Saturday, November 30, 2024 4:05 PM

Operadores diferenciales

Un operador es una función T cuyo dominio es un conjunto o clase de funciones $\mathcal{D}$ y su codominio es otro conjunto o clase de funciones $\mathcal{D}^*$, es decir $T: \mathcal{D} \to \mathcal{D}^*$, y si $f \in \mathcal{D}$ entonces $Tf = g \in \mathcal{D}^*$.

Por ejemplo, si $\mathcal{D} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}^* = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $Tf = f'$, resulta que $T: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es el operador que a cada función $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ le asigna su derivada, que es la función $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Este operador usualmente se lo denota con la letra D en lugar de T y entonces escribimos $Df = f'$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, entonces el operador $D_i: \mathcal{C}^1(U) \to \mathcal{C}(U)$, $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, es el operador que a cada funcion $f: U \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas le asigna la derivada parcial de f respecto de la Variable x_i.

Si $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^*$ son espacios vectoriales reales, el operador $T: \mathcal{D} \to \mathcal{D}^*$ se dice lineal si

1) $T(cf) = cTf \quad \forall f \in \mathcal{D} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

2) $T(f+g) = Tf + Tg$

Por ejemplo, los operadores $D: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $D_i: \mathcal{C}^1(U) \to \mathcal{C}(U)$ son operadores lineales pues:

a) $D(cf) = (cf)' = cf' = cDf$ si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$

$D(f+g) = (f+g)' = f'+g' = Df + Dg$ si $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

a) $D(cf) = (cf)' = cf' = cDf$ si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{K}$

$D(f+g) = (f+g)' = f'+g' = Df + Dg'$ si f y $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

b) $D_i(cf) = \frac{\partial}{\partial x_i}(cf) = c\frac{\partial f}{\partial x_i} = cD_if$ si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ y $c \in \mathbb{R}$

$D_i(f+g) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} = Df + Dg$ si $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$.

A continuación veremos algunos operadores diferenciales que aparecen a menudo en las aplicaciones del análisis matemático a la física.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m) = \{ \vec{f} : U \to \mathbb{R}^m : \vec{f} = (f_1, \dots, f_m),\ f_i \in \mathcal{C}^k(U),\ i = 1, \dots m \}$$

En otras palabras, $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de funciones vectoriales cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas hasta el orden k. Recordemos que las derivadas de orden 0 son las funciones directamente.

A continuación veremos los operadores diferenciales más utilizados en las aplicaciones del análisis a la física o la ingeniería

En lo siguiente U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

<u>Operador gradiente</u>:

grad: $\mathcal{C}^1(U) \to \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \nabla f$$

grad es el operador que a una función escalar f le asigna su gradiente, que es una función vectorial de n componentes. Por ello su dominio es $\mathcal{C}^1(U)$ y su codominio $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$

Operador divergencia:

$$\mathrm{div}: \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(U)$$

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

El operador div asigna a un campo vectorial $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^n$,

$$\vec{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n), \dots, f_n(x_1,\dots,x_n))$$

de clase $\mathcal{C}^1$, el campo escalar continuo que se obtiene derivando la componente f_i respecto de la variable x_i y luego sumando todas esas derivadas.

Cuando $U \subset \mathbb{R}^2$, es usual escribir

$$\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

y entonces

$$\mathrm{div}(\vec{f})(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in U$$

por ejemplo, si $\vec{f}(x,y) = (x^2 y, e^{xy^2})$, entonces

$$\mathrm{div}(\vec{f})(x,y) = \underbrace{2xy}_{\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)} + \underbrace{2xy\, e^{xy^2}}_{\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)}$$

Si $U \subset \mathbb{R}^3$ y $\vec{f} = (P, Q, R)$, entonces

$$\mathrm{div}(\vec{f})(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in U$$

Por ejemplo, si $\vec{f}(x,y,z) = (xy, ye^{xyz}, z^2)$

$$\mathrm{div}(\vec{f})(x,y,z) = \underbrace{y}_{\frac{\partial P}{\partial x}} + \underbrace{e^{xyz} + xzye^{xyz}}_{\frac{\partial Q}{\partial y}} + \underbrace{2z}_{\frac{\partial R}{\partial z}}$$

Operador rotor o rotacional:

Este operador solo tiene sentido para campos vectoriales

Operador rotor o rotacional:

Este operador solo tiene sentido para campos vectoriales de tres componentes que dependen de tres variables.

Es decir, $U \subset \mathbb{R}^3$ y $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

$\mathrm{rot}: \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ está definido por:

$$\mathrm{rot}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Note que rot asigna a un campo $\vec{f}$ de tres componentes otro campo $\mathrm{rot}(\vec{f})$ también de tres componentes.

Enseguida veremos una forma más sencilla de calcular el rotor de un campo.

<u>Operador</u> <u>nabla</u>: Consideremos el operador simbólico

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Este operador nos ayudará a escribir grad, div y rot de una forma conveniente para los cálculos

Si $f: U \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces el producto del símbolo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ con f da como resultado $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Entonces

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \mathrm{grad}(f) \quad (f$$

Con lo cual podemos interpretar al gradiente de f como el producto del "vector" ∇ con el escalar f.

Si hacemos el producto escalar de ∇ con $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (f_1, \dots, f_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \mathrm{div}(\vec{f})$$

y así obtenemos la divergencia de $\vec{f}$.

Si $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ y $\vec{f} = (P, Q, R)$,

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \breve{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \breve{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \breve{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \mathrm{rot}(\vec{f})$$

Esto nos permite calcular el rotor en forma más simple.

Por ejemplo, si $\vec{f}(x,y,z) = (xyz, e^x, z^2 + xz)$

$$\mathrm{rot}(\vec{f})(x,y,z) = \nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & e^x & z^2 + xz \end{vmatrix} = \breve{i}(0-0) - \breve{j}(z - xy) + \breve{k}(e^x - xz)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{rot}(\vec{f})(x,y,z) = (0, xy - z, e^x - xz).$$

Operador Laplaciano:

$$\Delta : \mathcal{C}^2(U) \longrightarrow \mathcal{C}(U), \quad \Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \nabla \cdot (\nabla f)$$

Entonces

$$\Delta f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Note que el laplaciano de f solo tiene sentido si $f \in \mathcal{C}^2(U)$.
Al laplaciano también se lo denota ∇^2, es decir $\Delta f = \nabla^2 f$.

Algunas denominaciones:

- $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ es incompresible o solenoidal si

$$\mathrm{div}(\vec{f})(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

- $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ es irrotacional si

- $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ es irrotacional si

$$\mathrm{rot}(\vec{f})(x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,0) \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in U$$

- $f \in \mathcal{C}^2(U)$ es una función armónica si

$$\Delta f(x_1,\dots,x_n) = 0 \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in U$$

Rotor y condicion necesaria de campo conservativo.

Si $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, vimos que si $\vec{f}$ es conservativo (es decir, $\vec{f} = \nabla\varphi$ para alguna $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$) entonces si $\vec{f} = (P, Q, R)$

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}, \quad D\vec{f} \text{ es simétrica y}$$

por ende, $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$. Esto último es equivalente a que: $\mathrm{rot}(\vec{f}) = (0,0,0)$

Es decir, la condición necesaria de campo conservativo es en este caso, equivalente a que $\mathrm{rot}(\vec{f}) = \vec{0}$ en U.

Algunas propiedades de grad, div y rot

Aquí: $c \in \mathbb{R}$, u, v, etc son funciones escalares, $\vec{f}, \vec{g}$, etc son campos vectoriales

1) Linealidad
- $\nabla(cu) = c\nabla u$, $\quad \nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$
- $\nabla\cdot(c\vec{f}) = c(\nabla\cdot\vec{f})$, $\quad \nabla\cdot(\vec{f}+\vec{g}) = \nabla\cdot\vec{f} + \nabla\cdot\vec{g}$
- $\nabla\times(c\vec{f}) = c(\nabla\times\vec{f})$, $\quad \nabla\times(\vec{f}+\vec{g}) = \nabla\times\vec{f} + \nabla\vec{g}$

2)
- $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
- $\nabla\cdot(u\vec{f}) = \nabla u\cdot\vec{f} + u(\nabla\cdot\vec{f})$
- $\nabla\times(u\vec{f}) = \nabla u\times\vec{f} + u(\nabla\times\vec{f})$

3) $\nabla \times (\nabla u) = \vec{0}$ si $u \in \mathcal{C}^2(U)$ (hacer la cuenta y usar Schwarz)

(El rotor del gradiente es cero si $u \in \mathcal{C}^2(U)$)

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$ si $\vec{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^3)$ (hacer la cuenta y usar Schwarz)

(La divergencia del rotor es cero si $\vec{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^3)$)