Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES

D. Prelat – 2020

Presentación

Las circunstancias casi surrealistas y la atmósfera casi apocalíptica que estamos viviendo me imponen – así lo siento – unas breves reflexiones a modo de presentación del curso.

Es la primera vez, en mis cuarenta años de docencia, que tengo que prescindir del aula y del pizarrón frente al alumnado. Espero poder adaptarme a esta nueva modalidad, impuesta por la situación, y espero que ustedes me ayuden y – por favor – me tengan un poco de paciencia.

Mi nombre es Daniel Prélat y en circunstancias normales estoy a cargo de las clases teóricas, mientras que en las clases prácticas estamos con el Ingeniero Claus Rosito. Todavía no tengo claro cómo va a ser el funcionamiento, pero lo que sí vamos a hacer los dos es atender las preguntas y dudas que ustedes planteen en el campus, en horarios a convenir.

<u>Las clases comienzan oficialmente el 13 de abril</u>, sean virtuales o presenciales, y todo indica que no van a ser presenciales, lamentablemente. Mientras tanto, para aprovechar el tiempo disponible, les sugerimos que vayan repasando y leyendo algunos temas que se van a ser importantes durante el curso. Nosotros vamos a subir material al aula virtual, recomendaremos bibliografía y atenderemos sus consultas.

Antes de pasar directamente a la presentación de la materia, quiero detenerme para rendir un muy humilde homenaje a los héroes anónimos que la sociedad parece descubrir con asombro en cada cataclismo sanitario como el que estamos atravesando: todo el personal médico, de enfermería, de laboratorio y de apoyo sanitario que está en la trinchera de la batalla contra la pandemia, en condiciones de trabajo extremas.

La primera parte del curso consiste en una introducción al análisis de funciones de variable compleja, es decir: el estudio de los conceptos de límite, continuidad, derivabilidad e integración de funciones $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas en dominios $D \subseteq \mathbb{C}$. En cuanto a límites y continuidad, no hay novedades en cuanto a lo que se estudió en Análisis Matemático II, pues identificando cada complejo $z = x + iy$ con el punto (x, y) del plano real, cada función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ puede verse (de hecho lo es) como un campo vectorial en $\Re^2$. Se trata de un cambio sencillo de notación: si para cada $x + iy \in D$ indicamos con $u(x, y)$ y $v(x, y)$ la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de $f(x + iy)$, es decir: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, tenemos el campo vectorial $\vec{f}: D \longrightarrow \Re^2$ en el dominio $D \subseteq \Re^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Algo curioso: en análisis de variable compleja es tradición universal utilizar las letras *u* y *v* para las partes real e imaginaria de una función de variable compleja, mientras que en el análisis a varias variables, las componentes de un campo en el plano suelen indicarse con *P* y *Q*.

De este modo, vemos que la única diferencia inicial entre una función de variable compleja y un campo vectorial plano es una cuestión de notación. Para todo lo que sea el estudio de límites y continuidad, vale todo exactamente lo mismo para funciones de variable compleja que para campos planos. Pero la diferencia entre las dos teorías comienza con el concepto de derivabilidad, y la diferencia es abismal. En el plano ($\mathbb{C}$, identificado con $\Re^2$) existe una operación con propiedades maravillosas que no existe en ningún otro espacio $\Re^n$: el producto de números complejos. Esta multiplicación tiene las mismas hermosas propiedades del producto de números reales que permiten operar aritméticamente de la misma manera. Más aún: es conocido el hecho de que en los complejos se pueden resolver ecuaciones que no tienen soluciones reales. [Digresión: algo se pierde, como siempre. Lo que se pierde al pasar de los reales a los complejos es la relación de orden compatible con las operaciones aritméticas: no existen complejos positivos y complejos negativos]. En particular, todo complejo distinto de cero tiene inverso, lo que permite dividir complejos y esto a su vez permite definir cocientes incrementales $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Como por otra parte ya heredamos la teoría de límites, podemos plantear la existencia (o no) del límite $\underset{z \longrightarrow z_0}{Lim} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ (cuando lleguemos a ese momento, los dominios de las funciones que tomaremos en cuenta serán abiertos, por razones que aclararemos en su momento). ¿Le suena conocido? Y sí, apareció la derivada… Pero no como derivada parcial de una función de varias variables reales, si no como una derivada de una función de una variable, como en Análisis I. Y efectivamente, a partir de este momento, el análisis de variable compleja se parece mucho más a nuestro añorado Análisis I, por lo menos en lo que a derivabilidad se trate (exceptuando todo lo relacionado a funciones crecientes o decrecientes y cálculo de máximos y mínimos: recordemos que no existe relación de orden aritmético entre complejos). Aquí aparece otra diferencia, más sutil, y un nombre muy raro. Las funciones de variable compleja más interesantes son las que son derivables en todos los puntos de un abierto, y éstas se denominan *holomorfas*, término extraño si los hay… Luego de desarrollar la teoría básica de estas funciones llegamos a la parte de integración, donde vamos a volver, de nuevo al Análisis II. Las integrales de variable compleja van a ser, sencillamente, las integrales de línea de los campos vectoriales asociados. Pero cuando estudiamos estas integrales en el caso de funciones holomorfas, nos encontramos con una de las teorías más poderosas, sorprendentes y hermosas que la mente humana ha creado en toda su historia. Esta teoría, en el nivel que se estudia en las carreras de ingeniería, fue desarrollada en su totalidad en el siglo XIX. Una de las aplicaciones inmediatas que veremos, promediando el curso, es el cálculo de integrales impropias, lo que a su vez se aplica en el cálculo de transformadas de Fourier (a continuación).

La segunda parte de la materia es un compacto de análisis armónico y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: series de Fourier, transformadas de Fourier, tranformadas de Laplace y aplicaciones a la resolución de algunas ecuaciones básicas: ecuación de Laplace, ecuación de ondas y ecuación de difusión del calor.

Hay un aspecto que no debemos perder de vista. Estos temas son inmensos. Por ejemplo: las ecuaciones diferenciales mencionadas (y otras más) han sido extensamente estudiadas por Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Poisson, Dirichlet …. (la lista es extensa e ilustre) y hay problemas relacionados con estas ecuaciones que siguen sin resolverse. Por lo tanto, si alguien se para delante de ustedes y les dice: “Yo sé todo sobre ecuaciones diferenciales”, pueden asumir sin ninguna duda de que es un mitómano (salvo que arriba de su cabeza flote un triángulo luminoso…). Lo que veremos en este curso es una pequeña lista de las ecuaciones clásicas y un par de métodos para resolverlas.

Ahora, para terminar esta presentación, un par de recomendaciones:

***Recomendación* 1**: Lo primero que tiene que hacer un alumno para aprender un tema es estudiar y entender cabalmente las definiciones de los conceptos básicos con los que va a trabajar. Hace veinte años, esta recomendación era absolutamente innecesaria, pero nos fuimos encontrando con sorpresa con alumnos que calculan con maravillosa eficiencia las dimensiones de algunos subespacios vectoriales – por ejemplo – sin saber qué es un subespacio vectorial (menos puede saber lo que significa su dimensión). Tal vez este tipo de actitudes pueden permitirse (aunque lo dudo) en otras disciplinas, pero no se puede concebir que un ingeniero hable, opine y diserte sobre un objeto que no conoce. Sería muy importante, entonces, que el alumno entienda que tiene que ser capaz de dar una definición precisa de cada objeto o concepto que está estudiando, y que la precisión requerida es una virtud del lenguaje, que a veces puede consistir en símbolos matemáticos, pero que en última instancia puede expresarse en nuestra maravillosa lengua castellana. En este sentido, personalmente voy a pedirles, implorarles, que no maltraten nuestro idioma. Nos encontramos en los exámenes con errores de ortografía que no se pueden permitir en ningún estudiante universitario, sea de ingeniería, medicina o matemática. Para terminar con esta primera recomendación: una definición no es un manual de procedimientos. Por ejemplo: la definición de máximo local de una función no es "cuando agarro y derivo y me da cero"…. Más allá de que una función puede tener extremos locales sin ser derivable, esta "definición" es parecida a la que se puede dar de una mesa: "es cuando quiero almorzar". Hay que distinguir *definiciones* de *teoremas* (o propiedades, en general). Un último ejemplo: *Definición*: *una función* $f : I \longrightarrow \Re$, *definida en un intervalo real I, es estrictamente creciente si y solo si para cada par de puntos a y b del intervalo I tales que a < b, se verifica que* $f(a) < f(b)$. Ahora tenemos, por ejemplo, el siguiente *Teorema*: *si* $f : I \longrightarrow \Re$ *es una función derivable en el intervalo abierto I, y para cada x en dicho intervalo se verifica* $f'(x)$, *entonces* f *es estrictamente creciente en I.* Este teorema es consecuencia inmediata del teorema del valor medio (versión Lagrange) y puede presentarse como *corolario* del mismo o como una *proposición*. Pero en cualquier caso, se trata de una propiedad de las funciones con derivadas positivas en intervalos abiertos, no es la definición de función estrictamente creciente. Ya que estamos, la recíproca de esta propiedad no es cierta, como puede comprobarse con la función cúbica. [Fin de la primera recomendación]

***Recomendación* 2**: Repasar detenidamente algunos temas de Análisis I y II:

(a) sucesiones y series

(b) integrales de línea y campos conservativos, especialmente en el plano.

Por ahora es todo. Un cordial saludo. Daniel

Buenos Aires

Idus de marzo 2020