FUERZAS CONCENTRADAS – PARTE 2
TRABAJO PRÁCTICO Nº1

CURSO 4 – CARNICER – PARENTE

SEGUNDO CUAT. 2020
MODALIDAD ONLINE

depto. Estabilidad
.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA
www.ingenieria.uba.ar

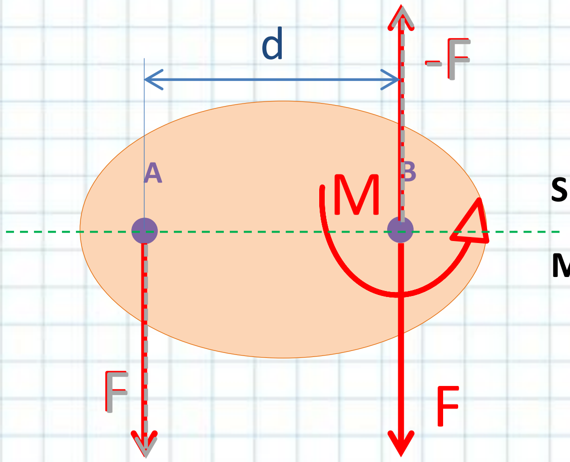
HOJA
2

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

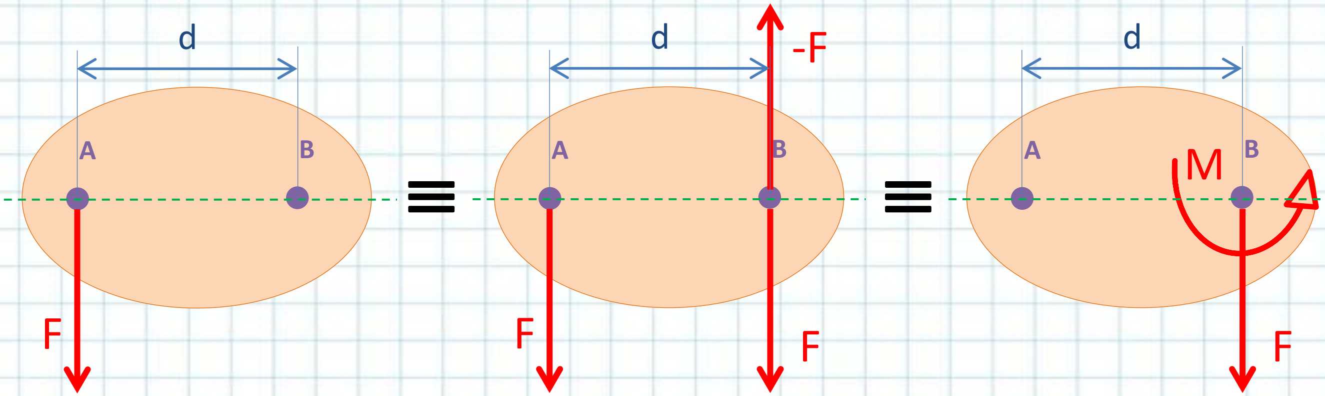
Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par



SISTEMA NULO

M=d.F

SISTEMAS EQUIVALENTES



F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

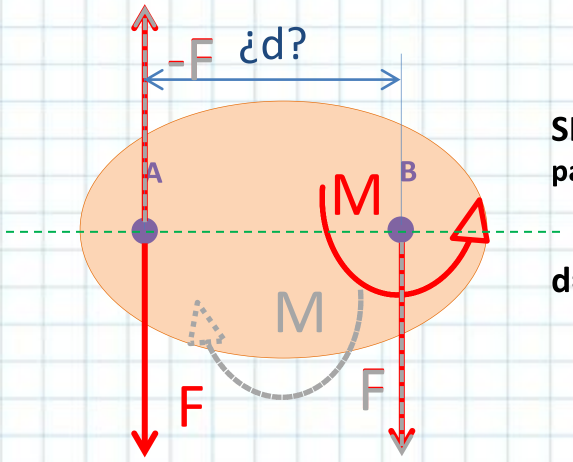
CURSO 4
PARENTE

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

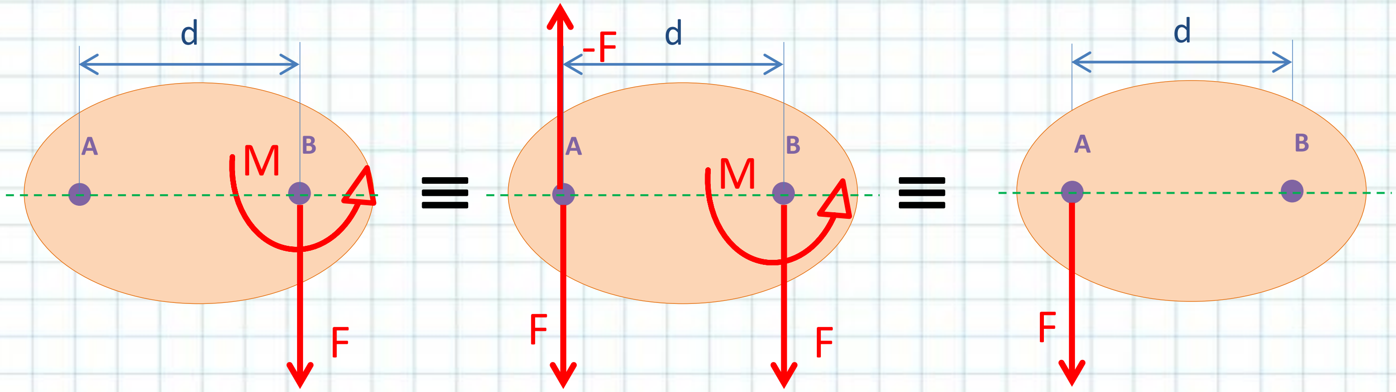
Composición de una fuerza y un par en una fuerza



SISTEMA NULO,
para generar un par contrario a M

d=M/F

SISTEMAS EQUIVALENTES



F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

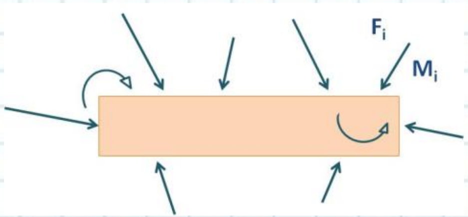
2 CUAT. 2020

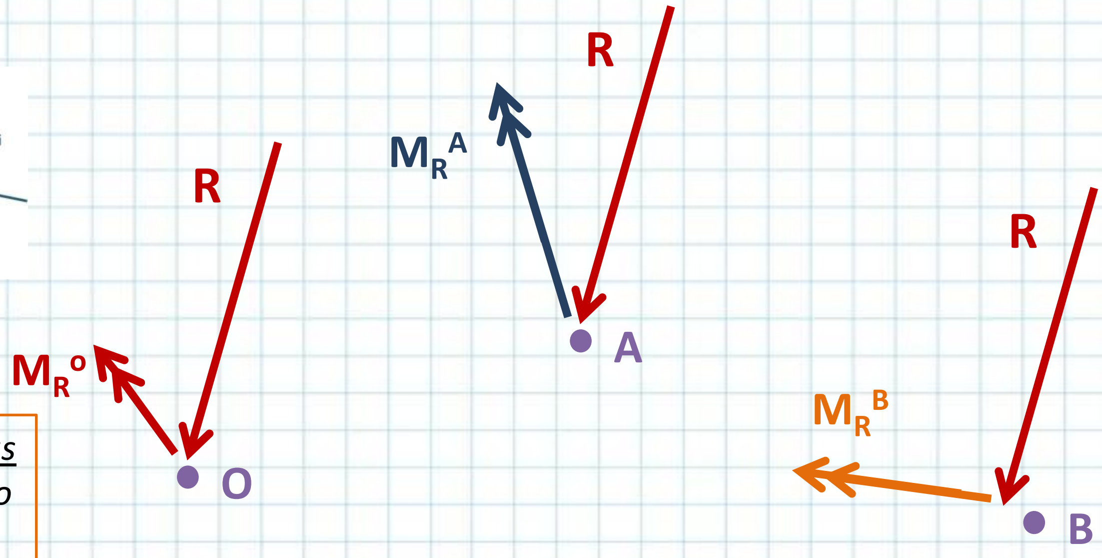
CURSO 4
PARENTE

Invariante Vectorial

Dado un sistema de fuerzas generalizadas, si variamos el centro de reducción: la resultante de reducción R no varía pero si el par de reducción.

Podemos decir entonces que la resultante de reducción es un invariante del sistema, que por su naturaleza lo denominaremos INVARIANTE VECTORIAL





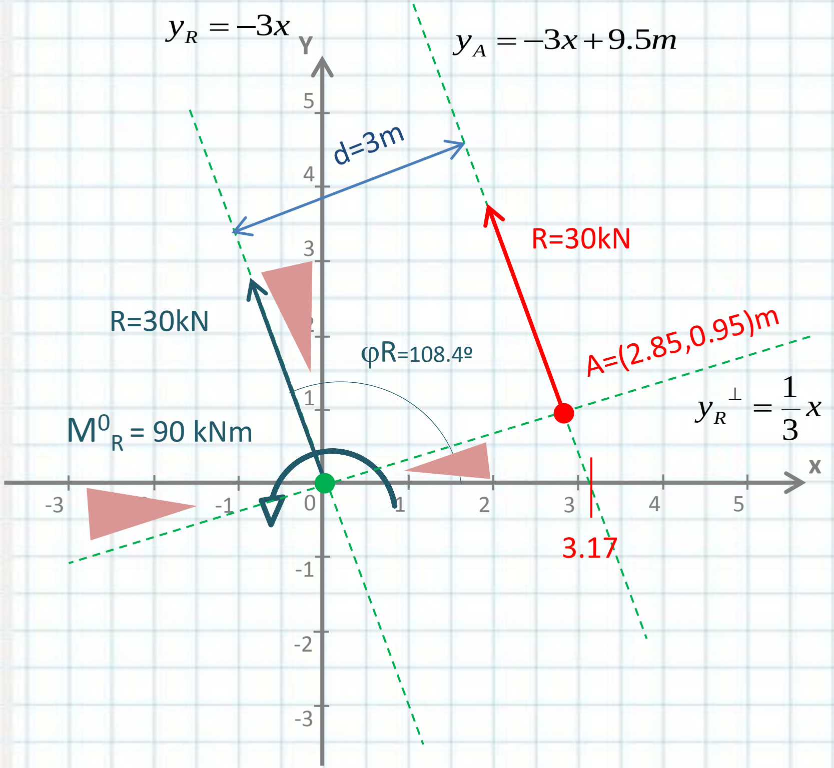
Caso particular en <u>sistemas planos</u> cuando el momento de reducción es nulo.

Invariante vectorial

Caso particular en sistemas planos cuando el momento de reducción es nulo.

Ejemplo:
Para cierto sistema de fuerzas se obtiene su resultante y momento de reducción en el origen:
Se pide encontrar la recta de acción de un sistema equivalente compuesto por una única Resultante (momento de reducción nulo).

R=30kN
M0R=90kNm
φR=108.4º



Resolución simple:

Reconocer la recta de acción de R, trazar una paralela a esta a una distancia "d".

Para el lado que debemos hacer la paralela depende del sentido del momento de reducción.

La distancia d=M/R=90kNm/30kN=3m la medimos en la perpendicular a la recta de acción de R.

Podemos encontrar las coordenadas del punto "A" mediante trigonometría.

$$\beta = 108.4^o - 90^o = 18.4^o$$

$$x_A = 3m \cdot \cos(\beta) = 2.85m$$

$$y_A = 3m \cdot sen(\beta) = 0.95m$$

$$y_A = -3x + 9.5m$$

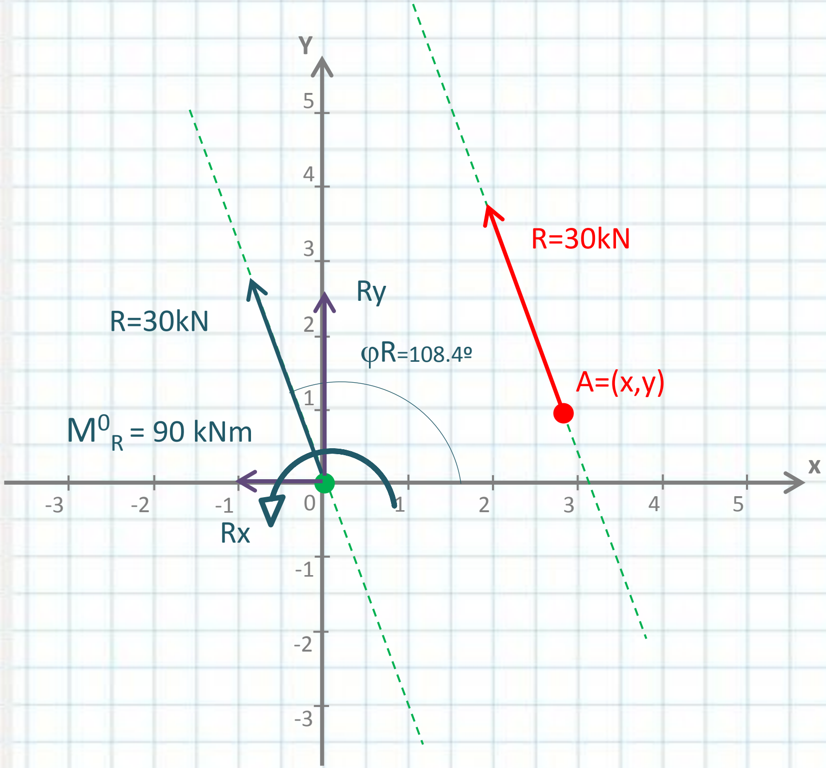
Es como un giro del sistema de referencia, hacer coincidir la recta de acción de R con el eje y.

Invariante vectorial

Caso particular en sistemas planos cuando el momento de reducción es nulo.

Ejemplo:
Para cierto sistema de fuerzas se obtiene su resultante y momento de reducción en el origen:
Se pide encontrar la recta de acción de un sistema equivalente compuesto por una única Resultante (momento de reducción nulo).

R=30kN
M0R=90kNm
φR=108.4º



Resolución analítica:

Descomponer la resultante en las direcciones de x e y:

$$|Rx| = 30kN \cdot \cos(71.6^o) = 9.47kN$$

$$|Ry| = 30kN \cdot sen(71.6^o) = 28.47kN$$

Suponer un punto genérico "A" de coordenadas (x,y) y plantear ecuación de equilibrio de momentos respecto a ese punto:

$$\sum M^A = 0 \Rightarrow -x \cdot |Ry| - y \cdot |Rx| + M_R^0 = 0$$

$$-x \cdot 28.47kN - y \cdot 9.47kN + 90kNm = 0$$

$$y = -3x + 9.5m$$

Hallamos la ecuación de la recta de acción.
Cualquier punto de la recta de acción que pasa por A es un punto de reducción donde el momento de reducción es nulo. (Recordar que R es un vector deslizante)
A veces nos interesan los puntos que se encuentran sobre los ejes coordenados. En este caso:

$$x = 0 \Rightarrow y = 9.5m$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 3.17m$$

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1
2 CUAT. 2020
CURSO 4
PARENTE

HOJA
7

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

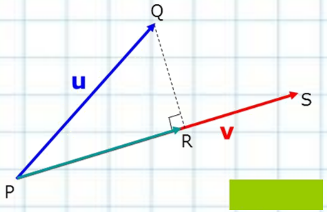
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

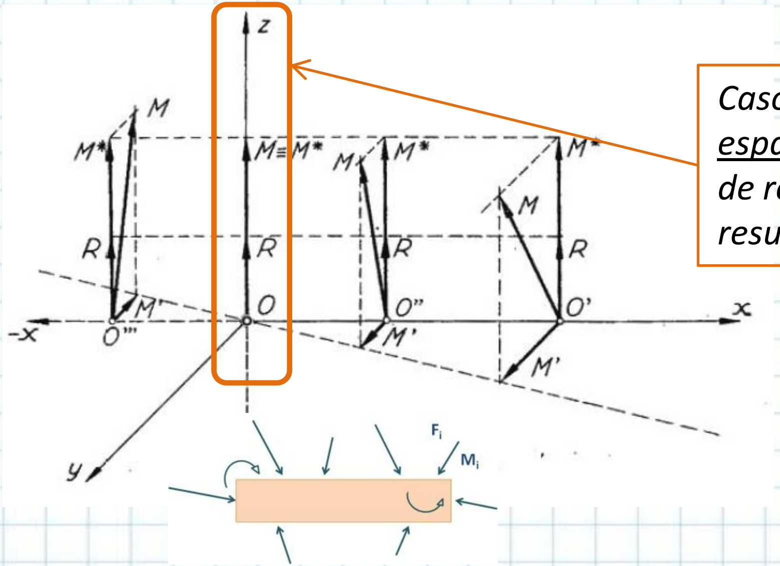
Invariante Escalar

Dado un sistema de fuerzas generalizadas, se demuestra que sea cualquiera el centro de reducción adoptado, la proyección del vector momento de reducción sobre el vector resultante de reducción: es constante.
Constituye otro invariante, que por su naturaleza denominaremos: INVARIANTE ESCALAR.



$$proy_v u = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{|\bar{v}|} \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Caso particular en <u>sistemas planos</u> los vectores resultante y momento de reducción son perpendiculares, por lo tanto la proyección es nula.
IE=0 en sistemas planos de fuerzas.

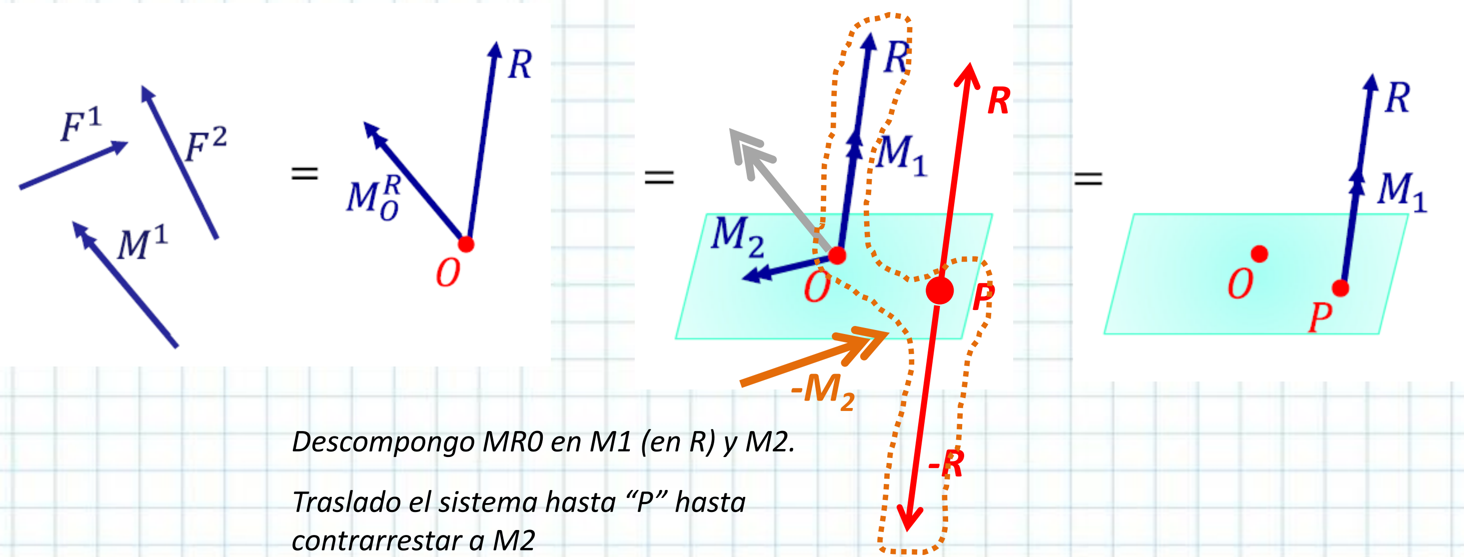


Caso particular en <u>sistemas espaciales</u> cuando el momento de reducción es colinear a la resultante: LLAVE

Llave de torsión

Llave de torsión:

Se denomina *llave de torsión* a un sistema de fuerzas compuesto por una fuerza y un momento colineales. Un sistema de fuerzas puede reducirse a una llave, trasladando la fuerza resultante a un punto P(x,y,z) de modo que se anule la componente perpendicular a la dirección de la resultante.



Descompongo MR0 en M1 (en R) y M2.

Traslado el sistema hasta "P" hasta contrarrestar a M2

Llave de torsión

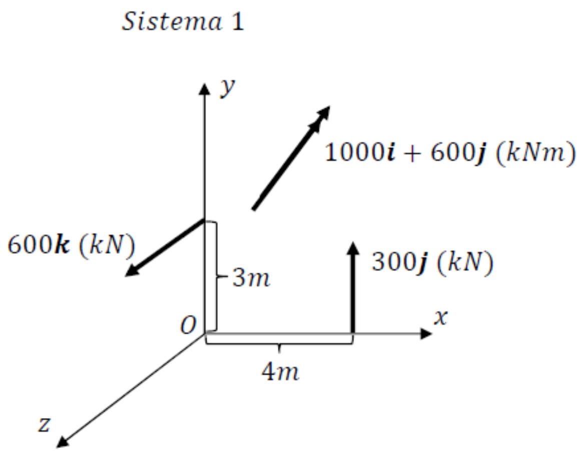
HOJA
9

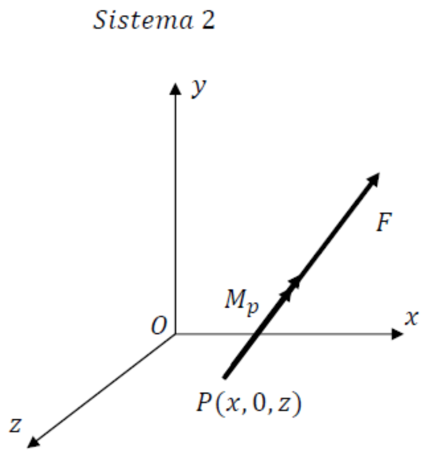
TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

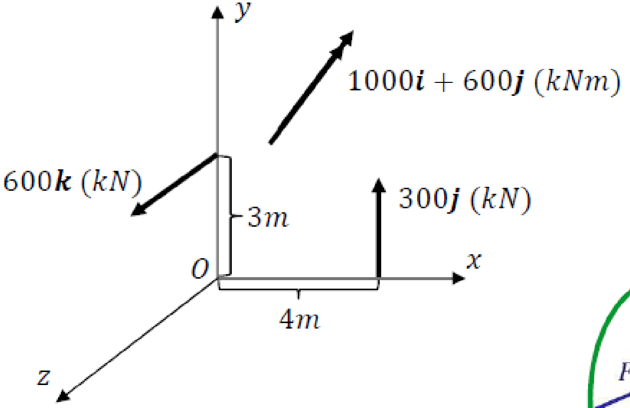
Problema 4.157: El Sistema 1 consiste de dos fuerzas y una cupla. Se quiere representar este sistema mediante una *llave de torsión* (Sistema 2). Determine la fuerza F, la cupla M y las coordenadas x-z donde la línea de acción de F interseca el plano x-z.





Fuente: Bedfor A. y Fowler W. “Estática”, edición en español, Ej 4.157, Pag. 158.

Llave de torsión



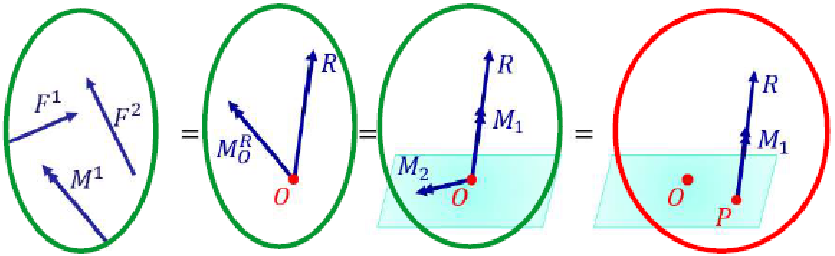
Trasladamos las fuerzas al punto O

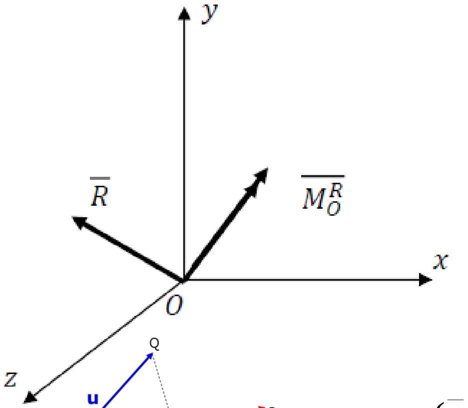
Reducción al origen.
Ecuaciones de Resultante.

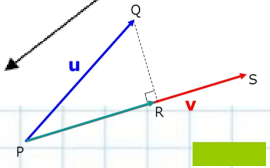
$$\overline{R} = 300\boldsymbol{j} + 600\boldsymbol{k}\ (kN)$$

$$\overline{M_O^R} = 600(3)\boldsymbol{i} + 300(4)\boldsymbol{k} + 1000\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j}\ (kNm)$$

$$\overline{M_O^R} = 2800\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j} + 1200\boldsymbol{k}\ (kNm)$$







$$proy_v u = \frac{(\overline{u} \cdot \overline{v})}{|\overline{v}|} \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$$

Proyección de $\overline{M_O^R}$ sobre la dirección de $\overline{R}$

$$\breve{n}_R = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|} = 0.447\boldsymbol{j} + 0.894\boldsymbol{k}$$

Versor de R.

$$\overline{M_1} = (\overline{M_O^R}.\breve{n}_R).\breve{n}_R = 600\boldsymbol{j} + 1200\boldsymbol{k}\ (kNm)$$

M1 el momento proyectado sobre la recta de acción de R

$$\overline{M_2} = \overline{M_O^R} - \overline{M_1} = 2800\boldsymbol{i}\ (kNm)$$

HOJA

11

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

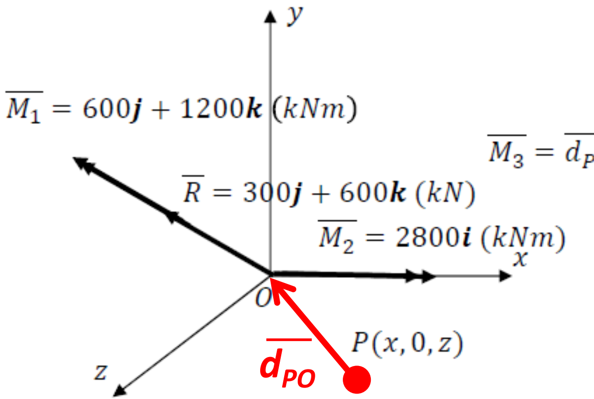
2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Llave de torsión

P es un punto de la recta de acción donde estará la llave.



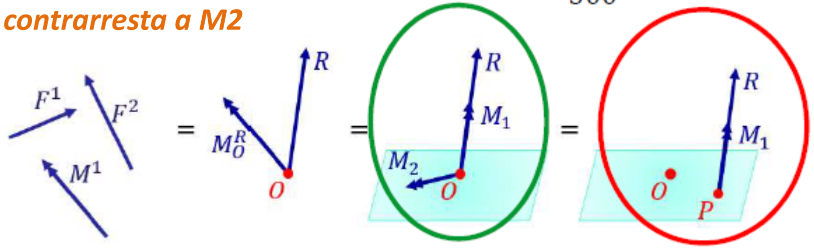
Trasladar al punto P

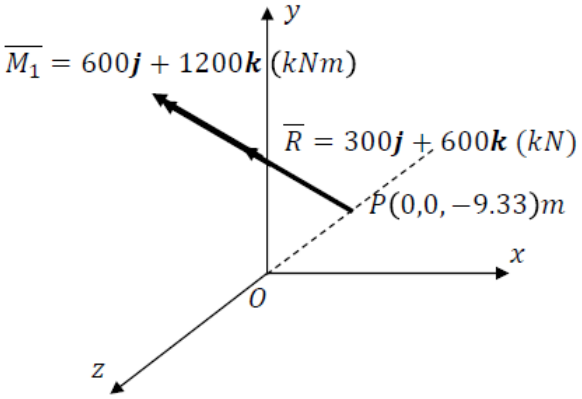
$$\overline{d_{PO}} = \overline{O} - \overline{P} = (0{,}0{,}0) - (x,0,z) = (-x,0,-z)$$

$$\overline{M_3} = \overline{d_{PO}}\ x\ \overline{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -x & 0 & -z \\ 0 & 300 & 600 \end{vmatrix} (kNm) = 300z\boldsymbol{i} + 600x\boldsymbol{j} - 300x\boldsymbol{k}\ (kNm)$$

$$\overline{M_3} = -\overline{M_2} = -2800\boldsymbol{i}\ (kNm) \quad \rightarrow \quad x = 0 \qquad z = -\frac{2800}{300} = -9.33m$$

M3 el par que contrarresta a M2





Llave de torsión:

$$\overline{R} = 300\boldsymbol{j} + 600\boldsymbol{k}\ (kN)$$

$$\overline{M_1} = 600\boldsymbol{j} + 1200\boldsymbol{k}\ (kNm)$$

Punto donde R interseca el plano x-z:

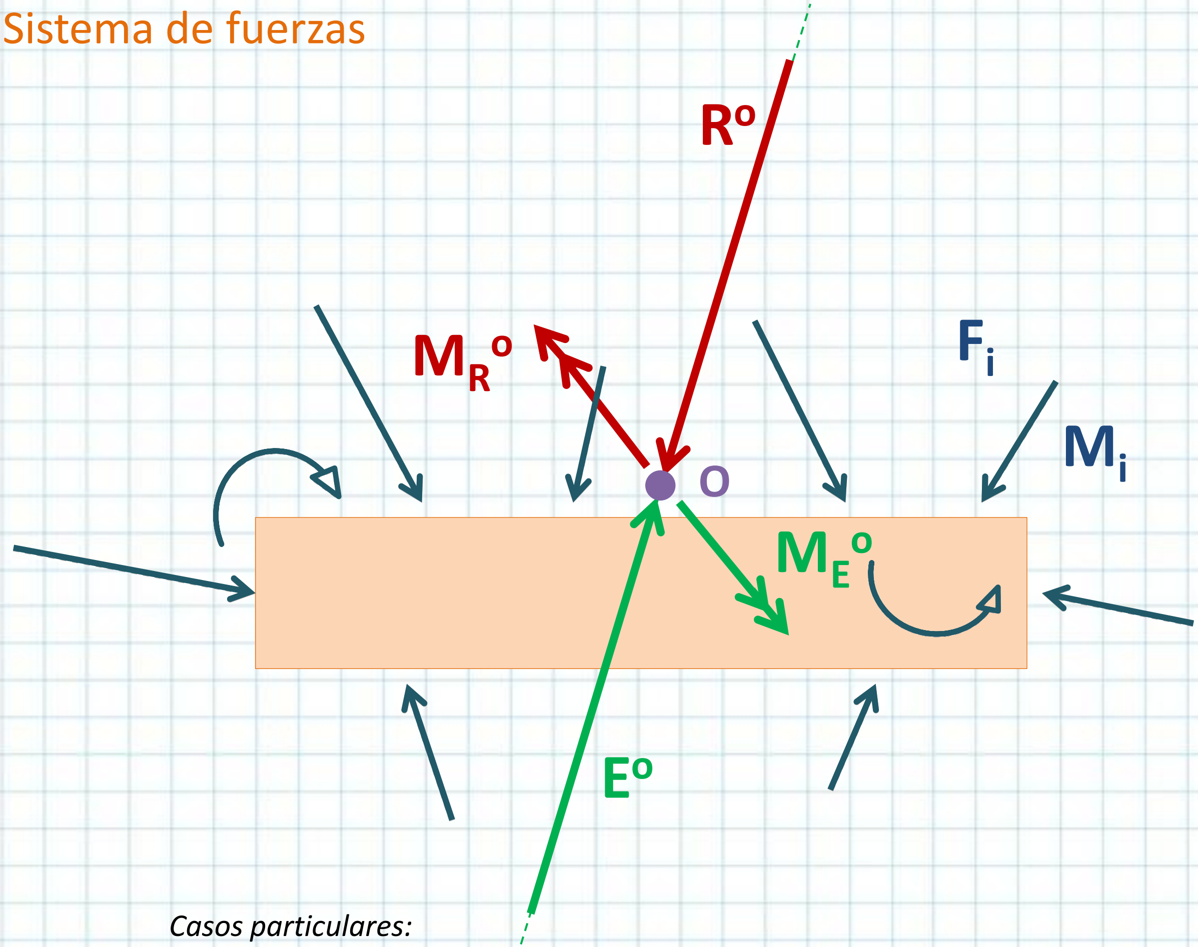
$$A(0{,}0,-9.33)m$$

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Sistema de fuerzas



CUERPO RIGIDO

SISTEMA DE FUERZAS EXTERNAS

PUNTO DE REDUCCION

RESULTANTE

EQUILIBRANTE

SISTEMA EN EQUILIBRIO

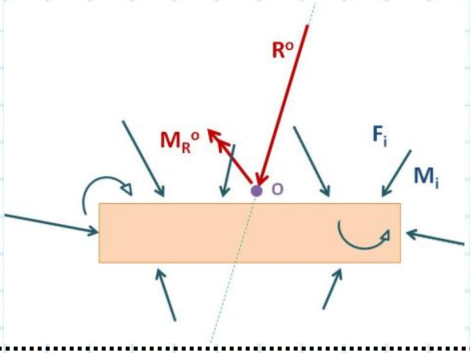
Casos particulares:
-En problemas planos, existe un punto de reducción donde MR=0.
-En problemas espaciales existe un punto de reducción donde los vectores R y MR son colineales. (Llave)

Resultante o Equilibrio

Antes de empezar a resolver un ejercicio debemos tener en claro si estamos frente a un problema de encontrar la resultante o la equilibrante del sistema.

Ecuaciones vectoriales — *Ecuaciones por coordenadas*

Resultante



$$\overline{R_0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

Plano (R2): 2 Ecuaciones.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

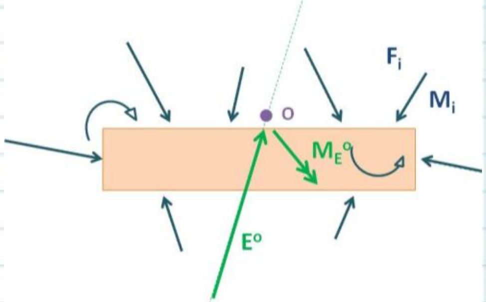
$$\overline{M_R^0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F}_i$$

Plano (R2): 1 Ecuación.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

$$\overline{E_0} = -\overline{R_0}$$

$$\overline{M_E^0} = -\overline{M_R^0}$$

Equilibrio



$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i + \overline{E_0} = 0$$

Plano (R2): 2 Ecuaciones.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F}_i + \overline{M_E^0} = 0$$

Plano (R2): 1 Ecuación.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

⚠ *Estas ecuaciones son genéricas, más adelante veremos que dependiendo del tipo de sistema de fuerzas podemos utilizar otras estrategias de resolución.*

HOJA

14

<u>TEMA</u>

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Clasificación de los sistemas de fuerzas

Además de entender si es un problema de resultante o equilibrio, debemos clasificar el sistema de manera correcta para saber cuantas ecuaciones (incógnitas a resolver) nos va proveer la estática para la resolución.
Recordatorio: Trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados.

Clasificación por concurrencia:

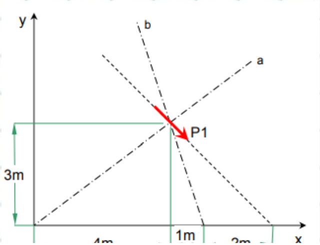
-SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES:
Cuando las rectas de acción de todas las fuerzas que intervienen concurren a un punto.

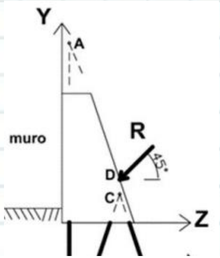
-SISTEMAS DE FUERZAS NO CONCURRENTES:
Cuando las rectas de acción de todas las fuerzas que intervienen NO concurren a un punto.

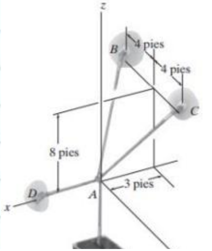
Clasificación por naturaleza:

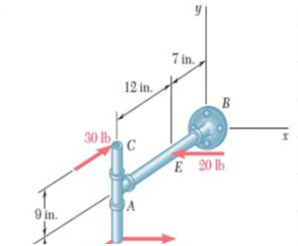
-SISTEMAS DE FUERZAS PLANOS:
Cuando todas las fuerzas que intervienen están contenidas en un plano.

-SISTEMAS DE FUERZAS ESPACIALES:
-Cuando todas las fuerzas que intervienen NO están contenidas en un plano.

<table>
<tr><th></th><th>FUERZAS CONCURRENTES</th><th>FUERZAS NO CONCURRENTES</th></tr>
<tr><td>PLANOS</td><td>

2 ECUACIONES</td><td>

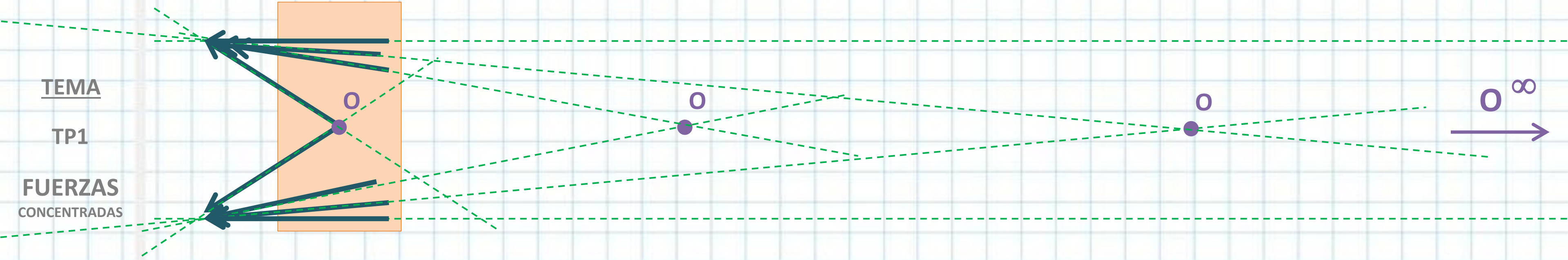
3 ECUACIONES</td></tr>
<tr><td>ESPACIALES</td><td>

3 ECUACIONES</td><td>

6 ECUACIONES</td></tr>
</table>

Fuerzas paralelas

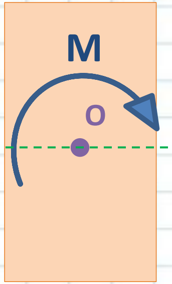
¿Un sistema de fuerzas paralelas es un sistema concurrente o no concurrente?



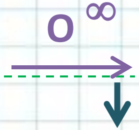
Sistema de fuerzas concurrentes a un punto 0

Traslado el punto de concurrencia hasta el infinito

Un sistema de fuerzas paralelas es un sistema concurrente al impropio.



Otro concepto de momento e impropio.



Un momento puede interpretarse matemáticamente como una fuerza infinitesimal aplicada en el impropio.

HOJA
16

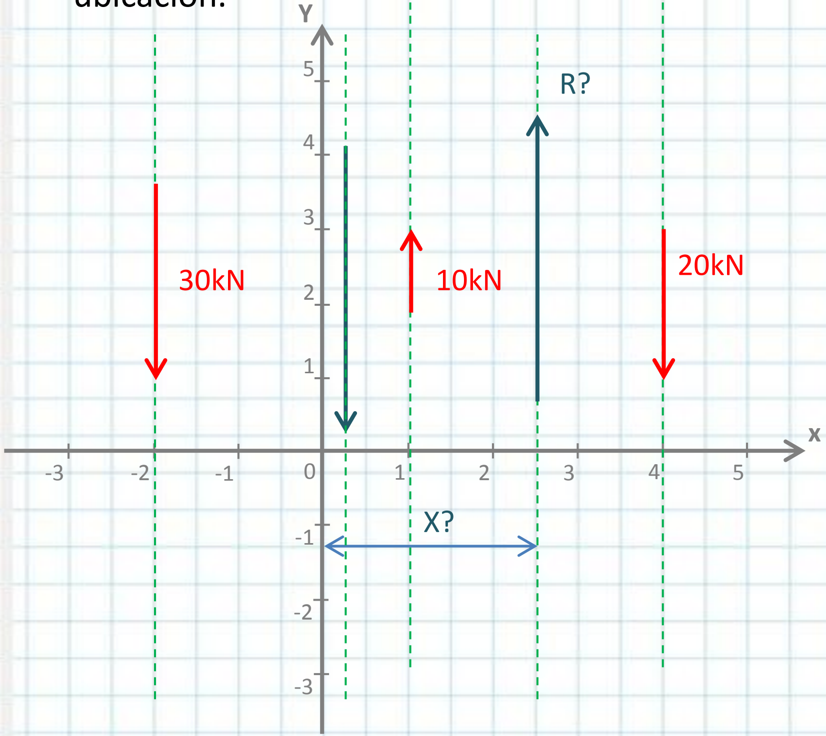
TEMA

TP1

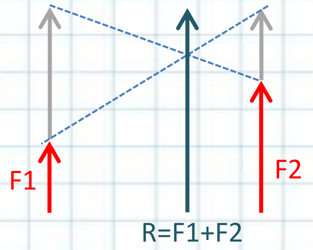
FUERZAS
CONCENTRADAS

Fuerzas paralelas en el plano

Dado el sistema de tres fuerzas paralelas en el plano, encontrar la resultante: módulo, sentido y ubicación.



Suma gráfica de dos fuerzas paralelas:



Estamos en presencia de un **sistema de fuerzas concurrentes en el plano y un problema de equivalencia**.
Puedo plantear **dos ecuaciones**:
Utilizar dos de proyección no tiene sentido, por que en “x” no tengo nada. Vamos a plantear una de proyección en “y” y una de momento respecto al origen.
Nuestras **incógnitas son x y R**, la supongo ambas positivas.

$$R = \sum Fy = -30kN + 10kN - 20kN = -40kN$$

$$M_R^0 = \sum M_{Fi}^0 =$$

$$= 2m \cdot 30kN + 1m \cdot 10kN - 4m \cdot 20kN = x \cdot R$$

$$= -10kNm = x \cdot (-40kN)$$

$$x = 0.25m$$

La resultante tiene sentido contrario al supuesto.

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

HOJA
17

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

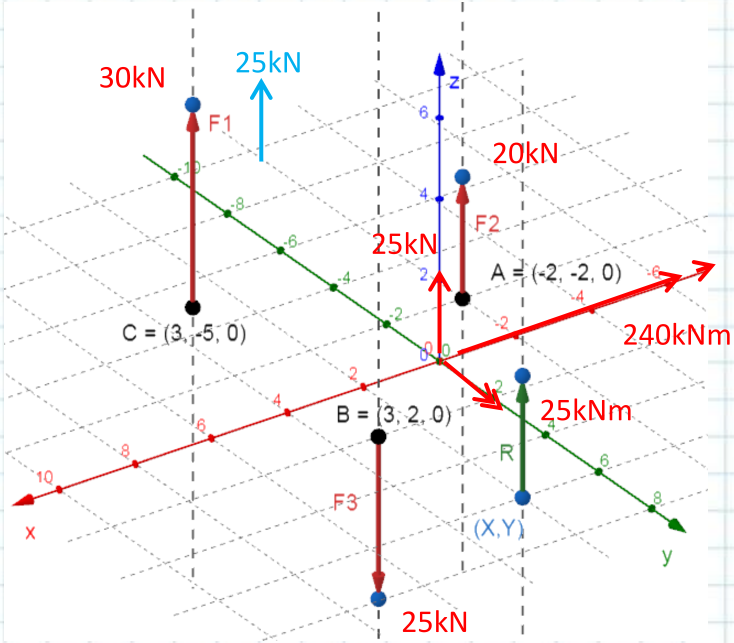
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Fuerzas paralelas en el espacio

Dado el sistema de tres fuerzas paralelas en el espacio F1=30kN F2=20kN y F3=25kN, encontrar la resultante: módulo, sentido y ubicación.



Estamos en presencia de un **sistema de fuerzas concurrentes en el espacio y un problema de equivalencia**.
Puedo plantear **tres ecuaciones**:
Utilizar tres o dos de proyección no tiene sentido, por que en “x” e “y” no tengo nada. Vamos a plantear una de proyección en “z” y dos de momento respecto a los ejes “x” e “y” pasantes por origen.
Nuestras **incógnitas son (X,Y) y R**, la supongo ambas positivas.

$$R=\sum Fz=+30kN+20kN-25kN=+25kN$$

$$M_R^x=\sum M_{Fi}^x=$$

$$=-5m\cdot 30kN-2m\cdot 20kN-2m\cdot 25kN=y\cdot R$$

$$=-240kNm=y\cdot(+25kN)$$

$$y=-9.6m$$

$$M_R^y=\sum M_{Fi}^y=$$

$$=-3m\cdot 30kN+2m\cdot 20kN+3m\cdot 25kN=-x\cdot R$$

$$=25kNm=-x\cdot(+25kN)$$

$$x=-1m$$

Sistema plano de fuerzas NO concurrentes

Para sistemas planos de fuerzas NO concurrentes podemos plantear TRES ecuaciones.

a) Dos ecuaciones de proyección y una de momento.

b) Una ecuación de proyección y dos de momento.

c) Tres ecuaciones de momentos, los puntos NO deben estar alineados.

Problema Sistema plano de fuerzas no concurrentes

HOJA
19

TEMA

TP1

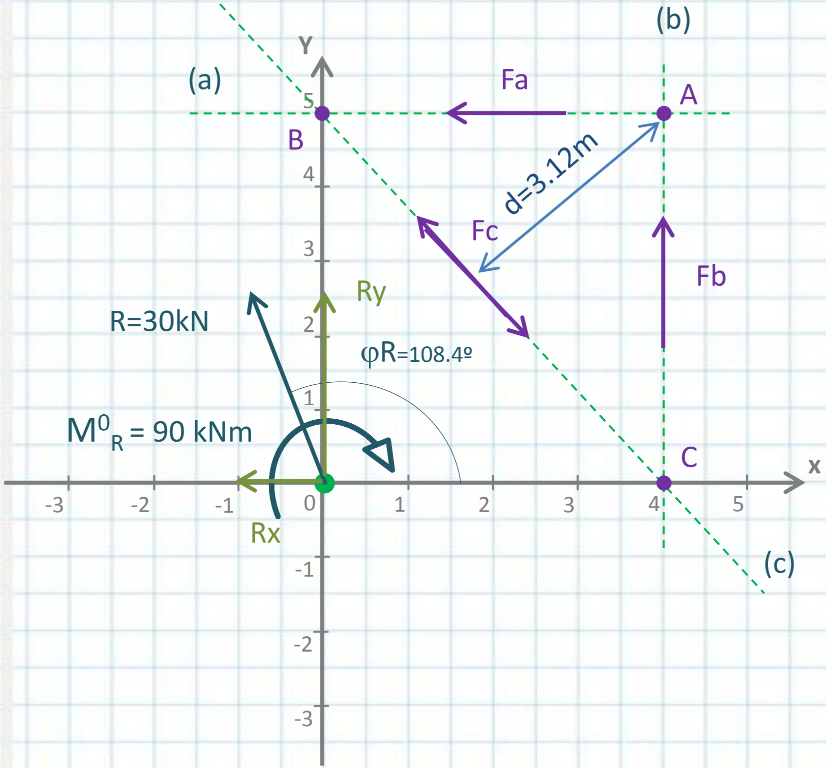
FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Un cierto sistema de fuerzas es reducido al origen y se obtiene R y M0R. Se pide equilibrar dicho sistema con 3 fuerzas cuyas recta de acción son (a) (b) y (c).



Estamos en presencia de un **sistema de fuerzas NO concurrentes en el plano y un problema de equilibrio**.

Puedo plantear **tres ecuaciones**:
En este tipo de problema, utilizar tres ecuaciones de momentos respecto a los puntos de intersección es más conveniente.

Nuestras **incógnitas Fa, Fb y Fc**, las supongo según esquema.

$$|Rx| = 30kN \cdot \cos(71.6^o) = 9.47kN$$

$$|Ry| = 30kN \cdot sen(71.6^o) = 28.47kN$$

$$\sum M^A = -90kNm - 4m \cdot 28.47kN - 5m \cdot 9.47kN - 3.12m \cdot Fc = 0$$

$$\Rightarrow Fc = -80.5kN$$

$$\sum M^B = -90kNm - 5m \cdot 9.47kN + 4m \cdot Fb = 0$$

$$\Rightarrow Fb = +34.3kN$$

$$\sum M^C = -90kNm - 4m \cdot 28.47kN + 5m \cdot Fa = 0$$

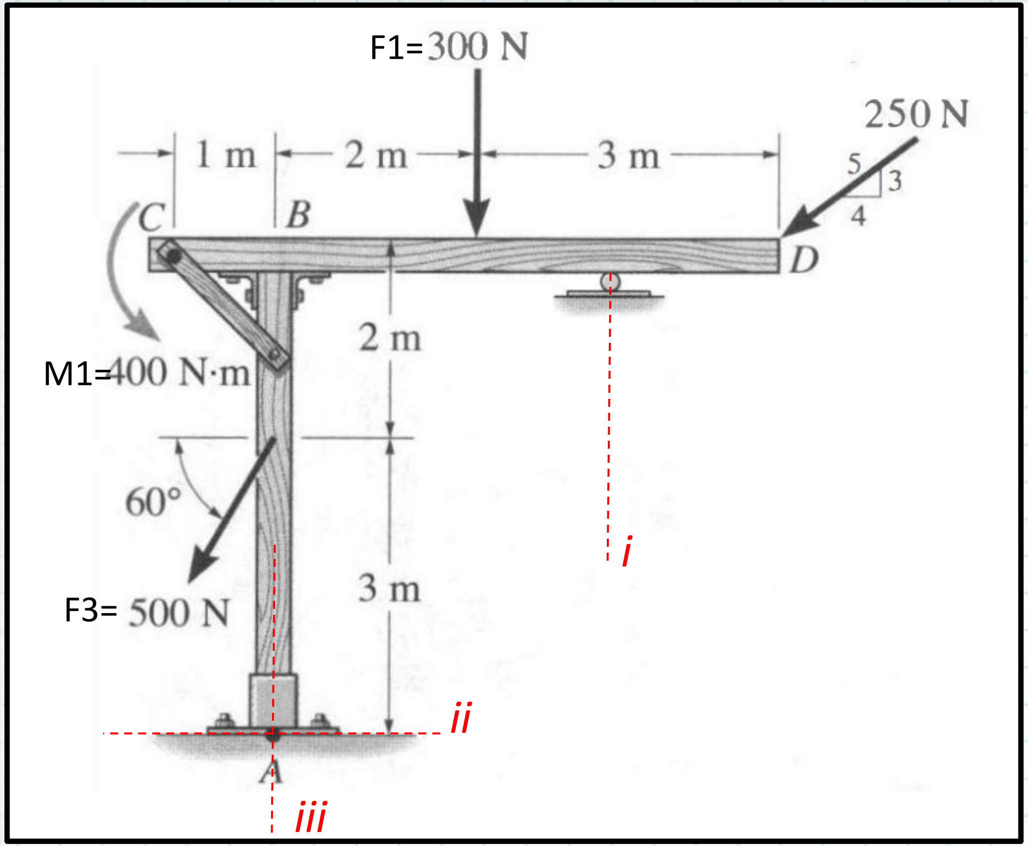
$$\Rightarrow Fa = +40.8kN$$

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.

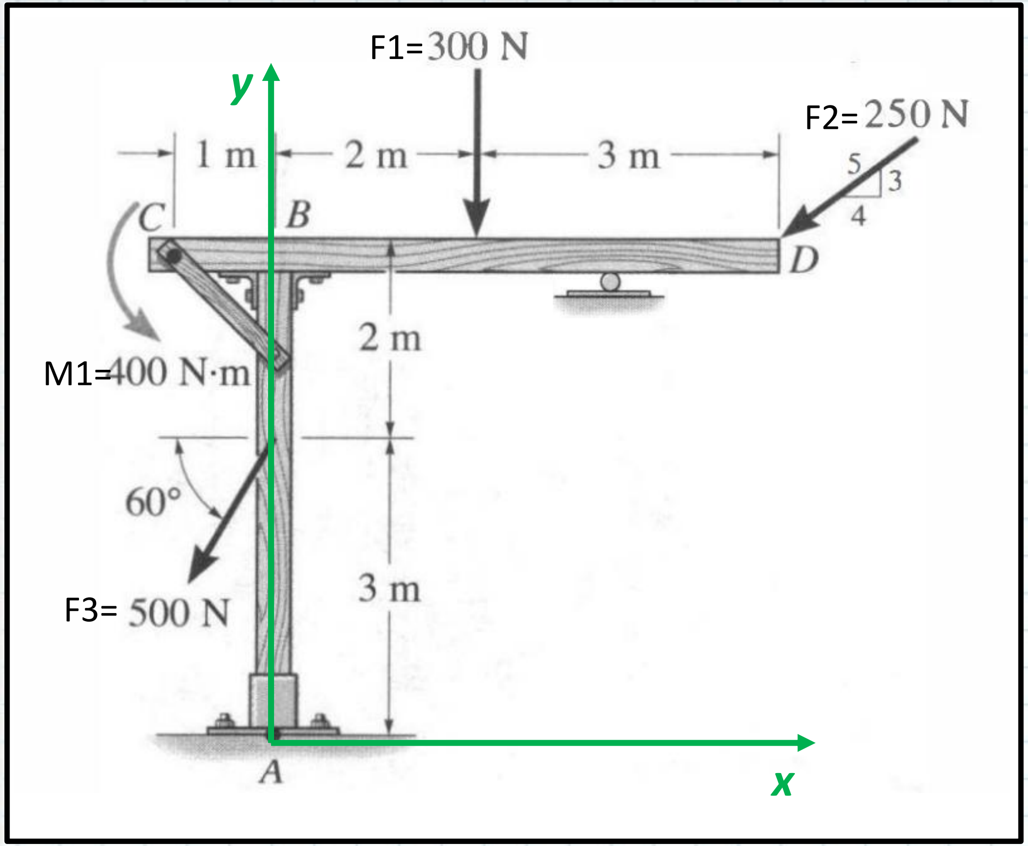


Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Indicamos un sistema de coordenadas para poder trabajar.

HOJA
22

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

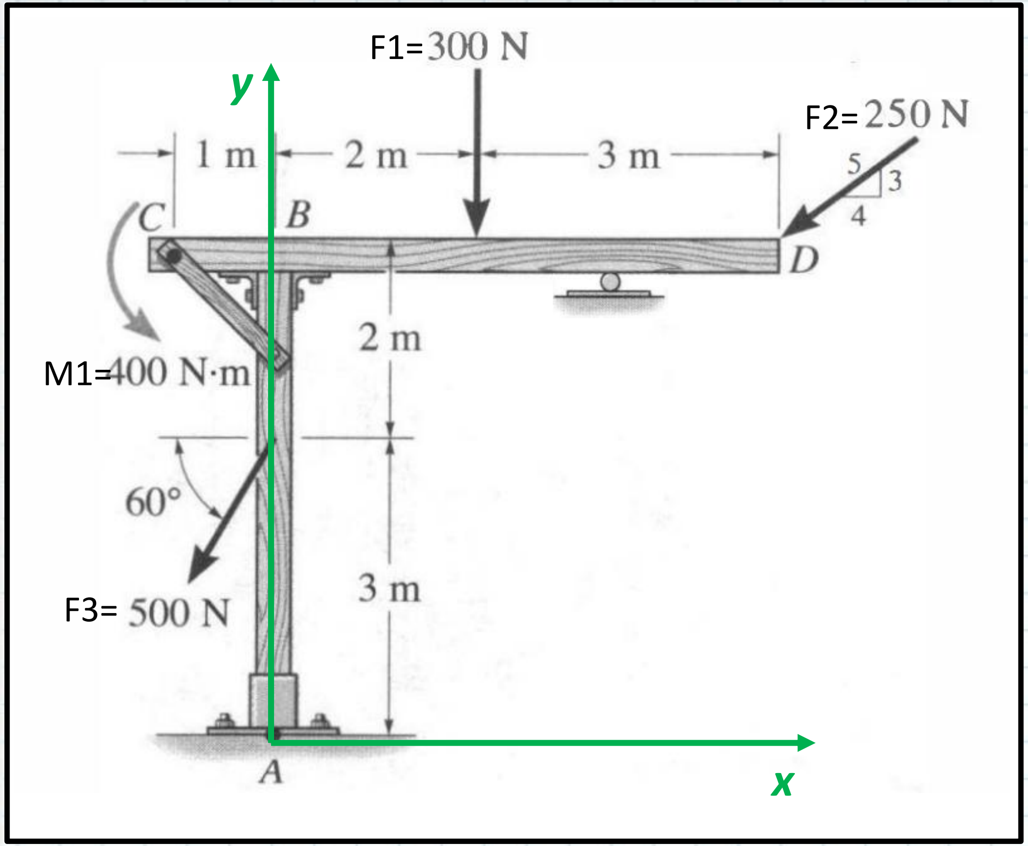
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Indicamos un sistema de coordenadas para poder trabajar.

La fuerza y momento resultantes se definen como:

$$\bar{R} = \sum \bar{F_i} \qquad \overline{M_R} = \sum \bar{d} \times \bar{F_i} + \sum \bar{M_i}$$

Desglosando las ecuaciones vectoriales sobre los ejes x e y:

$$R_x = \sum F_{x_i} \qquad R_y = \sum F_{y_i}$$

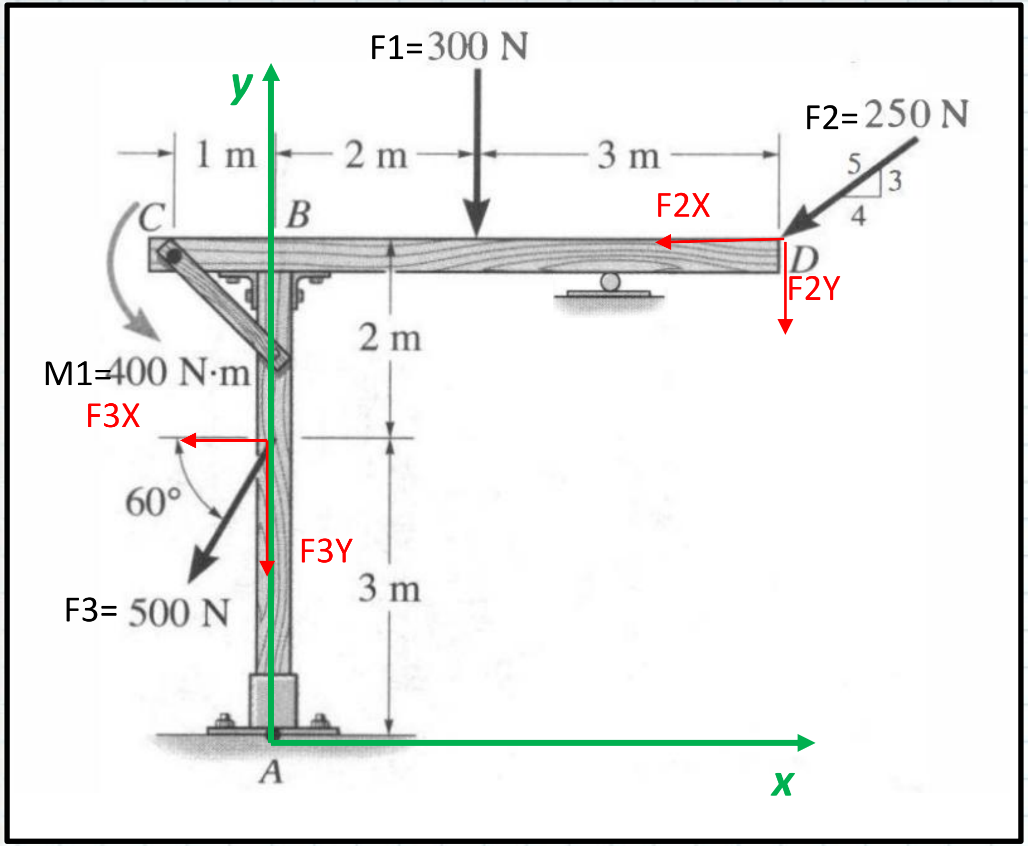
$$M_R = \sum d_y \cdot F_{x_i} + \sum d_x \cdot F_{y_i} + \sum M_i$$

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) **Hallar la resultante y su punto de aplicación.**

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Calculemos la resultante y el momento resultante

Hagamos las cuentas en Mathcad

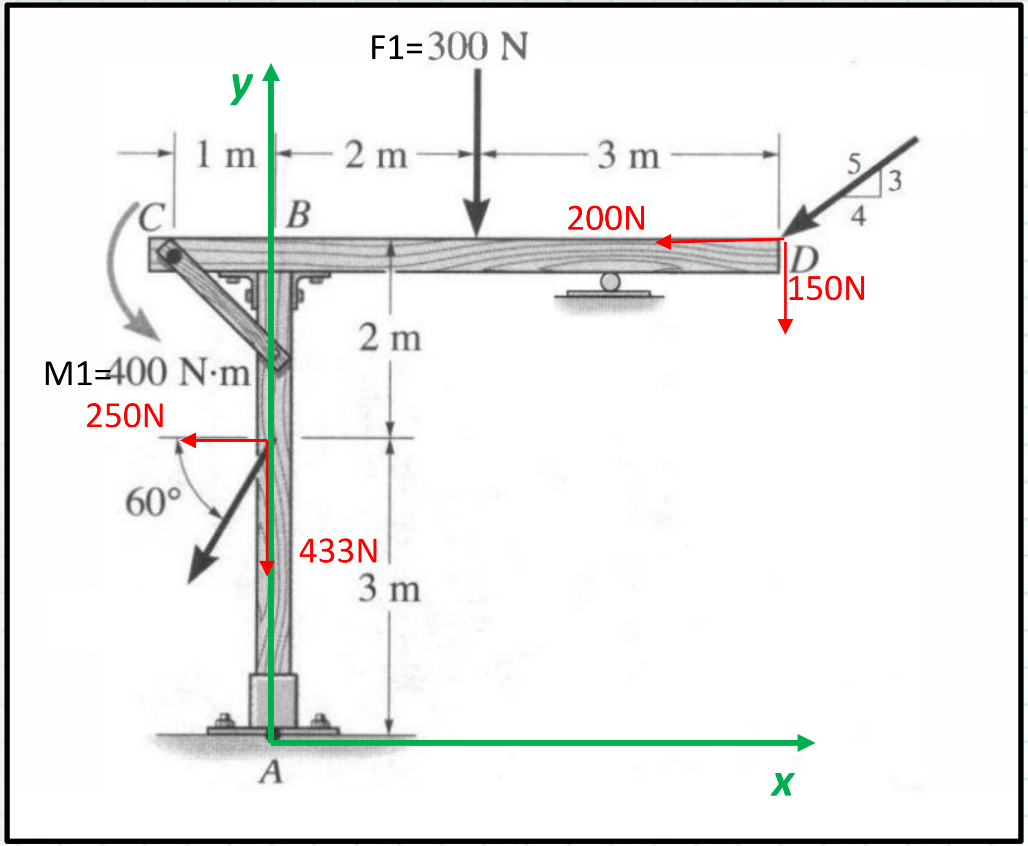
(hagámoslo en vivo. Puede malir sal)

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes x e y son:

$$F_{1y} := -F_1 = -300\,N$$

$$F_{2x} := -F_2 \cdot \frac{4}{5} = -200\,N \qquad F_{2y} := -F_2 \cdot \frac{3}{5} = -150\,N$$

$$F_{3x} := -F_3 \cdot \cos(60°) = -250\,N \qquad F_{3y} := -F_3 \cdot \sin(60°) = -433.013\,N$$

La resultante entonces queda como:

$$R_x := F_{2x} + F_{3x} = -450\,N$$

$$R_y := F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -883.013\,N$$

HOJA
25

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

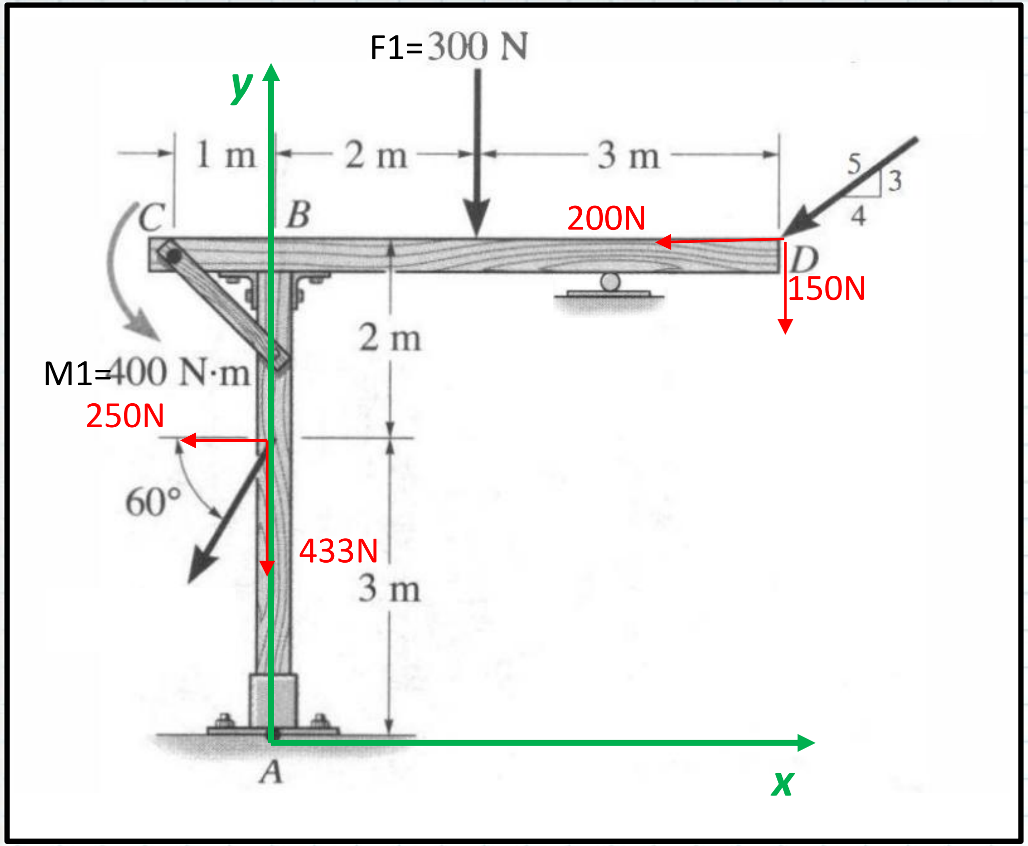
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



El momento resultante se definía como:

$$M_R = \sum F_{x_i} \cdot d_y + \sum F_{y_i} \cdot d_x + \sum M_i$$

Las fuerzas y sus respectivos brazos de palanca respecto del punto A son:

$|F_{2x}| = 200\,N \qquad d_{F2x} := 5m$

$|F_{3x}| = 250\,N \qquad d_{F3x} := 3m$

$|F_{1y}| = 300\,N \qquad d_{F1y} := 2m$

$|F_{2y}| = 150\,N \qquad d_{F2y} := 5m$

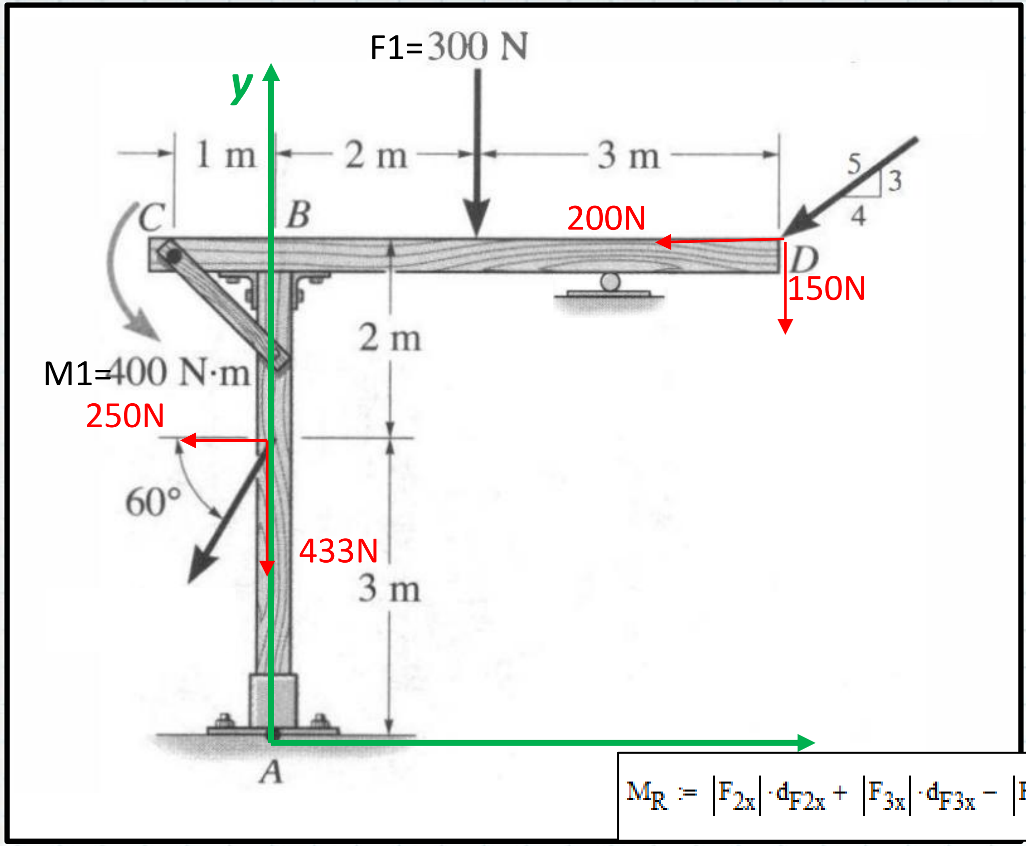
$|F_{3y}| = 433.013\,N \qquad d_{F3y} := 0$

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



El momento resultante se definía como:

$$M_R = \sum F_{x_i} \cdot d_y + \sum F_{y_i} \cdot d_x + \sum M_i$$

Las fuerzas y sus respectivos brazos de palanca respecto del punto A son:

$\lvert F_{2x} \rvert = 200\,N$	$d_{F2x} := 5m$	M+
$\lvert F_{3x} \rvert = 250\,N$	$d_{F3x} := 3m$	M+
$\lvert F_{1y} \rvert = 300\,N$	$d_{F1y} := 2m$	M-
$\lvert F_{2y} \rvert = 150\,N$	$d_{F2y} := 5m$	M-
$\lvert F_{3y} \rvert = 433.013\,N$	$d_{F3y} := 0$	-

El momento resultante queda:

$$M_R := \lvert F_{2x} \rvert \cdot d_{F2x} + \lvert F_{3x} \rvert \cdot d_{F3x} - \lvert F_{1y} \rvert \cdot d_{F1y} - \lvert F_{2y} \rvert \cdot d_{F2y} - \lvert F_{3y} \rvert \cdot -d_{F3y} + M_1 = 800\,N \cdot m$$

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

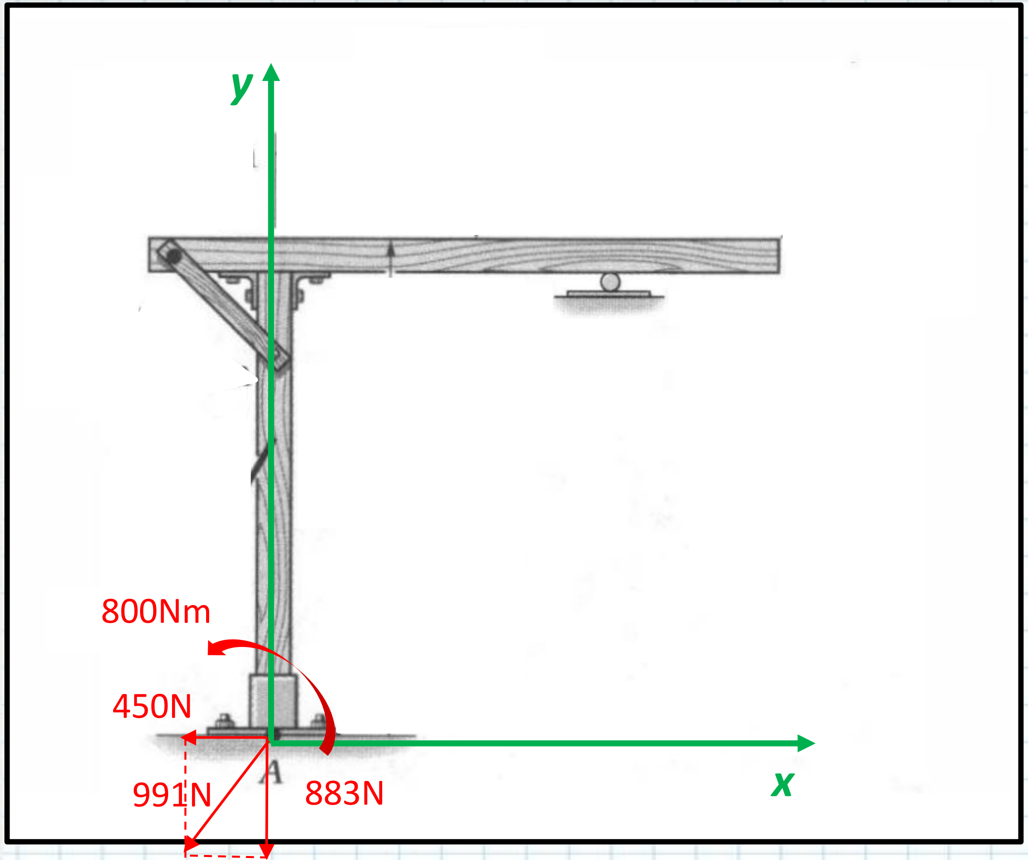
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Reducimos el sistema en A.

$R_x = -450\,N \qquad R_y = -883.013\,N$

$M_R = 800\,N \cdot m$

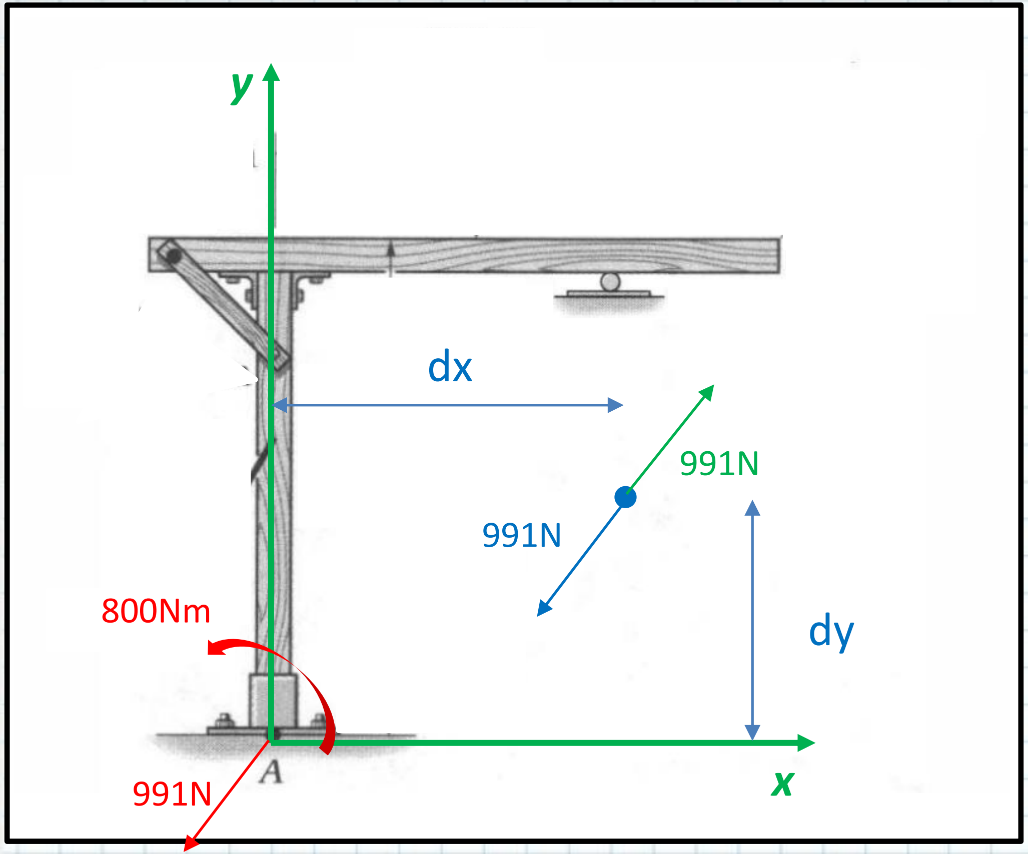
$R := \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = 991.066\,N$

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Reducimos el sistema en A.

$R_x = -450\,N \qquad R_y = -883.013\,N$

$M_R = 800\,N \cdot m$

$R := \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = 991.066\,N$

Hallemos el punto de aplicación de la resultante, para ello, en un punto arbitrario ubiquemos un sistema nulo compuesto por R y –R.

TEMA
TP1
FUERZAS
CONCENTRADAS
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1
2 CUAT. 2020
CURSO 4
PARENTE

HOJA
29

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

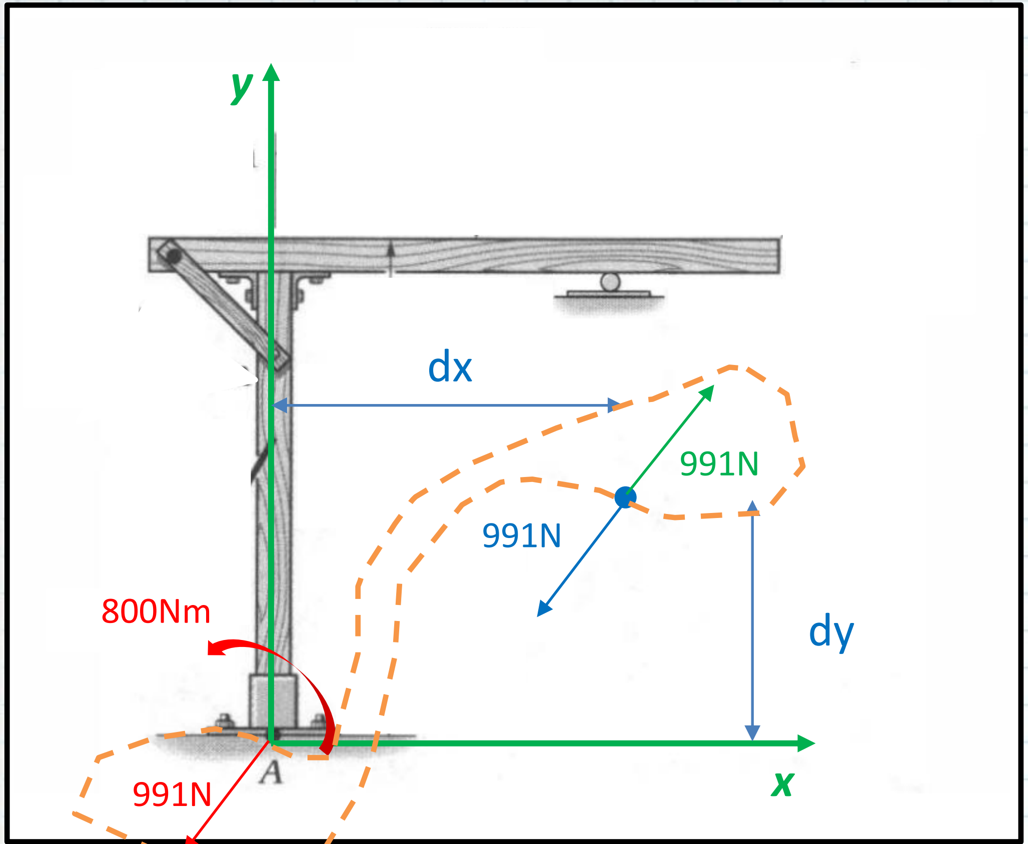
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Reducimos el sistema en A.

$R_x = -450\,N \qquad R_y = -883.013\,N$

$M_R = 800\,N\cdot m$

$R := \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = 991.066\,N$

Hallemos el punto de aplicación de la resultante, para ello, en un punto arbitrario ubiquemos un sistema nulo compuesto por R y –R.

La resultante R en A y la fuerza –R en el punto genérico forman una cupla. Hallemos dx y dy de forma tal de que esta cupla anule el momento de 800 Nm

HOJA
30

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

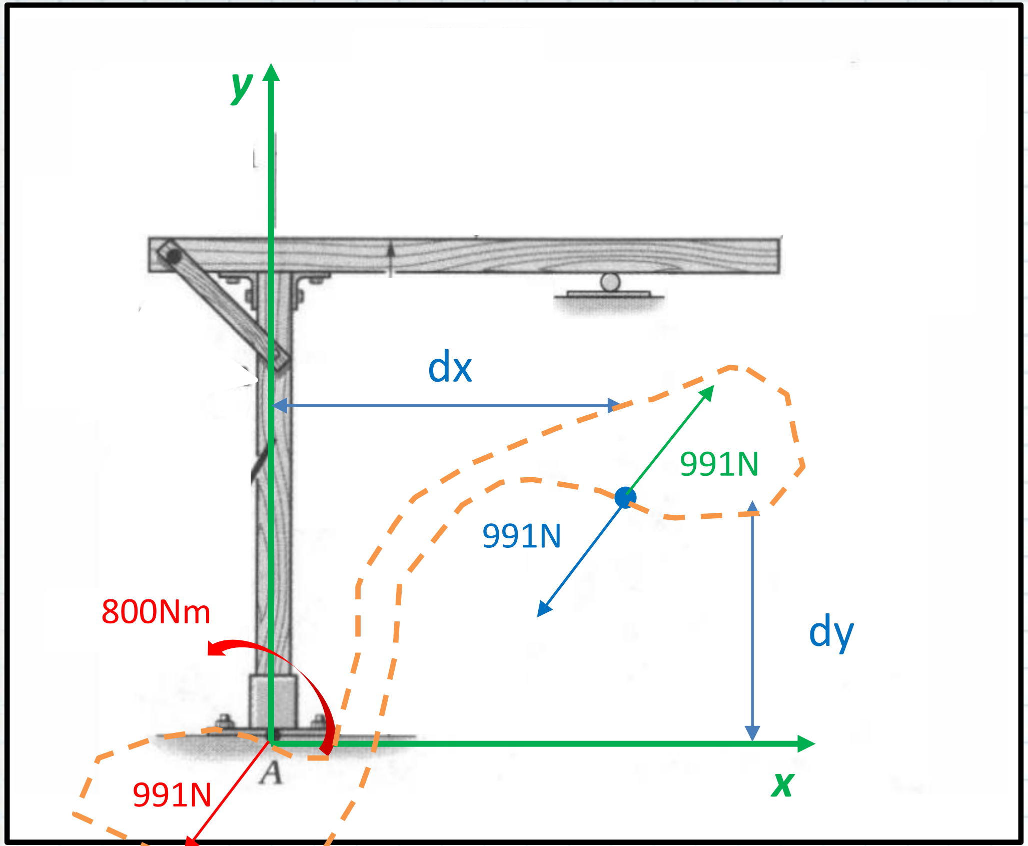
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Reducimos el sistema en A.

$R_x = -450\,N \qquad R_y = -883.013\,N$

$M_R = 800\,N \cdot m$

$R := \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 991.066\,N$

Hallemos el punto de aplicación de la resultante, para ello, en un punto arbitrario ubiquemos un sistema nulo compuesto por R y –R.

La resultante R en A y la fuerza –R en el punto genérico forman una cupla. Hallemos dx y dy de forma tal de que esta cupla anule el momento de 800 Nm

Si el momento resultante respecto del punto genérico debe ser nulo, entonces planteemos momentos respecto de este y despejemos dx y dy igualando a 0

TEMA

TP1

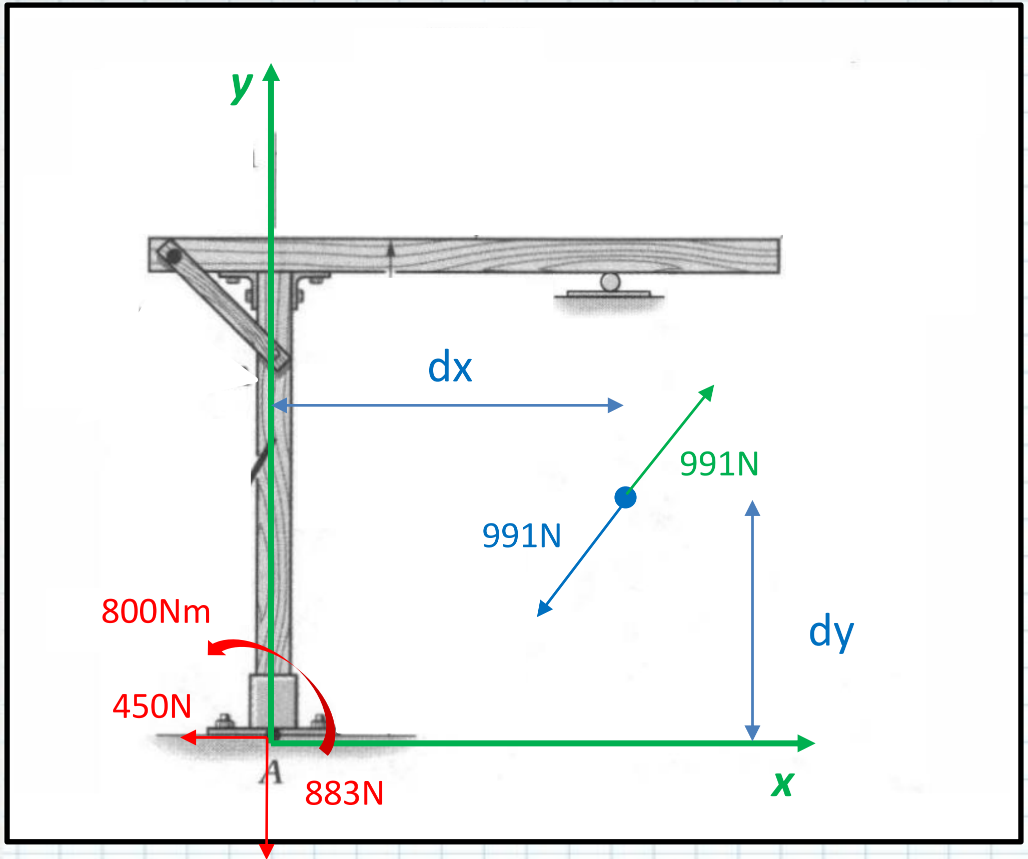
FUERZAS
CONCENTRADAS

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) **Hallar la resultante y su punto de aplicación.**

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Descompongamos la resultante en A en sus componentes X e Y

Hagamos las cuentas en Mathcad

(Y vemos que nos falta)

HOJA
32

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

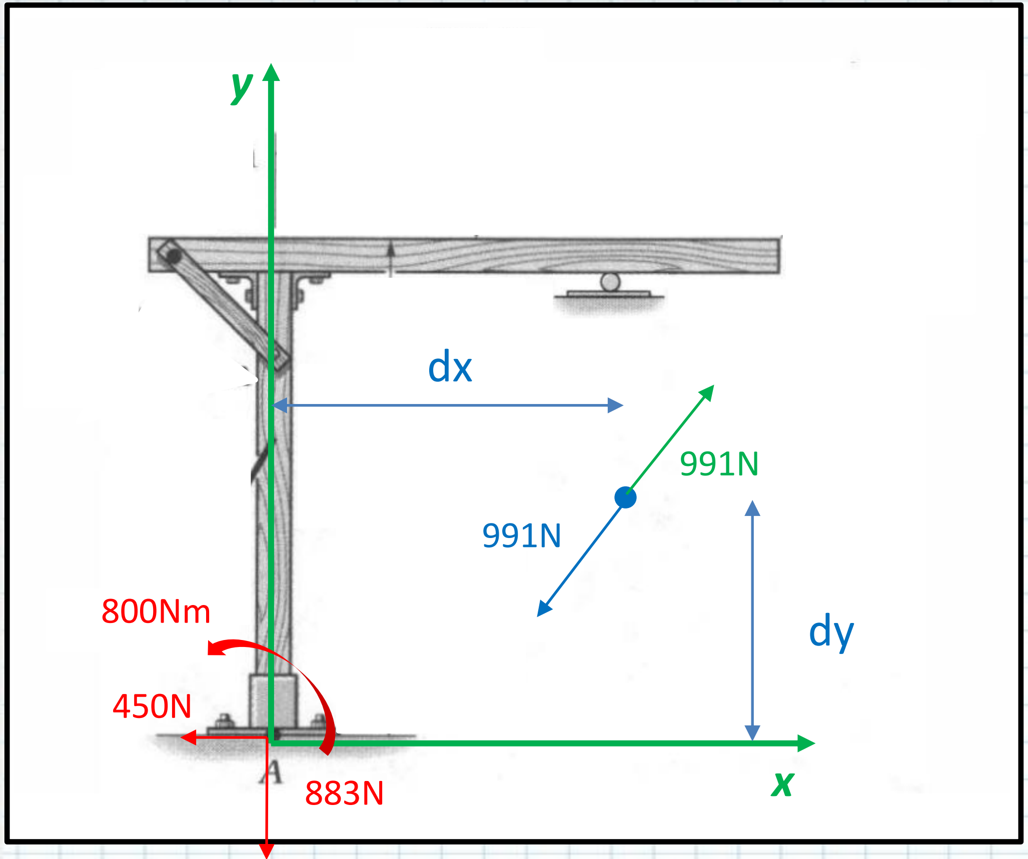
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Descompongamos la resultante en A en sus componentes X e Y

$$-450N \cdot dy + 883N \cdot dx + M_r = 0$$

Tenemos una ecuación y 2 incógnitas!
Propongamos dy = 1

$$-450N \cdot dy + 883N \cdot dx + 800N \cdot m = 0$$

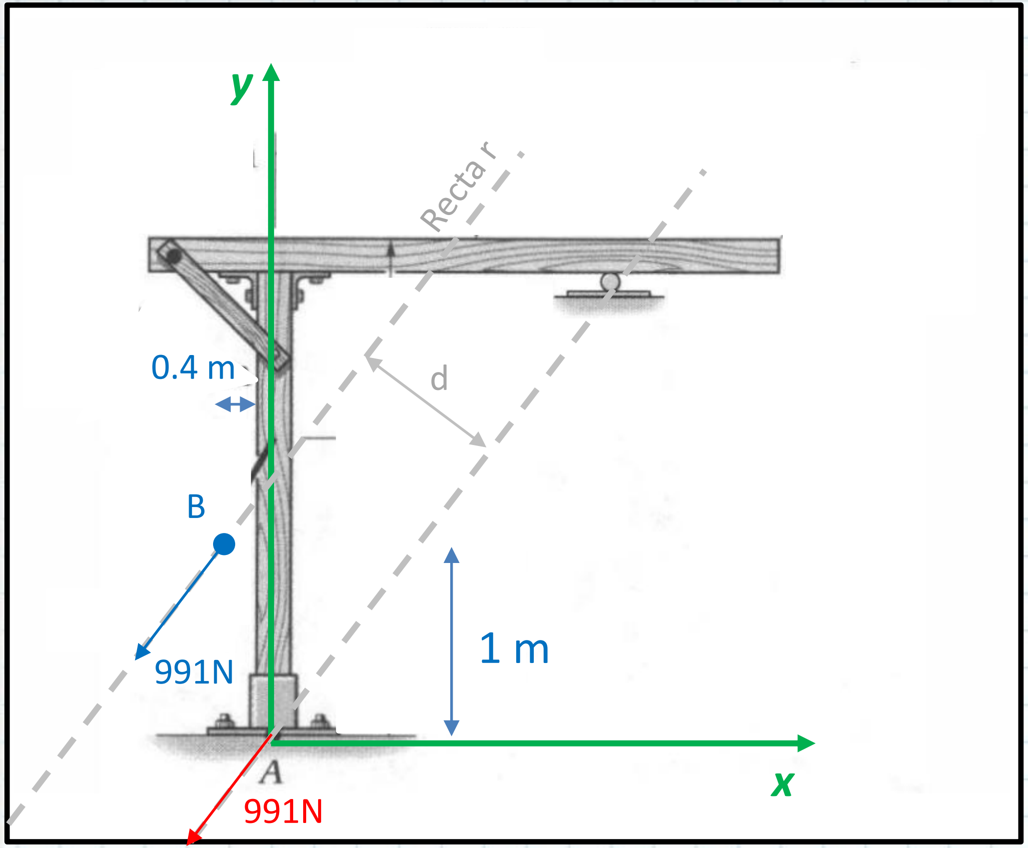
$$\text{find}(dx, dy) = \begin{pmatrix} -0.396 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



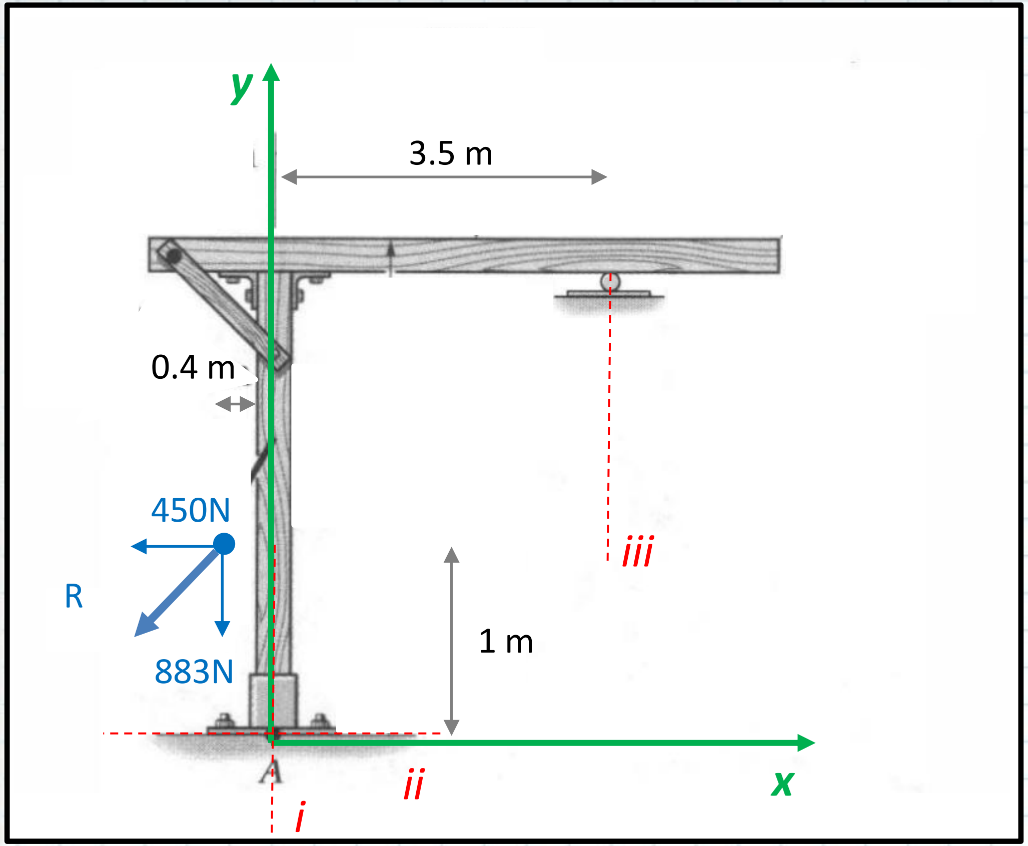
Reducimos el sistema en B, pero podríamos haberlo reducido a cualquier punto de la recta r, es decir, siempre y cuando se mantenga una distancia d perpendicular a la recta de acción de la resultante en A

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



¿Podemos utilizar la resultante y su punto de aplicación que obtuvimos en vez de el sistema de fuerzas inicial?

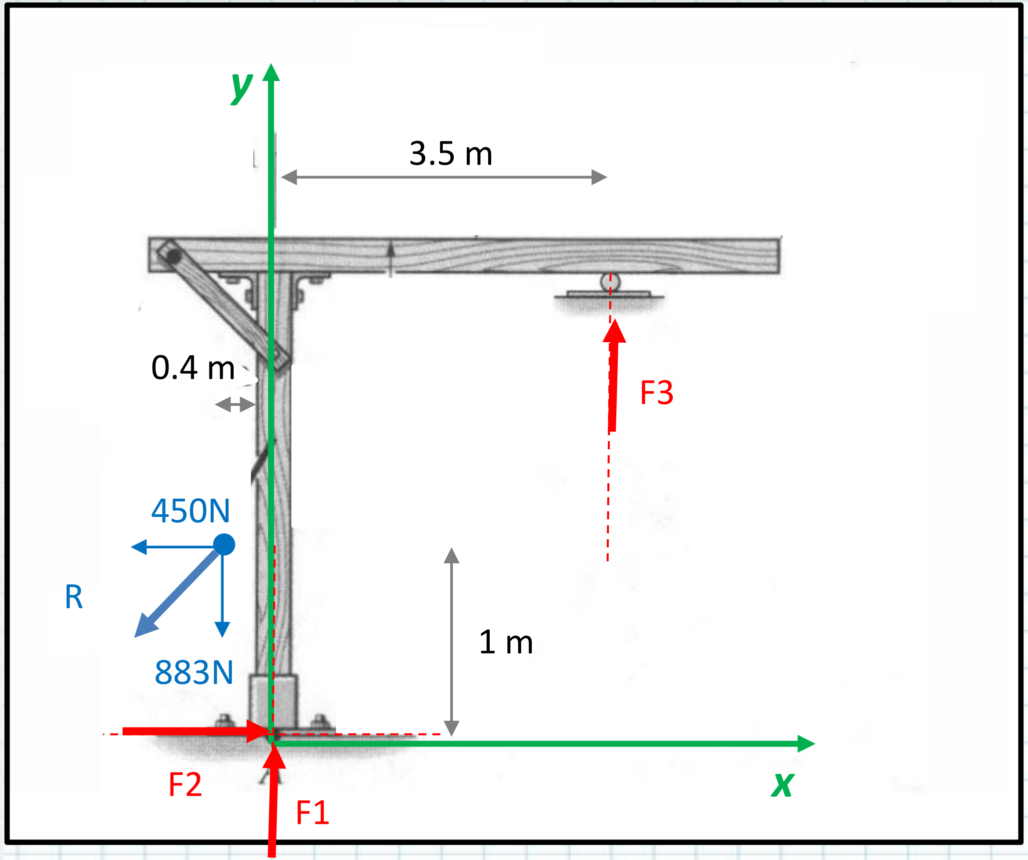
Si, nosotros generamos un sistema de fuerzas compuesta por la fuerza R que es EQUIVALENTE al otro sistema, por lo que obtendríamos los mismos resultados. (El otro camino es más largo).

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



¿Podemos utilizar la resultante y su punto de aplicación que obtuvimos en vez de el sistema de fuerzas?

Si, nosotros generamos un sistema de fuerzas compuesta por la fuerza R que es EQUIVALENTE al otro sistema, por lo que obtendríamos los mismos resultados. (El otro camino es más largo).

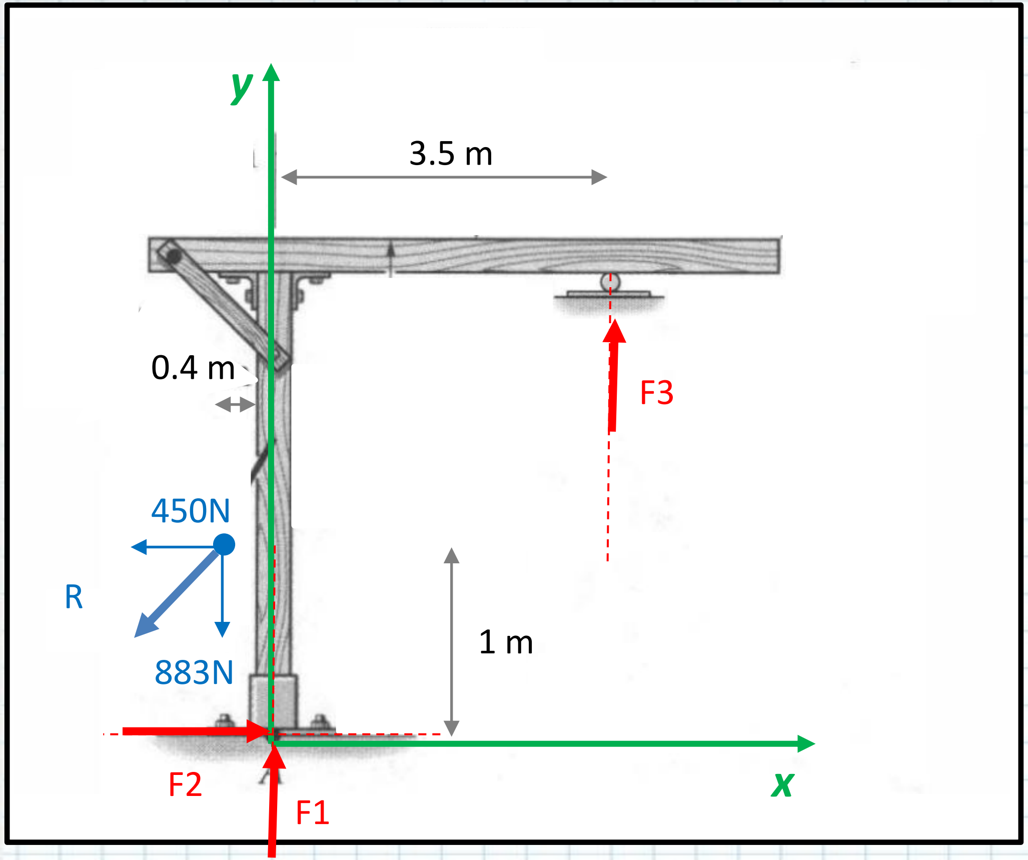
Indicamos nuestras 3 fuerzas con un determinado sentido

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Planteamos el equilibrio entre ambos sistemas.

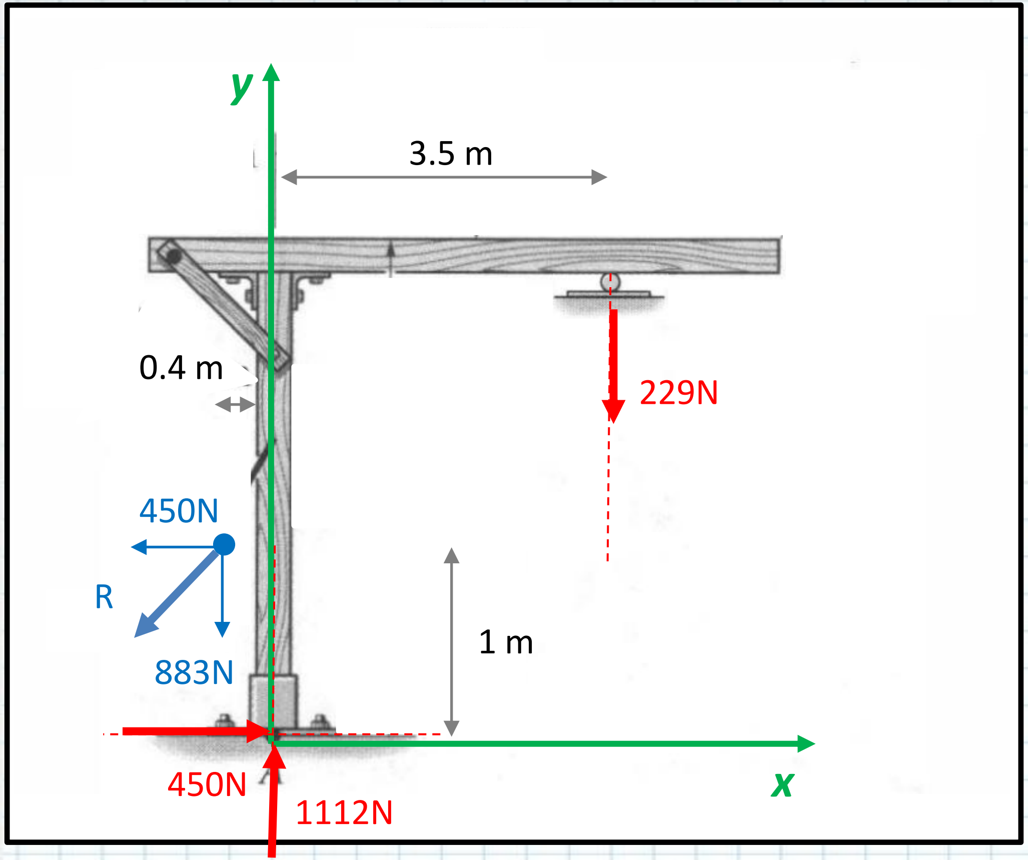
Hagamos las cuentas en Mathcad

Problema Sistema plano fuerzas no concurrentes

Dada la siguiente estructura se pide:

a) Hallar la resultante y su punto de aplicación.

b) Equilibrar el sistema con tres fuerzas que pasen por las rectas i,ii,iii.



Planteamos el equilibrio entre ambos sistemas.

$$\bar{R} + \sum F_i = 0$$

$$M_R^A + M_{F3}^A = 0$$

Desglosando:

En X $\quad -450N + F_2 = 0 \;; \quad F_2 = 450N$

En Y $\quad -883N + F_2 + F_3 = 0 \;;$

Momento en A

$$F_3 \cdot 3.5m + 450N \cdot 1m + 883N \cdot 0.4m = 0$$

TEMA

TP1

FUERZAS CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

TEMA

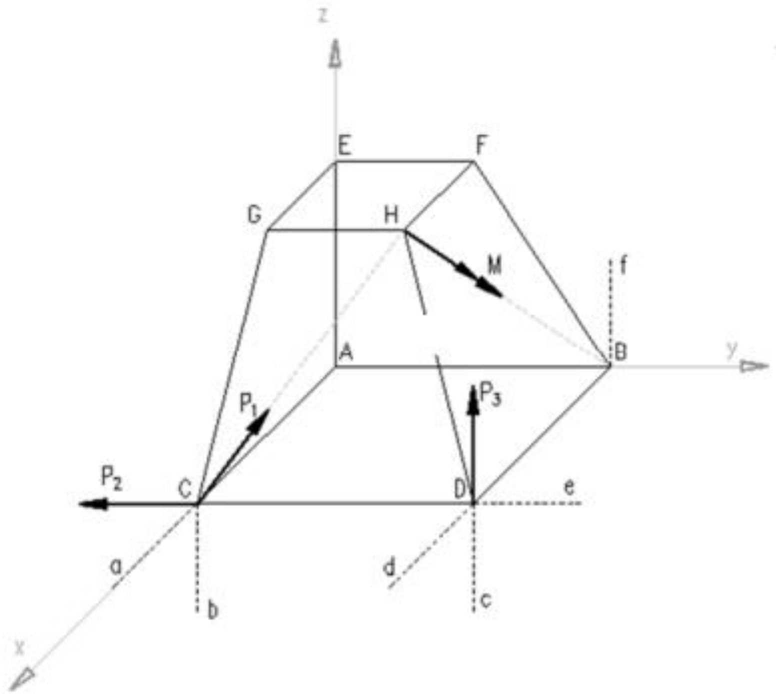
TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Problema Sistema espacial de fuerzas no concurrentes

Dado el siguiente sistema de fuerzas y momentos se pide:

a) Reducir el sistema al punto A.
b) Reducir el sistema al punto B.
c) Calcular los invariantes vectorial y escalar.
d) Equilibrar el sistema con 6 fuerzas, cuyas rectas de acción son (a) (b) (c) (d) (e) y (f).



Datos:

AB=CD=AC=BD=4m
EF=GH=EG=FH=2m
AE=3m=altura entre ABCD y EFGH

P1=30 kN
P2=60 kN
P3=20 kN
M1=40 kNm

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

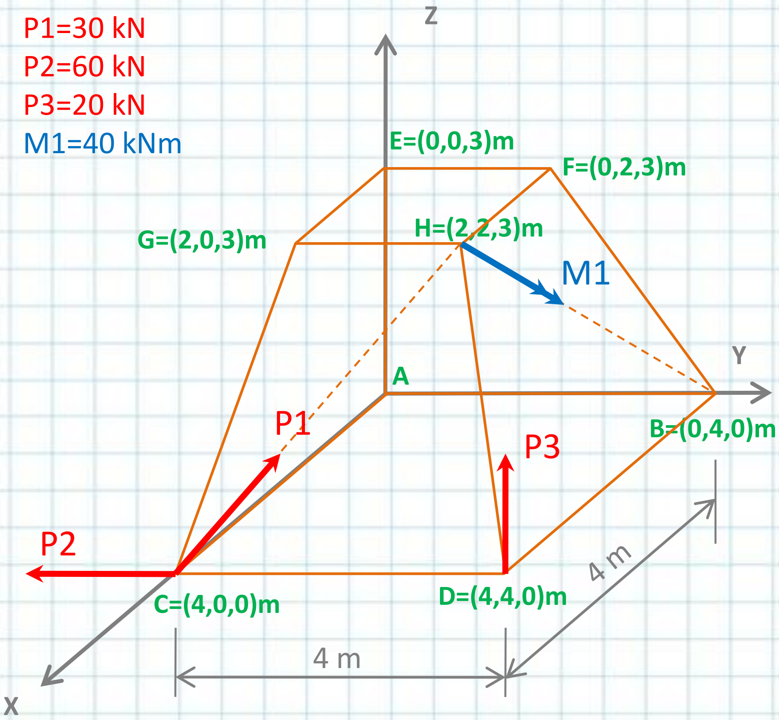
CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema espacial de fuerzas no concurrentes

Dado el siguiente sistema de fuerzas y momentos se pide:

a) Reducir el sistema al punto A (origen)

P1=30 kN
P2=60 kN
P3=20 kN
M1=40 kNm



Tenemos un **sistema de fuerzas NO concurrentes en el espacio y un problema de equivalencia**

Vamos a trabajar de manera vectorial, podemos plantear dos ecuaciones vectoriales: una de fuerzas y otra de momentos.

Datos

$P1 := 30kN \qquad P2 := 60kN \qquad P3 := 20kN \qquad M1 := 40kN \cdot m$

$$r_A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad r_B := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad r_C := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad r_D := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad r_H := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot m$$

Escribimos de manera vectorial las fuerzas y momentos

$$P_1 := P1 \cdot \frac{(r_H - r_C)}{|r_H - r_C|} \qquad P_2 := P2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 := P3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M_1 := M1 \cdot \frac{(r_B - r_H)}{|r_B - r_H|}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -14.552 \\ 14.552 \\ 21.828 \end{pmatrix} kN \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} kN \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} kN \qquad M_1 = \begin{pmatrix} -19.403 \\ 19.403 \\ -29.104 \end{pmatrix} kN \cdot m$$

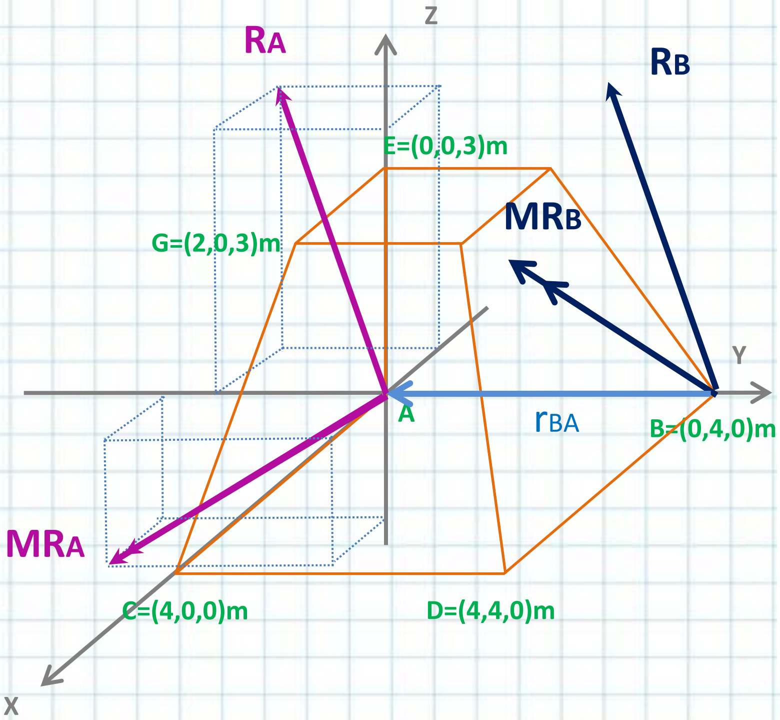
Reducimos el sistema al punto A

$R_A := P_1 + P_2 + P_3 \qquad R_A^T = (-14.552 \quad -45.448 \quad 41.828)\ kN$

$MR_A := M_1 + r_C \times P_1 + r_C \times P_2 + r_D \times P_3 \qquad MR_A^T = (60.597 \quad -147.91 \quad -210.896)\ kN \cdot m$

Problema Sistema espacial de fuerzas no concurrentes

Dado el siguiente sistema de fuerzas y momentos se pide:
b) Reducir el sistema al punto B.
c) Calcular los invariantes vectorial y escalar.



Podemos calcular todo respecto de B o mejor trasladar la reducción del origen hasta el punto B.

Reducimos el sistema de fuerzas al punto B

$$R_B := R_A = \begin{pmatrix} -14.552 \\ -45.448 \\ 41.828 \end{pmatrix} kN$$

$$MR_B := MR_A + (r_A - r_B) \times R_A = \begin{pmatrix} -106.716 \\ -147.91 \\ -269.104 \end{pmatrix} kN \cdot m$$

Calculamos los invariantes

Invariante vectorial = Resultante $\quad Iv = R_A = R_B$

Invariante escalar = Proyección del momento de reducción sobre la resultante

$$Ie_A := MR_A \cdot \frac{R_A}{|R_A|} = -46.976\, kN \cdot m \qquad Ie_B := MR_B \cdot \frac{R_B}{|R_B|} = -46.976\, kN \cdot m$$

TEMA
TP1
FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

HOJA
41

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

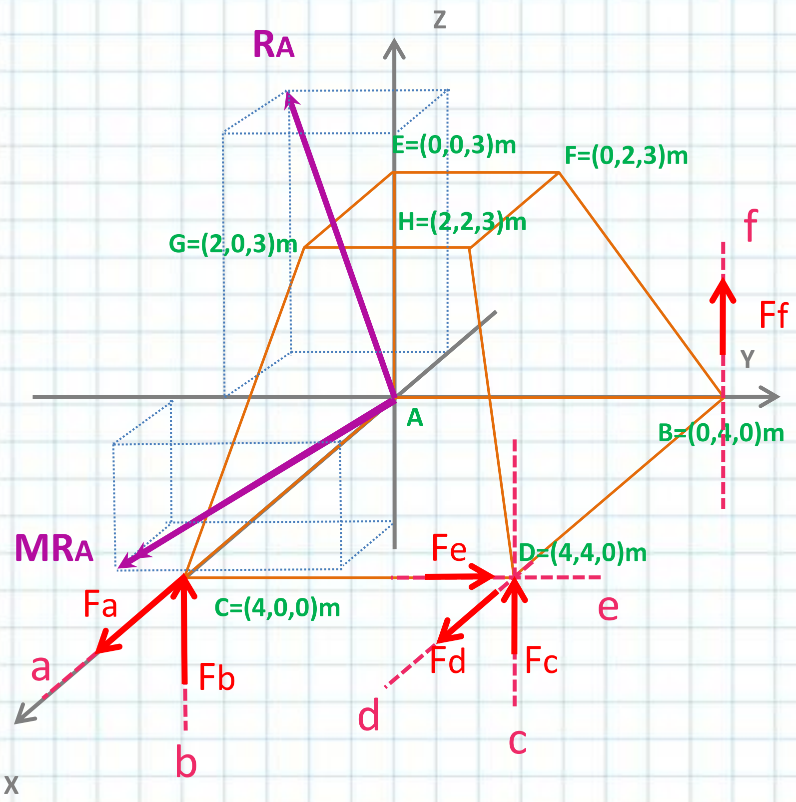
2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema espacial de fuerzas no concurrentes

Dado el siguiente sistema de fuerzas y momentos se pide:

d) Equilibrar el sistema con 6 fuerzas, cuyas rectas de acción son (a) (b) (c) (d) (e) y (f).



Para calcular las fuerzas que equilibran el sistema podemos usar:

-El sistema de fuerzas propio.

-La reducción en el origen.

-La reducción en B.

Planteo las ecuaciones de equilibrio respecto al origen (punto A)

$$\Sigma F_x = R_{Ax} + F_a + F_d = 0$$

$$\Sigma F_y = R_{Ay} + F_e = 0$$

$$\Sigma F_z = R_{Az} + F_b + F_c + F_f = 0$$

$$\Sigma M_x = MR_{Ax} + F_c \cdot 4m + F_f \cdot 4m = 0$$

$$\Sigma M_y = MR_{Ay} - F_b \cdot 4m - F_c \cdot 4m = 0$$

$$\Sigma M_z = MR_{Az} + F_e \cdot 4m - F_d \cdot 4m = 0$$

Puedo comprimir estas ecuaciones en una ecuación matricial de la forma $A \cdot X + b = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4m & 0 & 0 & 4m \\ 0 & -4m & -4m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4m & 4m & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \\ F_d \\ F_e \\ F_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ MR_{Ax} \\ MR_{Ay} \\ MR_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A es inversible, puedo hallar X haciendo $X = -A^{-1} \cdot b$

HOJA

42

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

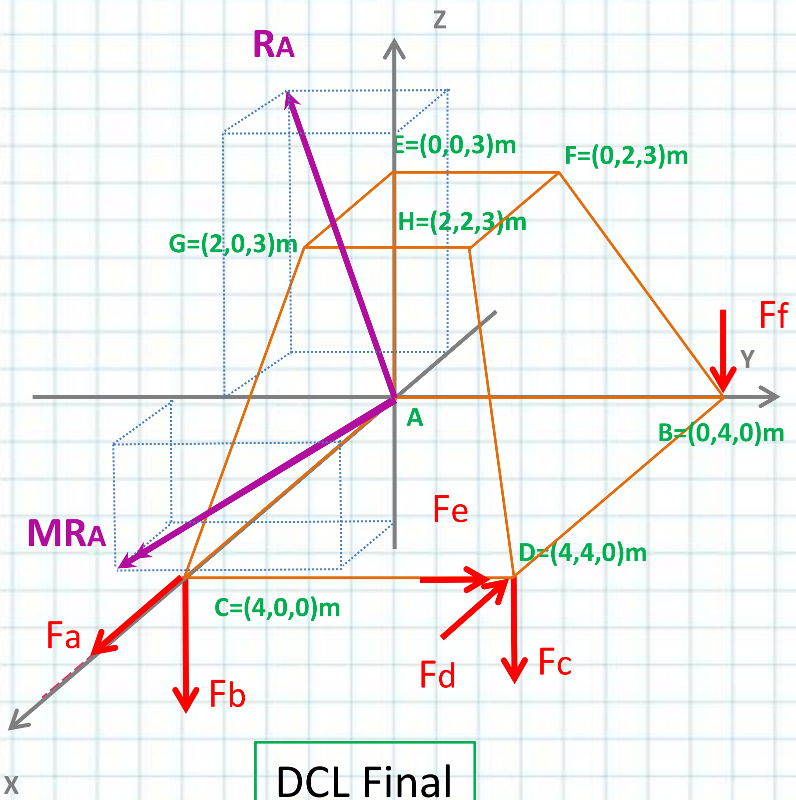
CURSO 4

PARENTE

Problema Sistema espacial de fuerzas no concurrentes

Dado el siguiente sistema de fuerzas y momentos se pide:

d) Equilibrar el sistema con 6 fuerzas, cuyas rectas de acción son (a) (b) (c) (d) (e) y (f).



DCL Final

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -14.552 \\ -45.448 \\ 41.828 \\ 60.597 \\ -147.91 \\ -210.896 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) := |A|$$

$$\det(A) = -64$$

Entonces $X := -A^{-1} \cdot b$

$$X = \begin{pmatrix} 21.828 \\ -26.679 \\ -10.299 \\ -7.276 \\ 45.448 \\ -4.851 \end{pmatrix} \begin{matrix} Fa \\ Fb \\ Fc \\ Fd \\ Fe \\ Ff \end{matrix}$$

$F_a = 21.828\,kN$ $F_d = -7.276\,kN$

$F_b = -26.679\,kN$ $F_e = 45.448\,kN$

$F_c = -10.299\,kN$ $F_f = -4.851\,kN$