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - y}$ hay que calcularlos

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \ln|y| - \ln|1 - y| + K$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|1 - y| = \frac{x^2}{2} + C \quad \left(\begin{matrix} \text{Soluci\u00f3n impl\u00edcita} \\ \text{de la EDO} \\ \text{general} \end{matrix} \right)$$

Seguimos para despejar y :

$$\ln \frac{|y|}{|1-y|} = \frac{x^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\left| \frac{y}{1-y} \right| = e^{\frac{x^2}{2} + c}$$

$$\left| \frac{y}{1-y} \right| = \underbrace{e^c}_{\rightarrow A} e^{x^2/2} = A e^{x^2/2} \quad A > 0$$

$$\frac{y}{1-y} = \underbrace{(\pm A)}_{=B} e^{x^2/2} \quad B \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = B e^{x^2/2} (1-y)$$

$$y = B e^{x^2/2} - B e^{x^2/2} y$$

$$y + B e^{x^2/2} y = B e^{x^2/2}$$

$$y(1 + B e^{x^2/2}) = B e^{x^2/2}$$

$y = \frac{B e^{x^2/2}}{1 + B e^{x^2/2}}$	$B \neq 0$	solución general
---	------------	------------------