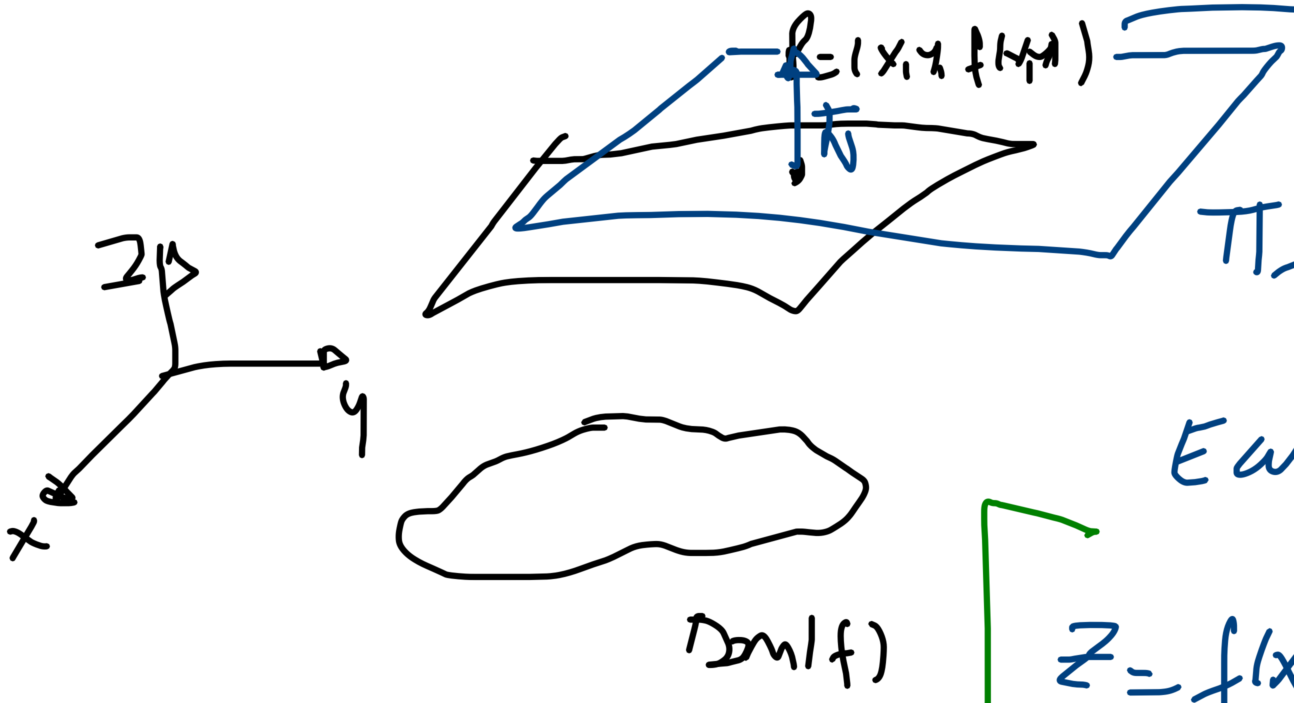
Felipe

$\in \mathbb{R}^3$

23. ¿Cuáles son los puntos de la superficie gráfico de $f(x,y) = x\,y\,e^{x+y}$, para los cuales resulta el plano tangente horizontal (paralelo al plano xy)?.



busco $P = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Π_T a $Gr(f)$ en P es horizontal

Ecuación viene dada por

$$\left[\, z = f(x_0,y_0) + \underbrace{f'_x(x_0,y_0)}_{=0}(x-x_0) + \underbrace{f'_y(x_0,y_0)}_{=0}(y-y_0) \,\right]$$

plano horizontal tiene ecuación $z = k$ k cte

$\Big[$ Si pidiera // $\underbrace{\text{plano } \{yz\} = \{x=0\}}_{x=k}$ No puede ser $\Big]$

Buscamos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = Dom(f)$ tal que $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$f(x,y) = xy\, e^{x+y}$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ xq producto pol con exp.

$$\begin{cases} y \cancel{e^{x+y}} + xy \cancel{e^{x+y}} = 0 \\ x \cancel{e^{x+y}} + xy \cancel{e^{x+y}} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y + xy = 0 \\ x + xy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y(1+x) = 0 \\ x(1+y) = 0 \end{cases} \to (-1,-1),\ (0,0)$$

$$\Rightarrow P \in \{(0,0,0),\ (-1,-1,e^{-2})\}$$

Ejercicio 3. Sea $f(x,y) = x^2y + g(y)$, donde $u = g(y)$ es la función que queda definida en forma implícita en un entorno de $(y_0, u_0) = (2,3)$ mediante la ecuación $uy + \frac{\ln(u-y)}{y} = 6$. Calcule un valor aproximado de $f(1.98, 2.02)$ utilizando una aproximación lineal.

Sa ntirgos

$(1{,}98;\ 2{,}02) \simeq (2,2)$

$f(x,y) = x^2y + g(y)$

$f(1{,}98;\ 2{,}02) \simeq q(1{,}98;\ 2{,}02)$

donde $q(x,y) = f(2,2) + f'_x(2,2)(x-2) + f'_y(2,2)(y-2)$ aprox. lineal

- $f(2,2) = 8 + \underbrace{g(2)}_{?} = 8+3 = 11$

$\bullet\ \nabla f(2,2) = \left(2xy + 0,\ x^2 + \underbrace{g'(y)}_{?}\right)\Big|_{(2,2)} = (8,\ 4-1)$

$= (8, 3)$

Ahora necesitamos saber $g(2)$ y $g'(2)$.

Llamamos $G(y,u) = uy + \dfrac{\ln(u-y)}{y} - 6$

en $(y_0, u_0) = (2,3)$ $\boxed{u = g(y)}$

Comprobamos que estamos en las hipotesis del TFI

1) $G(2,3) = 3.2 + \cancel{\dfrac{\ln(1)}{2}} - 6 = 6-6 = 0$ ✓

$\vec{F}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ $\quad \vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

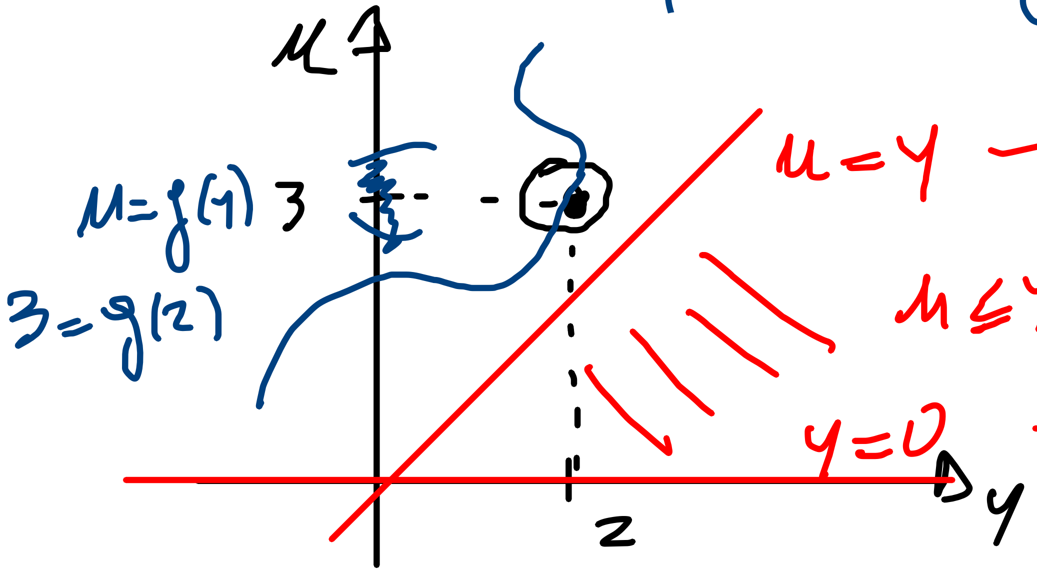
$\vec{F} \in C^1(D) \iff X, Y, Z : D \to \mathbb{R}$ son $C^1(D)$

$\iff X'_u, Y'_u, Z'_u, X'_v, Y'_v, Z_v$ son continuas en D

2) $G \in C^1$ en un "entorno de $(2,3)$" $\quad G(y,u) = uy + \frac{\ln(u-y)}{y} - 6$

$$\nabla G(y,u) = \left(u + \frac{-1}{(u-y)y} - \frac{\ln(u-y)}{y^2},\ y + \frac{1}{(u-y)y} \right)$$

$\ln(u-y) \cdot \frac{1}{y}$



$u - y > 0 \iff u > y$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
$e^{c-d} = e^c \cdot e^{-d}$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{c}{d}\right) = \ln(c) - \ln(d)$

$\frac{1}{(x-y)y}$ es cociente de polinomios con el denominador nunca nulo en un entorno de $(2,3)$

$\frac{\ln(x-y)}{y^2}$ es cociente de logarítmica y polinomio donde denominador nunca nulo en un entorno de $(2,3)$ (lejos de $y=0$) y el logaritmo es continuo xq el argumento está lejos de "0" $x-y>0$ en un entorno de $(2,3)$.

con respecto a la variable que despejamos

3) Como queremos $x=g(y)$ debe ser $G'_x(2,3)=\frac{5}{2}\neq 0$

TFI $\Longrightarrow$ $\boxed{x=g(y) \text{ en un entorno de } y=2}$ y $g'(2)=-\frac{G'_y(2,3)}{G'_x(2,3)}=\frac{-5/2}{5/2}=\boxed{-1}$

$g\in C^1(E(2))$

$$G(y,u) = uy + \frac{\ln(u-y)}{y} - 6$$

$y = y$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & y \arrow[r] & y \\ G \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & u \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

si $u = g(y) \Rightarrow 0 = G(y, \overbrace{g(y)}^{u=u(y)}) = g(y) \cdot y + \dfrac{\ln(g(y)-y)}{y} - 6$

Derivando Implícitamente

$$0 = G'_y \cdot \underbrace{y'}_{=1} + G'_u \cdot g'(y) \Rightarrow g'(y) = \frac{-G'_y}{G'_u}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ F(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = F(x,y,f(x,y))$$

$$\begin{cases} 0 = F'_x \cdot 1 + \cancel{F'_y \cdot 0} + F'_z \cdot f'_x \\ 0 = \cancel{F'_x \cdot 0} + F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot f'_y \end{cases}$$

$$g'(2) = -1 \qquad g(2) = 3$$

lo sabíamos del dato $u = g(y)$ en $(y_0, u_0) = (2, 3)$

lo obtuvimos mediante TFI

Pa terminar

$$q(x,y) = \overset{(8+3)}{11} + 8(x-2) + 3(y-2)$$

$$q(1{,}98;\, 2{,}02) = 11 + 8(-0{,}02) + 3.(0{,}02) \simeq f(1{,}98;\, 2{,}02)$$

Ejercicio 7. Sabiendo que la ecuación $3x^2yz + z^2e^{x+y} + 2(x+y) = 0$ en el punto $(1,-1,0)$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,-1)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x,y) = f(\underbrace{x-y, x+y}_{\vec{g}(x,y)})$ en el punto $(0,-1,h(0,-1))$.

Tobias

Queremos
$$z = \underbrace{h(0,-1)}_{=0} + \underbrace{h'_x(0,-1)}_{=\,?}(x-0) + \underbrace{h'_y(0,-1)}_{=\,?}(y+1)$$

h debe ser diferenciable en $(0,-1)$ xq es composición de diferenciables

De hecho $\underbrace{f \in C^1(E(1,-1))}_{\text{sale si comprobamos hipótesis del TFI}}$ y $\vec{g}(x,y) = (x-y, x+y)$ es $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ xq polinomios

Vale Regla de la cadena para h

$$\boxed{h(0,-1)} = f(g(0,-1)) = f(1,-1) = \boxed{0}$$

xq $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,-1,\boxed{0})$

Por Regla de la cadena (Matricial)

$$Dh(0,-1) = Df(1,-1) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,-1)}}_{D\vec{g}(0,-1)}$$

$$Dh(0,-1) = \left(h'_x(0,-1), h'_y(0,-1)\right)$$

$$Df(1,-1) = \left(f'_x(1,-1), f'_y(1,-1)\right)$$

$$= \left(f'_x(1,-1), f'_y(1,-1)\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Big(\underbrace{f'_x(1,-1) + f'_y(1,-1)}_{h'_x(0,-1)}, \underbrace{-f'_x(1,-1) + f'_y(1,-1)}_{h'_y(0,-1)}\Big)$$

Acá empieza el TFI para calcularlos.

Regla de la cadena (arbolito = red orientada)

$u = u(x,y) = x-y$
$v = v(x,y) = x+y$

Cambiamos letras

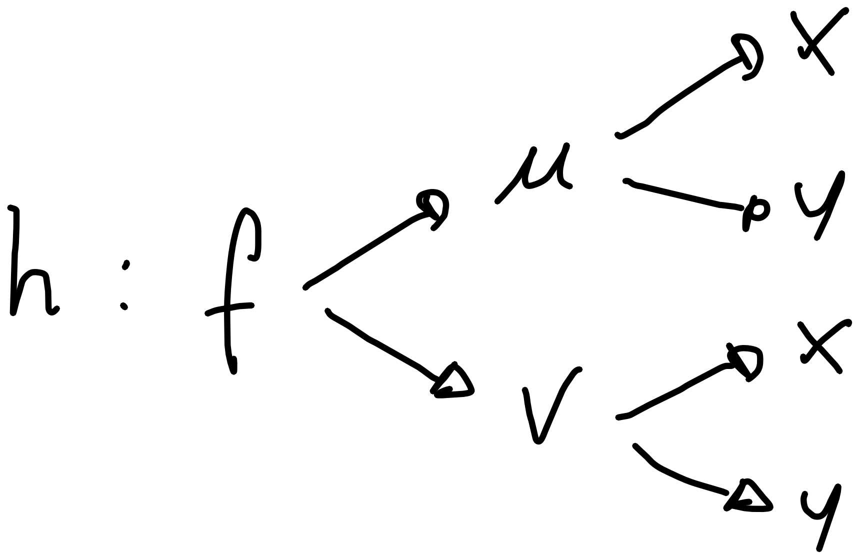
$$F(u,v,z) = 0$$
$$\uparrow$$
$$\cancel{F(x,y,z) = 0}$$

$$z = f(u,v)$$
$$\uparrow$$
$$z = \cancel{f(x,y)}$$

$$\vec{g}(x,y) = (x-y,\ x+y)$$

$$h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$$

✓



$$h'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x$$
$$= f'_u\, 1 + f'_v\, 1$$

$$h'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y$$
$$= f'_u (-1) + f'_v \cdot 1$$

Necesitamos igualmente las derivadas parciales de f

$$F(u,v,z) = 3u^2vz + z^2 e^{u+v} + 2(u+v) \qquad \overset{u\ \ v\ \ z}{P=(1,-1,0)}$$

Comprobamos hipótesis del TFI

1) $F(P) = 0 + 0 + 2(1-1) = 0$ ✓

2) $F \in C^1$ xq suma y prod. de pol. y exp. ✓

$$\nabla F(u,v,z) = \left(6uvz + z^2e^{u+v} + 2,\ 3u^2z + z^2e^{u+v} + 2,\ 3u^2v + 2ze^{u+v}\right)$$

componentes continuas

3) $F'_z(P) = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ vale TFI | $z = \underline{f}(u,v)$ en un entorno de $\overset{u_0\ v_0}{(1,-1)}$ y además es C^1 allí

$z = z(u,v)$

$$f'_u(1,-1) = \frac{-F'_u(P)}{F'_z(P)} = \frac{-2}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$f'_v(1,-1) = \frac{-F'_v(P)}{F'_z(P)} = \frac{-2}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$Dh(0,-1) = \left(f'_u(1,-1) + f'_v(1,-1) \, , \, -f'_u(1,-1) + f'_v(1,-1) \right)$$

$$= \left(\frac{4}{3} \, , \, 0 \right)$$

RTA

$$z = 0 + \frac{4}{3}(x-0) + 0\,(y+1)$$

$\boxed{z = \frac{4}{3}x}$ ecuación π_T a $Gr(h)$ en $P = (1,-1,0)$

Ejercicio 4. Sean $f(u,v) = vu^2 - v^3$, $\vec{g}(x,y) = (x\,\mathrm{sen}(y-1)+1, 3x - y^2 + 2)$ y $h = f \circ \vec{g}$. Justifique la existencia de las derivadas direccionales de h en el punto $(-1,1)$ y encuentre los versores para los cuales h tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en ese punto.

(*)

$$f \in C^1(E(-1,1)) \Rightarrow f \text{ dif en } (-1,1) \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua en } (-1,1) \\ \exists\, f'_{\vec{v}}(-1,1) \ \forall \vec{v} \text{ versor} \\ f'_{\vec{v}}(-1,1) = \nabla f(-1,1) \cdot \vec{v} \end{cases}$$

$$\not\Leftarrow \qquad\qquad\qquad\qquad (\not\Leftarrow)$$

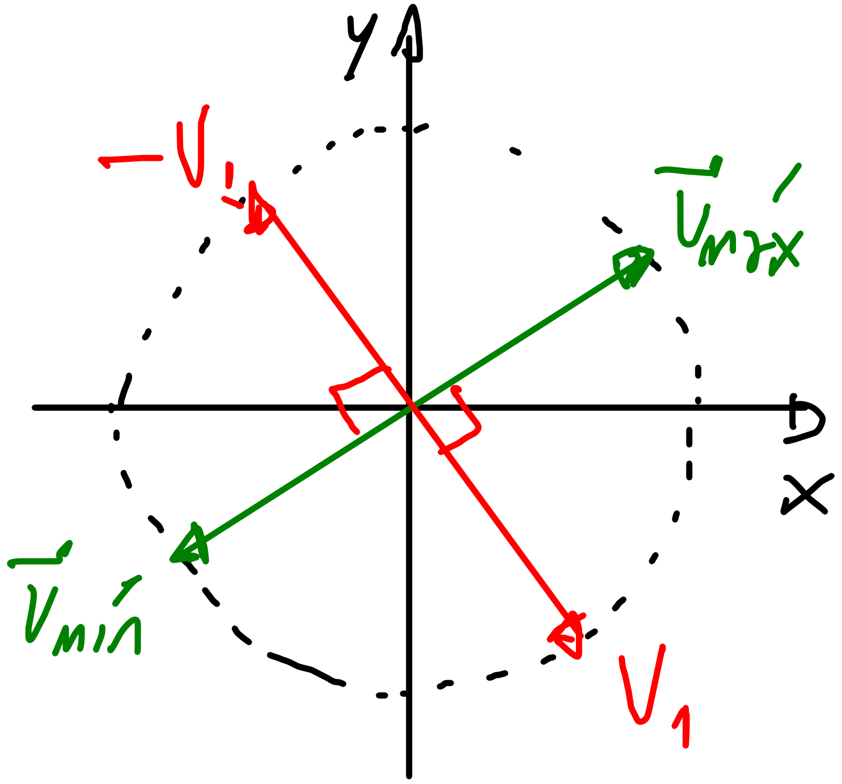
Justificamos con esto la existencia.

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ xq polinomio} \\ \vec{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ xq } \quad x\,\mathrm{sen}(y-1)+1 \in C^\infty \text{ xq función elemental} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3x - y^2 + 2 \in C^\infty \text{ xq pol.} \end{array}\right\} \Rightarrow h = f \circ \vec{g} \text{ es } C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow h \overset{(*)}{\in} C^1(\mathbb{R}^2)$$

Como h es dif en $(-1, 1)$ entonces

$$\vec{v}_{máx} = \frac{\nabla h(-1,1)}{\|\nabla h(-1,1)\|} \quad , \quad \vec{v}_{mín} = -\vec{v}_{máx} = \frac{-\nabla h(-1,1)}{\|\nabla h(-1,1)\|}$$

$$\vec{u}_{nulo} \in \left\{ \underbrace{\frac{\left(-h_y'(-1,1), h_x'(-1,1)\right)}{\| \nabla h(-1,1) \|}}_{v_1} \, , -v_1 \right\}$$



Calculemos $\nabla h(-1,1)$ y listo

Regla de la cadena $\quad \vec{g}(-1,1) = (1,-2)$

$$\nabla h(-1,1) = \nabla f(\vec{g}(-1,1))\, D\vec{g}(-1,1)$$

$$= (4,-11)\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(y-1) & x\cos(y-1) \\ 3 & -2y \end{bmatrix}\Bigg|_{(-1,1)}$$

$$= (4,-11)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = (-33, 26)$$

$$\|\nabla h(-1,1)\| = \sqrt{33^2+26^2}$$

$f'_u = 2uv$

$f'_v = u^2-3v^2$

$f'_u(1,-2) = -4$

$f'_v(1,-2) = -11$

$x\operatorname{sen}(y-1)+1$

$3x-y^2+2$

Anghelina

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4y\,\operatorname{sen}(x)}{x^4+4y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Analice continuidad de f en $(0,0)$

2) Determine con fundamento si f es dif en $(0,0)$.

1) Sospechamos que no es continua

$$y=mx \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{4mx\,\operatorname{sen}x}{x^4+4m^2x^2} \overset{(*)\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4m\,\operatorname{sen}x}{x^3+4m^2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4m\cos x}{3x^2+4m^2}=\frac{1}{m}$$

Si $m=1 \longrightarrow \lim=1$

Si $m=-1 \longrightarrow \lim=-1$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\therefore$ f NO es continua en $(0,0)$

por el contrarrecíproco f No es dif en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\left[f(0,0)+f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

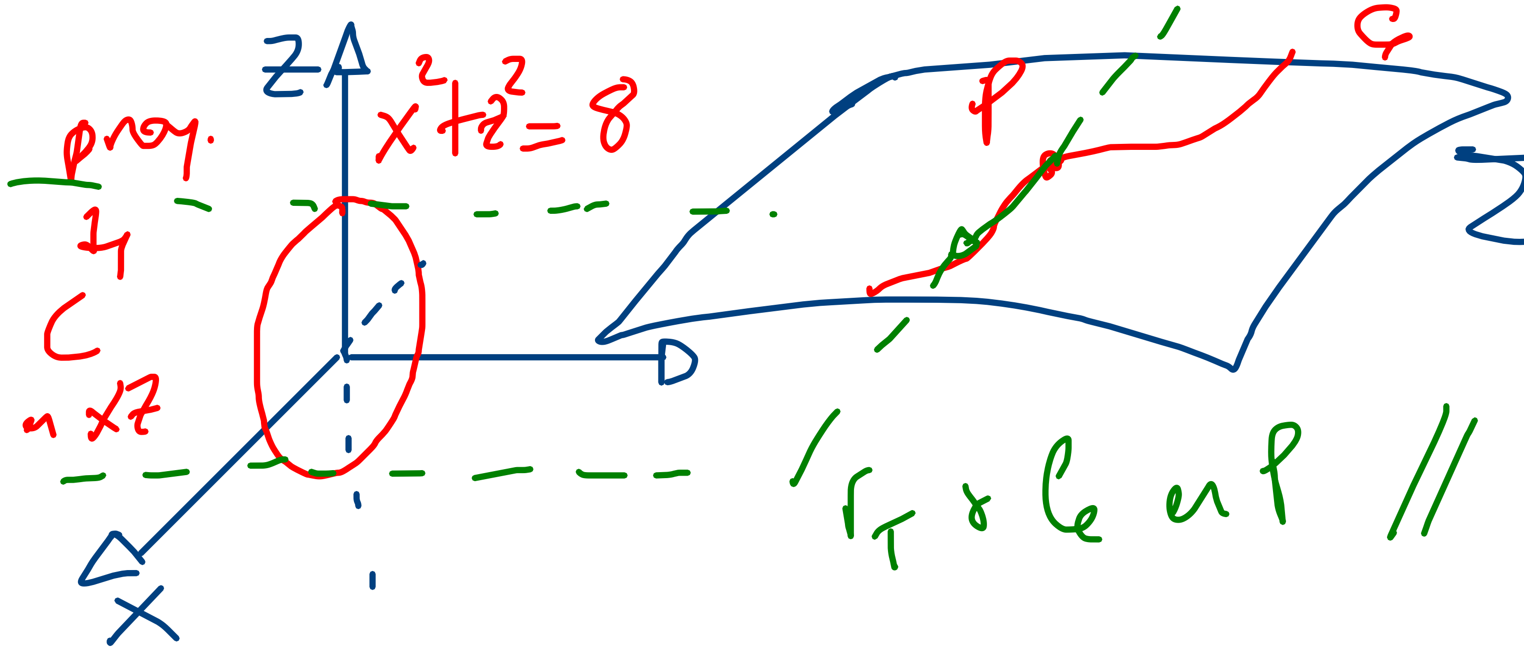
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{4y\,\mathrm{sen}\,x}{4y^2+x^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(*) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\cdot\frac{4m}{x^2+4m^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4m}{x^2+4m^2}$$

$$\exists \qquad \exists \qquad \exists$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{m}$$

Richard

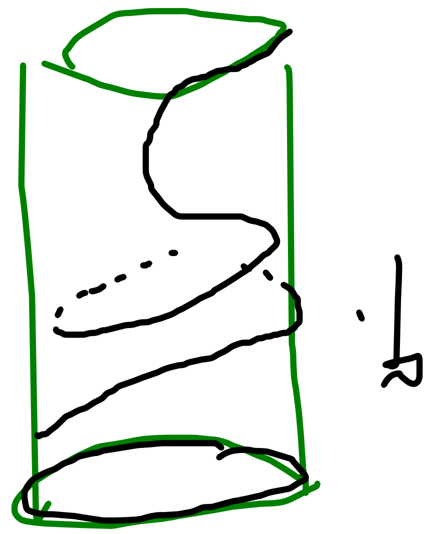


$\Sigma: \ xz - y = 0$

r_T a $\mathcal{C}$ en P // $\{xz\} = \{y=0\}$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} \overbrace{xz - y = 0}^{F(x,y,z)} & \Sigma \\ \underbrace{x^2 + z^2 = 8}_{G(x,y,z)} & \text{Cilindro} \end{cases}$$

$P = (x, y, z)$



$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\vec{v} = DF(P) \times DG(P)$ vector director r_T a $\mathcal{C}$ en P

$= (☺ , 0 , ☹)$ pedis que $v_2 = 0$