GUÍA Nº 2

ERRORES

1) En una computadora, una celda de memoria tiene 2 posiciones binarias para almacenar los signos de la mantisa y del exponente, 11 posiciones decimales para la mantisa y 3 posiciones decimales para el exponente. Por ejemplo, el número π se almacena de la siguiente forma: +31415926536+001. Indicar cómo se almacenan los números:

   a) 2,7182818285   b) -1073741824   c) 0,577216   d) -123E-45

   Indicar cuál es la cota de error relativo que tiene un número almacenado según esta representación.

2) Calcular a+b+c

$$a = 0{,}1234567\ 10^0 \quad b = 0{,}7654321\ 10^4 \quad c = -b \ , \ t = 7 \text{ , corte}$$

3) Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico. Aclarar la cantidad de dígitos significativos y medianamente significativos.

   a) 0,123456789 ± 0,01   d) 12,3456789 ± 8
   b) 0,123456789 ± 0,005   e) 1234,56789 ± 50
   c) 0,123456789 ± 0,00008   f) 123456,789 ± 100

4) Calcular la siguiente expresión, incluyendo su cota de error absoluto:

$$w = x\, y^2 / z$$

   donde x = 2,0 ± 0,1, y = 3,0 ± 0,2 y z = 1,0 ± 0.1. Indicar qué variable tiene mayor incidencia en el error en w.

5) Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde x = 2,00, y = 3,00 y z = 4,00 (estos valores están correctamente redondeados):

   a) $3\,x + y - z$ b) $x\,y / z$ c) x sen (y / 40)

6) Se quiere estimar la rugosidad de Manning n de un tramo de un río, que puede calcularse a partir de la siguiente ecuación:

$$n = h^{2/3} \cdot i^{1/2} \cdot U^{-1}$$

   donde U es la velocidad media, h es la profundidad media e i es la pendiente. Estos parámetros se midieron en el lugar, obteniéndose los siguientes valores:

$$h = 0.8 \pm 0.1 m \quad i = 0.002 \pm 0.0003 \quad U = 1.0 \pm 0.1\, m/s$$

   a) Obtener el valor de la rugosidad con su cota de error. Expresarlo de manera correcta con redondeo simétrico.

   b) Si pudiera dedicarse un tiempo a afinar la medición de uno de los parámetros del problema, ¿cuál convendría mejorar? Justificar la respuesta.

   c) Suponiendo que ahora se miden el tirante y la velocidad de manera exacta (es decir $h = 0.8 m \quad i = 0.002 \pm \Delta i \quad U = 1.0\, m/s$) ¿con qué precisión es necesario medir la pendiente para obtener un error relativo menor a 10% en la rugosidad?

7) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a,b) = \int_0^1 e^{\frac{-b\cdot x}{(a+x^2)}} dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla :

a	*b*	**I**
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas *z* e *y*, obteniéndose:

z = 0,400 ± 0,003 *y* = 0,340 ± 0,005

Estimar el error en *I(z,y)* y expresar el resultado final.

Resuelto en el Campus

8) Se tienen las siguientes expresiones algebraicamente equivalentes:

i) $f = (2^{½} - 1)^6$
ii) $f = 1/(2^{½} + 1)^6$
iii) $f = (3 - 2*2^{½})^3$
iv) $f = 1/(3 + 2*2^{½})^3$
v) $f = (99 - 70*2^{½})$
vi) $f = 1/(99 + 70*2^{½})$

Utilizando el valor aproximado 1,4 para la raíz cuadrada de 2, indicar qué alternativa proporciona el mejor resultado.

Resuelto en el Campus

9) Se tiene la expresión y = ln [x - (x² - 1)½]

a) Calcular y para x = 30, incluyendo su error absoluto. Suponer que la raíz cuadrada se conoce con 6 decimales correctos y que el error en x es despreciable
b) Obtener una expresión matemáticamente equivalente a la anterior, pero mejor condicionada desde el punto de vista numérico, y recalcular el resultado con el nuevo error.

10) Determinar las cotas para los errores relativos de v y w (que son dos expresiones algebraicamente equivalentes) en los siguientes casos, utilizando la gráfica de proceso:

a) $v = a+a$, $w = 2a$ b) $v = a+a+a$, $w = 3a$

Suponer que *a* es positivo y que los números *2* y *3* tienen una representación exacta en la computadora. Comparar los resultados de las dos expresiones y extraer conclusiones. Calcular dichos errores para *a* = 0,6992 (correctamente redondeado), redondeando a 4 dígitos luego de cada operación aritmética.

11) Considerar las expresiones v = (a-b) / c y w = (a/c) - (b/c). Suponer que a, b y c son positivos, sin errores de entrada y que a es aproximadamente igual a b.

   a) Demostrar que el error relativo por redondeo en *w* puede ser mucho mayor que el mismo error en *v*.
   b) Calcular dichos errores para $a = 0{,}41$, $b = 0{,}36$ y $c = 0{,}70$, utilizando aritmética de punto flotante con 2 dígitos de precisión.

Resuelto en el Campus

12) Calcular $(v^2 - w^2)$^0.5 usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11, utilizando los siguientes algoritmos:

   a) $((v * v) - (w * w))$^0.5 b) $((v + w) * (v - w))$^0.5

   Indicar cuál algoritmo es más conveniente y justificar.

13) Indicar cuál de los siguientes algoritmos es más estable numéricamente para calcular la menor raíz de la ecuación $x^2 - 2x + a = 0$, con a positiva y mucho menor que 1.

   a) $\varepsilon_1=1-a$ $\varepsilon_2=\varepsilon_1^{½}$ $x=\varepsilon_3=1-\varepsilon_2$
   b) $\varepsilon_1=1-a$ $\varepsilon_2=\varepsilon_1^{½}$ $\varepsilon_3=1+\varepsilon_2$ $x=\varepsilon_4=a/\varepsilon_3$

14) La fórmula f0 = [4 (f-1 + f1) - (f-2 + f2)] / 6 permite interpolar el valor de la función f en x = 0 conociendo sus valores en x-2 = -2, x-1 = -1 , x1 = 1 y x2 = 2.

   a) Estimar, mediante la gráfica de proceso, los errores en f_0 debido al redondeo de los valores de la tabla de *f* y al redondeo durante los cálculos.
   b) Suponiendo que la función *f* es par y que f_1 y f_2 son del mismo orden, y utilizando el resultado del punto a, obtener una condición que garantice que el error debido al redondeo en los cálculos sea despreciable.

Resuelto en el Campus

15) Se desea evaluar $z = \cos(\alpha 2 - \alpha 1)$, donde $\alpha 1 = 1{,}345 \pm 0{,}0005$ y $\alpha 2 = 1{,}352 \pm 0{,}0005$, ambos medidos en radianes. Los cálculos se efectúan con 7 dígitos de precisión. El valor del coseno se obtiene de una tabla con 5 decimales significativos. Se pide :

   a) Calcular *z* y efectuar una estimación de la cota de error mediante la gráfica de proceso. Identificar la principal fuente de error.
   b) Repetir el cálculo anterior utilizando el algoritmo alternativo

$$z = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1$$

   Explicar cuál de los dos algoritmos es mejor y justificar.