Ejercicio 10:

El problema diferencial $y' = -y + t + 1,\ 0 \prec t \prec 1,\ y(0) = 1$, ha de ser integrado utilizando el esquema predictor corrector explícito o del punto medio.

a) Demostrar que el esquema es consistente y hallar su orden de precisión.
b) Utilizando un paso k=0.1 avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
c) Calcular el error cometido. (Ver problema 1 b)

a) Método predictor corrector explícito: $\begin{cases} u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \dfrac{k}{2} \cdot f(u_n; t_n) \\ u_{n+1} = u_n + k \cdot f\left(u_{n+\frac{1}{2}}; t_{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$

Para probar consistencia, se tiene que demostrar que el error de truncamiento local tiende a 0 cuando el paso tiende a 0, en otras palabras: $e_l \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

Definiendo el problema como $\dfrac{du}{dt} = f(u;t)$, planteamos la solución aproximada aplicando el método nombrado anteriormente: $\begin{cases} \dfrac{u_{n+\frac{1}{2}} - u_n}{k} - \dfrac{1}{2} f_n = 0 \\ \dfrac{u_{n+1} - u_n}{k} - f_{n-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$

Para obtener el error de truncamiento, evaluamos la solución exacta en nuestra solución aproximada, de modo que aparezca dicho error en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) - u(t_n)}{k} - \dfrac{1}{2} \cdot f\left(u(t_n); t_n\right) = e_{n+\frac{1}{2}} \\ \dfrac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - f\left(u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right); t_{n+\frac{1}{2}}\right) = e_n \end{cases}$$

De esta manera, aparece el término del error de truncamiento en un paso y en medio paso.

Para demostrar que dichos errores tienden a 0 cuando el paso tiende a 0, desarrollamos en Taylor los siguientes términos:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + k \cdot \left.\frac{du}{dt}\right|_n + \frac{k^2}{2} \cdot \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O(k^3) \qquad (1)$$

$$u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) = u(t_n) + \frac{k}{2} \cdot \left.\frac{du}{dt}\right|_n + \frac{k^2}{4} \cdot \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O(k^3) \qquad (2)$$

$$f_{n+\frac{1}{2}} = f_n + \frac{k}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)}_{f_n^{'}} + O\left(k^2\right) \qquad (3)$$

Por otro lado, de la ecuación diferencial, sabemos:

$$\frac{du}{dt} = f\left(u;t\right) \qquad (4)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right) \qquad (5)$$

De (1) despejamos: $\dfrac{u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right)}{k} = \left.\dfrac{du}{dt}\right|_n + \dfrac{k}{2}\cdot\left.\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O\left(k^2\right) \qquad (6)$

De (2) despejamos: $\dfrac{u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)-u\left(t_n\right)}{k} = \dfrac{1}{2}\cdot\left.\dfrac{du}{dt}\right|_n + \dfrac{k}{4}\cdot\left.\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O\left(k^2\right) \qquad (7)$

Ahora en la definición del error de truncamiento hallada anteriormente reemplazamos (6), (7) y (3), obteniendo así:

$$\begin{cases} e_{n+\frac{1}{2}} = \cancel{\dfrac{1}{2}\cdot\left.\dfrac{du}{dt}\right|_n} + \dfrac{k}{4}\cdot\left.\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O\left(k^2\right) - \cancel{\dfrac{1}{2}\cdot f\left(u\left(t_n\right);t_n\right)} & (por\ 4) \\ e_n = \cancel{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_n} + \cancel{\dfrac{k}{2}\cdot\left.\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|_n} + O\left(k^2\right) - \cancel{f\left(u\left(t_n\right);t_n\right)} - \cancel{\dfrac{k}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)} - O\left(k^2\right) & (por\ 4 \text{ y } 5) \end{cases}$$

Con lo que se obtiene: $\begin{cases} e_{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{k}{4}\cdot\left.\dfrac{d^2u}{dt^2}\right|_n + O\left(k^2\right) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \\ e_n = O\left(k^2\right) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \end{cases}$

Queda demostrada la consistencia. El orden del método es 1, ya que queda determinado por el orden en la ecuación del error de truncamiento de medio paso.