Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

D. Prelat – 2020

CLASE 0

El nombre y el contenido de este apuntecito requiere una explicación. Se trata de una clase introductoria que comencé a implementar en mis clases cuando me di cuenta (hace ya varios años) que muchos alumnos de Análisis Matemático III ignoraban olímpicamente la milenaria fórmula para las potencias de un binomio. Para muchos de ellos, esta es la última materia de matemática de su carrera y por lo tanto podrían recibir el título de ingeniería sin conocer dicha fórmula, que hasta hace un par de decenios se enseñaba en el secundario (desconozco cuándo y por qué motivos se dejó de enseñar, aunque se pueda conjeturar con bastante certeza al respecto).

Los números combinatorios y su utilización en el desarrollo de las potencias enteras positivas de un binomio eran conocidos en la antigua Persia hace más de mil años. Curiosamente, esta fórmula se popularizó el nombre de *binomio de Newton*, lo que implica un par de errores históricos. El primero está relacionado con lo que acabamos de mencionar: la fórmula era conocida seis siglos antes de que Isaac Newton naciera. El segundo: lo que Newton hizo con esta fórmula fue generalizarla a exponentes no enteros.

Finalmente: la razón por la cual se introduce este tema en la primera clase de este curso es porque el desarrollo de las potencias enteras positivas de un binomio se necesita para entender la propiedad algebraica fundamental de la función exponencial. Si bien puede probarse utilizando algún teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales, en mi opinión la mejor manera de comprenderla es utilizar las herramientas algebraicas básicas, que un alumno de ingeniería no puede desconocer.

El alumno puede saltearse toda la lectura de este apunte y memorizar directamente las siguientes definiciones, propiedades y fórmulas.

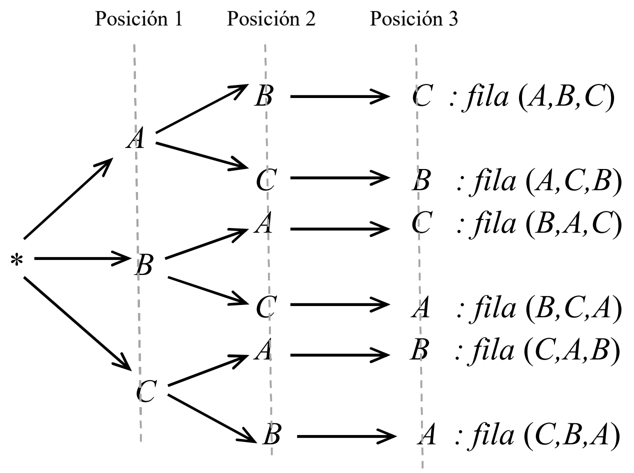
(1) Números combinatorios: $\binom{n}{k} \overset{definición}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde n y k son números enteros tales que $0 \le k \le n$. Combinatoriamente, es la cantidad de combinaciones de n elementos tomados de a k sin repetición. Se pueden ordenar en disposición triangular, dando origen al triángulo de Pascal.

(2) Potencias de un binomio: para cada par de números reales o complejos vale la igualdad $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

(3) Fórmula de Euler: para cada número real θ vale la igualdad $e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$. Probablemente usted está familiarizado con las funciones que aparecen en el segundo miembro de la igualdad, aunque sospecho que estaría en problemas si se le preguntara cuáles son las <u>definiciones</u> de las funciones seno y coseno. En cuanto a la exponencial del primer miembro, puede llamarle la atención de la aparición de la unidad imaginaria. Si quiere entender el significado de la exponencial de un número imaginario (o complejo, en general), puede dirigirse a la sección 3. Una de las propiedades fundamentales de esta función (a saber: $e^{z+w} = e^z e^w$, para cualquier par de complejos) se entiende utilizando la fórmula del ítem 2, que para eso la repasamos. Hay formas de probar esa propiedad que no utilizan la fórmula del ítem 2, pero requieren herramientas mucho más sofisticadas, como la unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

§1) Factoriales y números combinatorios. El triángulo satánico.

Alicia, Beatriz y Carolina eran tres amigas que compartían el gusto por la literatura esotérica. En una de sus lecturas, encontraron la siguiente predicción sumeria: *El covid 19 desaparecerá de la faz de la tierra cuando los 24 sabios de la tribu formen la última fila en la pradera sagrada* (la fuente no era muy confiable…). Alicia y Beatriz se pusieron contentas, imaginando un futuro próximo libre de flagelos virales. Pero Carolina, que ya había cursado Matemática Discreta y Proba, no era tan optimista. Lo que sigue es cita casi textual de lo que explicó Carolina a sus amigas. "Para intentar calcular el tiempo que tardarían los sabios en formar todas las filas posibles, lo primero que hay que hacer es conocer cuántas son estas posibles filas. Comencemos con un ejemplo más chiquito: nosotras tres. Podemos visualizar un procedimiento para saber cuántas filas podemos formar nosotras tres de la siguiente manera" (hizo un dibujo en la pared):



"Las letras son las iniciales de nuestros nombres y hay dos maneras de contar todas las filas que podemos formar: la trivial es contar directamente cuántas son las últimas flechitas (las horizontales, las que apuntan hacia las terceras posiciones). Esta forma de contar puede ser eficiente en este caso, pero si uno imagina el mismo diagrama de árbol con 24 letras (las iniciales de los nombres de los sabios), no solo parece complicado contar las filas de esta manera, sino que el diagrama mismo parecería imposible de realizar (esta es una de las inmensas ventajas de la imaginación). La forma más astuta de contar, en este caso, es observar que hay tres flechitas en el primer paso; luego, en el segundo, hay dos flechitas que salen de cada una de estas tres, por lo tanto hay $2+2+2=3\times 2$ segundas posiciones posibles. Finalmente, para cada una de éstas, hay una, por lo tanto la cuenta final es $3\times 2\times 1$ (las seis filas que figuran en el final del diagrama). Ahora, podemos imaginar (si ustedes quieren hacerlo, comiencen con mucha paciencia y bastante tiempo) un diagrama para los 24 sabios de la tribu: para la primera posición hay 24 posibles elecciones (24 primeras flechitas), para la segunda posición, hay 23 flechitas posibles para cada una de las primeras elecciones posibles. Por lo tanto, vamos con 24×23 segundas posiciones posibles. Ahora pueden ya imaginar ustedes cómo sigue: $24\times 23\times 22$ terceras posiciones posibles, etc. El total de filas posibles es entonces

$$24\times 23\times 22\times 21\times 20\times ...\times 3\times 2\times 1$$

Este número se abrevia con el símbolo 24! y se lee "veinticuatro factorial" o "factorial de veinticuatro" y es igual a 620.448.401.733.239.439.360.000. Para apreciar su magnitud, observemos que es mayor que 6×10^{23}. Supongamos que los 24 sabios son muy rápidos y tardan un minuto en formar cada fila y se pasan las 24 horas del día haciendo esto (se entrenaron mucho…). Resulta que tardarían unos 110 milenios (por lo menos) en formar todas las filas". Luego de un silencio deprimente, Alicia preguntó: "¿y si tuvieran que formar filas más cortas, digamos de 10 posiciones?" Carolina respondió: "Esa cuenta es fácil de hacer si volvemos a imaginar el diagrama: para la primera posición hay 24, para la segunda 23 (para cada una de las primeras), para la tercera 22 (para cada una de las segundas) y así sucesivamente hasta llegar a la posición 10, y no seguimos, pues ya tenemos todas las filas de 10 sabios:

$$\overbrace{24\times 23\times 22\times 21\times 20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15}^{10\ posiciones}$$

Es decir: 99.638.080.819.200. Sigue siendo muy grande…" En ese momento intervino Beatriz, recordando otra profecía análoga, donde los que formaban filas eran los 11 jugadores de Deportivo Paseo Colón, y que las filas eran de cinco cada una (parece que terminaron dedicándose al fútbol 5…). Para sus amigas era obvio que no había que repetir todo el razonamiento, sino reemplazar 24 por 11 y 10 por 5. Pero Carolina, que se veía venir otros casos mitológicos, hizo algo mucho más práctico, algo que hacen los matemáticos desde hace siglos: generalizar. "Veamos: dados n individuos, ¿cuántas filas de k posiciones pueden formar? Desde luego, este número k debe ser menor o igual que n (si hay más posiciones que individuos, alguno tendría que ubicarse en más de dos lugares distintos… pensarlo. Esta es una variante del famoso "principio de las casillas" o "principio del palomar"). Con todos estos n individuos se pueden formar – ya sabemos – $n!= n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 3\times 2\times 1$ filas distintas con todos ellos . Ahora, filas de k posiciones:

$$\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-(k-1))}^{k\ posiciones}$$

Esta cantidad se puede expresar más cómodamente utilizando la notación factorial:

$$\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-(k-1))}^{k\ posiciones} =$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times...(n-k+1)\times\overbrace{(n-k)\times(n-k-1)\times...\times 3\times 2\times 1}^{(n-k)!}}{(n-k)\times(n-k-1)\times...\times 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Por lo tanto, en el caso planteado por Beatriz, la cantidad es

$$\frac{11!}{(11-5)!} = 11\times 10\times 9\times 8\times 7 = 55.440$$

Calculando a una fila por medio segundo (los jugadores son más rápidos para estos menesteres que los viejitos de la tribu), tardarían menos de 20 días para formarlas todas (suponiendo, otra vez, que en esos 20 días no hacen otra cosa)." La conclusión de las tres amigas fue bastante esperable: la mitología de los arrabales porteños es muy superior a la de la antigua sumeria, por lo menos en cuanto a su eficiencia para erradicar las pestes.

Alicia y Beatriz se anotaron en el curso de Matemática Discreta a cargo del célebre y sabio von Stahl, por consejo de Carolina. Allí (y lo volvieron a ver en Proba) aprendieron que las distintas filas o secuencias ordenadas se denominan "permutaciones" (ya sabían que la cantidad de estas permutaciones es el factorial de la cantidad de objetos), aprendieron que las filas de k posiciones que se pueden formar con n individuos se denominan "variaciones de n objetos tomados de a k", entendidas como "muestras ordenadas y sin repetición" de tamaño k elegidas de una población de n objetos o individuos distintos. También aprendieron a contar la cantidad de estas muestras si no interesa el orden en que se eligen los objetos, es decir: en lugar de "filas", se consideran "grupos" o conjuntos donde el orden no distingue selecciones. La notación, crucial para los razonamientos que siguen, que distingue los conjuntos de las secuencias ordenadas es la utilizada hace ya más de un siglo: $(x_1, x_2, ..., x_k)$ indica una secuencia ordenada y $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un conjunto. Estos conjuntos se denominan "combinaciones sin repetición de n objetos tomados de a k". Supongamos que queremos calcular la cantidad $C(n,k)$ de tales combinaciones. Para cada una de estas combinaciones $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ podemos formar $k!$ secuencias ordenadas (filas): recordemos que en $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ no hay elementos repetidos. Y puede verse (pensarlo) que distintos conjuntos $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ producen secuencias ordenadas distintas: dos secuencias $(x_1, x_2, ..., x_k)$, $(y_1, y_2, ..., y_k)$, son distintas si y solamente si tienen elementos distintos o bien si tienen los mismos elementos en distinto orden. Un ejemplo chiquito:

Combinaciones de cinco objetos a, b, c, d, e tomados (elegidos) de a tres (también llamadas "combinaciones ternarias"): en la primera columna están todas las combinaciones posibles de estos objetos tomados de a tres. Hacer la lista completa en menos de un milenio es posible porque el ejemplo es "chico". Ahora, para cada una de estas combinaciones hemos escrito en la fila todas las permutaciones de los tres elementos involucrados:

combinaciones			variaciones			
$\{a,b,c\}$	(a,b,c)	(a,c,b)	(b,a,c)	(b,c,a)	(c,a,b)	(c,b,a)
$\{a,b,d\}$	(a,b,d)	(a,d,b)	(b,a,d)	(b,d,a)	(d,a,b)	(d,b,a)
$\{a,b,e\}$	(a,b,e)	(a,e,b)	(b,a,e)	(b,e,a)	(e,a,b)	(e,b,a)
$\{a,c,d\}$	(a,c,d)	(a,d,c)	(c,a,d)	(c,d,a)	(d,a,c)	(d,a,c)
$\{a,c,e\}$	(a,c,e)	(a,e,c)	(c,a,e)	(c,e,a)	(e,a,c)	(e,c,a)
$\{a,d,e\}$	(a,d,e)	(a,e,d)	(d,a,e)	(d,e,a)	(e,a,d)	(e,d,a)
$\{b,c,d\}$	(b,c,d)	(b,d,c)	(c,b,d)	(c,d,b)	(d,b,c)	(d,c,b)
$\{b,c,e\}$	(b,c,e)	(b,e,c)	(c,b,e)	(c,e,b)	(e,b,c)	(e,c,b)
$\{b,d,e\}$	(b,d,e)	(b,e,d)	(d,b,e)	(d,e,b)	(e,b,d)	(e,d,b)
$\{c,d,e\}$	(c,d,e)	(c,e,d)	(d,c,e)	(d,e,c)	(e,c,d)	(e,d,c)

Puede verse que las variaciones de la tabla son todas distintas y que son todas las posibles: en cada fila se encuentran las variaciones de los mismos tres elementos elegidos en la primera columna, y entre cada fila y la siguiente hay un elemento distinto. Claramente, la cantidad $C(5,3)$ de combinaciones, que es la cantidad de filas de la tabla, multiplicada por $3!$ es la cantidad de variaciones, número que ya conocemos sin necesidad de contarlas:

$$C(5,3)\times 3! = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Por lo tanto, $C(5,3)=\dfrac{5!}{3!(5-3)!}$. Imaginando una tabla como la que hicimos para este ejemplo, pero en general para cualquier cantidad *n* de objetos y cualquier tamaño $k \le n$ de selección de muestras:

$$C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Estos numeritos se denominan *combinatorios*, como era de esperar, y se indican con un símbolo extraño (aunque no tan extraño como el símbolo factorial) que tiene una destacada alcurnia de varios siglos:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (*1)$$

Así como el factorial se extiende a 0 (0! = 1 por definición, sin ningún sentido combinatorio pero muy natural como se verá enseguida), estos números combinatorios están bien definidos para cualquier par de enteros *n* y *k* tales que $0 \le k \le n$. Son muy sencillas de probar las siguientes propiedades:

Primeras propiedades de los números combinatorios: para todo par de enteros *n* y *k* tales que $0 \le k \le n$, se verifican las siguientes igualdades:

i) $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ *ii*) $\binom{n}{0}\overset{(i)}{=}\binom{n}{n}=1$ *iii*) $\binom{n}{1}\overset{(i)}{=}\binom{n}{n-1}=n$

iv) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ (aquí debe ser $1 \le k \le n$)

La primera propiedad es una propiedad de simetría que se utiliza en el enunciado de las dos siguientes y tiene un sentido combinatorio muy claro: cada vez que uno elige *k* objetos de un conjunto de *n* de ellos, está eligiendo *n* – *k* objetos: los descartados. La segunda igualdad de *ii*) es combinatoriamente obvia, así como la propiedad *iii*). La que no tiene ningún sentido combinatorio evidente es la cuarta, que curiosamente es clave para la construcción siguiente: el triángulo de Pascal (siglo XVII), aunque esta construcción y el uso que le daremos en el ítem siguiente ya eran conocidas desde el siglo II, por lo menos. La idea es muy sencilla: ubicar los números combinatorios en un triángulo infinito de la siguiente manera:

$$\begin{matrix}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{matrix} \qquad (*2)$$

Es decir: para cada número combinatorio $\binom{n}{k}$, *n* indica su "nivel" o altura en el triángulo, siendo 0 el nivel más alto. Luego, puesto que $0 \le k \le n$, cada nivel *n* consta de *n* +1 números combinatorios distintos: $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \ldots\ \binom{n}{n}$. La propiedad *i*) de los números combinatorios indica que el triángulo (*2) es simétrico respecto de la línea vertical que pasa por $\binom{0}{0}$. La propiedad *ii*) significa que todos los elementos de la periferia (ojo que el triángulo no tiene base) valen 1, mientras que la propiedad *ii*) …. (visualícela usted mismo en el triángulo). Pero aquí es donde la propiedad *iv*) comienza a lucirse: el combinatorio $\binom{n+1}{k}$ del nivel *n* + 1 es la suma de los dos combinatorios que tiene "justo arriba". Por ejemplo: tomemos *n* = 4 y *k* = 3. Según la propiedad *iv*): $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$. Observe ahora la ubicación de estos tres números combinatorios en el triángulo (*2). Estas sencillas propiedades permiten construir el triángulo sin calcular los combinatorios involucrados: comenzamos poniendo todos los 1 del borde y luego sumamos de a pares contiguos desde los niveles superiores para ir obteniendo los de los niveles siguientes:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Y se puede seguir con notable facilidad y rapidez con los siguientes niveles. Obsérvese que los niveles quedan etiquetados con el segundo elemento de cada fila. Para comprobar su eficacia, le propongo que calcule $\binom{7}{3}$ utilizando la definición (y sin calculadora) y luego utilice el triángulo (debe llegar hasta el nivel 7…). Una vez más, uno comprueba que a lo largo de los siglos hubo gente muy piola, muy astuta, muy inteligente, dedicada cosas "inútiles" como esta. Este triángulo, que tiene más nombres que el Diablo, goza de una popularidad sorprendente y se ha utilizado para macanear de lo lindo. Tiene, realmente, propiedades muy curiosas, pero no se trata de la Piedra Filosofal. Veremos a continuación la aplicación práctica que le dieron nuestros ancestros.

§2) Potencias de un binomio.

El término binomio, a pesar de que parece un término botánico, designa cualquier suma de cualquier par de cosas. A nosotros nos interesa el caso de la suma de números (reales o complejos), pero el concepto se puede extender a la suma de dos matrices, dos funciones, dos vectores, etc. Indicaremos con $a + b$ un binomio cualquiera donde a y b son dos números complejos, y en lo que sigue n es un número entero positivo cualquiera. Desde hace varios siglos, alguna gente involucrada con la aritmética estudió la manera de expresar las potencias $(a+b)^n$ en sumas de monomios (este parece un término zoológico…pero no voy a entrar en detalles), es decir: se trata de "sacar los paréntesis". En el caso en que n es chiquito, por ejemplo n = 2, la cuenta es muy sencilla: basta distribuir $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. En el último paso utilizamos la conmutatividad del producto de números complejos, pero si a y b fueran matrices, por ejemplo, este último paso no sería válido en general. Pero volviendo a nuestros numeritos, este tipo de cuentas, que hacían algunos hombres hace cuatro milenios y nosotros en nuestra infancia, se comienzan a hacer muy largas a medida que n crece (los números naturales tienen cierta tendencia a crecer cuando uno menos lo necesita). En estos casos, aparecen los vagos inteligentes que intentan ahorrarse el esfuerzo y razonan, por ejemplo de esta manera: aplicando la distributividad del producto respecto de la suma en la siguiente expresión

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)}^{n\ factores} \qquad (*3)$$

observamos (la imaginación es clave en estos casos) que se obtienen términos de la forma $\overbrace{aaa...a}^{m\ veces}\overbrace{bbb...b}^{k\ veces} = a^m b^k$, donde el número m es la cantidad de factores de (*3) donde elegimos la a y k es la cantidad donde elegimos la b. Puesto que no se pueden elegir la a y la b en el mismo factor y la cantidad total de factores es n, resulta que $k + m = n$, por lo tanto los términos son de la forma $a^{n-k}b^k$. Ahora bien: cada uno de estos términos aparecen repetidamente. Por ejemplo: eligiendo la b en el primero, segundo y tercero obtenemos $a^{n-3}b^3$; eligiendo la b en el segundo, cuarto y séptimo, también obtenemos $a^{n-3}b^3$. ¿Cuántas veces va a aparecer este término en el desarrollo de (*3) como suma de monomios? Veamos: tenemos que elegir tres factores de los n (para "sacarle" la b), no podemos repetir la elección del factor y no interesa el orden en que elijamos los factores, pues el producto es conmutativo. Ahora bien, la cantidad de estas elecciones las vimos en el ítem anterior: es el combinatorio $\binom{n}{3}$, la cantidad de combinaciones sin repetición de n objetos (en este caso: factores) elegidos de tres. Por lo tanto, eligiendo 3 b en los n factores vamos a encontrar el sumando $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$, y la potencia b^3 no vuelve a aparecer. Análogamente, para cada $k \in \{0,1,2,...,n\}$ el producto $a^{n-k}b^k$ aparece exactamente $\binom{n}{k}$ veces, produciendo el término $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Observe, en particular, los casos $k = 0$ y $k = n$. Aquí, la igualdad $\binom{n}{0} = 1$ sí tiene un sentido combinatorio: al no elegir ninguna b de ninguno de los factores (*3), nos queda el término $\binom{n}{0}a^{n-0}b^0 = a^n$, como era de esperar. En definitiva, encontramos el desarrollo

$$(a+b)^n =$$
$$= \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^{n-0} \qquad (*4)$$

O bien, en notación más compacta:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (*4bis)$$

Esta es la famosa fórmula conocida popularmente como “binomio de Newton”. En realidad, era conocida diez siglos antes de que Newton naciera, y lo que Newton encontró es una fórmula para potencias no enteras de un binomio (Don Isaac no podía quedarse quieto y tranquilo en los enteros). Volveremos sobre esto en un ratito. Antes hagamos algunas observaciones:

***Observación* 1**: si en lugar de elegir la *b* en los factores de (*3) elegimos la *a*, obtenemos

$$(a+b)^n =$$
$$=\binom{n}{0}a^0b^{n-0}+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+...+\binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{n}a^{n-0}b^0$$

Obviamente, esta suma es igual a (*4), como se deduce de la simetría $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ de los números combinatorios. Por otra parte, no quedaba otra posibilidad, dado que la suma debe ser simétrica respecto del cambio de *a* por *b*, pues $(a+b)^n=(b+a)^n$ (creo que estamos de acuerdo en esto…)

***Observación* 2:** Los coeficientes que aparecen en la suma (*4) son los combinatorios de nivel *n*, es decir: los números de la fila *n* del triángulo diabólico. Esta es la razón práctica principal por la que nuestros ancestros utilizaban el triángulo. Por ejemplo, para desarrollar $(a+b)^6$ necesitamos el nivel 6:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
\text{………..……………}
\end{array}$$

Entonces, $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$. Otro ejemplo, ya que tenemos el nivel 5 a la vista (y recordando que $i^2=-1$, de donde se deduce, multiplicando ambos miembros por *i*, que $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, …):

$$(3+2i)^5=3^5+5\times3^4\times(2i)+10\times3^3\times(2i)^2+10\times3^2\times(2i)^3+5\times3\times(2i)^4+(2i)^5=$$
$$=\overbrace{3^5}^{243}+\overbrace{(5\times3^4\times2)}^{810}\,i-\overbrace{10\times3^3\times2^2}^{1080}-\overbrace{(10\times3^2\times2^3)}^{720}\,i+\overbrace{5\times3\times2^4}^{240}+\overbrace{2^5}^{32}\,i=$$
$$=-597+122i$$

Desde ya que hay otras maneras de calcular las potencias de un complejo, más eficientes para exponentes más grandes, pero que requieren el uso de herramientas trigonométricas que veremos en el ítem siguiente.

***Observación* 3:** Otra forma de deducir la fórmula (*4), probablemente utilizada por Newton, requiere el conocimiento (y la fe….) de la fórmula de Taylor, herramienta mucho más sofisticada que las puramente aritméticas utilizadas hasta aquí. Por otra parte, el razonamiento que sigue vale para binomios de números reales. Para incluir a los binomios de números complejos, necesitaríamos casi la mitad del curso de Análisis Matemático III… Recordemos que dada una función $f : I \to \Re$ de clase C^m en un intervalo abierto $I \subseteq \Re$, para cada par de elementos x_0 y x en dicho intervalo existe un número $\theta \in [0,1]$ (que no es único en general y que depende de los puntos x_0 y x) tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \tfrac{1}{m!} f^{(m)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^m \qquad (*5)$$

Antes de seguir, mi experiencia indica que debo insistir que esta igualdad es <u>exacta</u>, no aproximada. La sumatoria del segundo miembro de (*5) es el polinomio de Taylor de f de orden $m-1$ centrado en x_0, y el término restante es el popularmente conocido "término complementario", que como puede verse mediante un sencillo pasaje de término, es exactamente la diferencia entre el valor de la función en el punto x_0 y el valor del polinomio de Taylor en el mismo punto. Si este término complementario es "chiquito" – expresión que requiere un poco más de precisión y en general tiene sentido cuando x y x_0 están "cerquita" – entonces el valor del polinomio de Taylor no difiere "muchito" (para seguir con los diminutivos) del valor exacto de la función. Por lo tanto, la "igualdad aproximada" consiste en (*5) <u>sin</u> el término complementario. Pero nosotros no vamos a utilizar estos polinomios para cálculos aproximados. Consideraremos la función $f : \Re \to \Re$ tal que $f(x) = (a + x)^n$, donde a es un número real fijo y n un entero positivo, también fijo (la variable es x …). Se trata de una función polinómica y por lo tanto de clase C^∞. Más aún: sus derivadas de orden superior a n son idénticamente nulas, pues n es el grado de este polinomio. Entonces, si en la fórmula (*5) elegimos $m = n + 1$ y $x_0 = 0$ obtenemos para cualquier $x \in \Re$:

$$(a + x)^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \tfrac{1}{(n+1)!} \overbrace{f^{(n+1)}(\theta x)}^{=0} x^{n+1} \qquad (*6)$$

La anulación del término complementario no debe causar sorpresa en este caso: ¿cuál es la mejor aproximación polinómica de grado n de un polinomio de grado n? Ahora, solo nos queda por calcular las derivadas sucesivas de f en 0:

$f(x) = (a+x)^n \quad , \quad f(0) = a^n$

$f'(x) = n(a+x)^{n-1} \quad , \quad f'(0) = na^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2} \quad , \quad f''(0) = n(n-1)a^{n-2}$

$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3} \quad , \quad f^{(3)}(0) = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$

… en general:

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))(a+x)^{n-k},$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))a^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$$

…. hasta la última no nula:

$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0) = n!$

reemplazando en (*6) reencontramos nuestra vieja y buena fórmula:

$$(a+x)^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \tfrac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k$$

Antes de partir hacia el nuevo destino, permítanme una pequeña digresión: esta misma cuenta puede hacerse aunque el exponente n no sea entero, lo que requiere cambiar la notación de los coeficientes y reemplazar la sumatoria finita por una serie o restablecer el término complementario, pues si el exponente no es entero, la función no es polinómica. Lo que se obtiene es

$$(a+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(k-1))}{k!} a^{\lambda-k}x^k$$

para cualquier real positivo λ y ¿cualquier x? Cuidado: analice la convergencia de la serie antes de responder. Esta fórmula es mucho más sofisticada que la (*4), evidentemente, y no podía ser obtenida sin los métodos del cálculo infinitesimal desarrollados a partir del siglo XVII. En realidad, ésta última es la que merece ser llamada “binomio de Newton”.

§3) La maravillosa fórmula de Euler y un amor imposible.

Y sí, debo confesar que se trata de uno de mis amores imposibles. Pido disculpas por la auto-referencia (disculpas que parecen estar de moda), pero es así y ya no puedo cambiarlo. Comencemos con tres funciones que ustedes conocen desde su más tierna infancia, digamos desde salita naranja: e^x, sen(x) y cos(x). Bien. ¿Cómo se definen? Si nos pregunta una tía (esa que prepara unas milanesas espectaculares) qué son esas funciones, ¿qué le respondemos? Ella se caracteriza por la precisión (sobre todo con el pan rallado) y de nuestra respuesta depende el acceso a su cocina maravillosa. Pues bien, sugiero responder lo siguiente (no hay muchas posibilidades)

$$
\begin{aligned}
e^x &\overset{\textit{definición}}{=} 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}x^k \\
sen(x) &\overset{\textit{definición}}{=} x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos(x) &\overset{\textit{definición}}{=} 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}
\tag{*7}
$$

La pregunta de la tía se ve venir: ¿para qué valores de x convergen estas series? Es decir: ¿cuáles son los dominios de las funciones definidas por las fórmulas (*7)? Ya estamos cerca del manjar y nos entusiasmamos recordando nuestros primeros pasos con las sucesiones y las series: “Las tres series convergen para todo x real, tía, y por lo tanto definen tres funciones en toda la recta real”. La tía se da por satisfecha y nos vemos recompensados por nuestros conocimientos. Ahora volvemos a la realidad virtual y nos encontramos con Euler, siglo XVII, en Suiza, el padre de la primera de las tres funciones en cuestión. Un día, después de cenar estaba aburrido y se sentó en su escritorio (no había tv ni whatsapp en esa época) y se le ocurrió poner un número complejo cualquiera en lugar de la x. Supongamos que utilizó la notación $z = x + yi$. Lo que le quedó es, entonces:

$$e^{x+yi} = 1 + x + yi + \tfrac{1}{2}(x+yi)^2 + \tfrac{1}{3!}(x+yi)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(x+yi)^k$$

Una expresión bastante insulsa si no fuera por la sospecha de que $e^{x+yi} = e^x e^{yi}$. Dejaremos de lado en los próximos pasos que siguen toda cuestión de convergencia para escribir una presentación informal de la exponencial compleja y sus propiedades básicas. Si usted siente reparos (son reparos correctos) sobre la validez de los pasos que vamos a efectuar, seguramente es un matemático infiltrado en el curso. Pero como yo también soy matemático (intento serlo), lo voy a tranquilizar: todas las series involucradas son series de potencias absolutamente convergentes en todo el plano complejo y por lo tanto son válidas las operaciones que vamos a efectuar. Si usted no puede esperar a ver las demostraciones de estas afirmaciones, puede consultar, por ejemplo, el maravilloso libro *Complex Analysis*, de E. Stein y R. Shakarchi, (Princeton University Press, 2007). Mientras tanto, le sugiero que intente divertirse un poco con lo que sigue. Ante cualquier fragmento de la obra matemática Euleriana es difícil no sentir una admiración comparable a la que se siente ante una sinfonía de Mozart, por ejemplo.

Tomemos dos complejos cualesquiera, z y w. Entonces:

$$e^z e^w = (1+z+\tfrac{1}{2!}z^2+\tfrac{1}{3!}z^3+\ldots)(1+w+\tfrac{1}{2!}w^2+\tfrac{1}{3!}w^3+\ldots) =$$

$$\begin{array}{llllllll}
=1+ & w & +\tfrac{1}{2!}w^2 & +\tfrac{1}{3!}w^3 & +\tfrac{1}{4!}w^4 & +\tfrac{1}{5!}w^5 & +\tfrac{1}{6!}w^6 & +\ldots \\
 & +z & +zw & +\tfrac{1}{2!}zw^2 & +\tfrac{1}{3!}zw^3 & +\tfrac{1}{4!}zw^4 & +\tfrac{1}{5!}zw^5 & +\ldots \\
 & & +\tfrac{1}{2!}z^2 & +\tfrac{1}{2!}z^2w & +\tfrac{1}{2!2!}z^2w^2 & +\tfrac{1}{2!3!}z^2w^3 & +\tfrac{1}{2!4!}z^2w^4 & +\ldots \\
 & & & +\tfrac{1}{3!}z^3 & +\tfrac{1}{3!}z^3w & +\tfrac{1}{3!2!}z^3w^2 & +\tfrac{1}{3!3!}z^3w^3 & +\ldots \\
 & & & & +\tfrac{1}{4!}z^4 & +\tfrac{1}{4!}z^4w & +\tfrac{1}{4!2!}z^4w^2 & +\ldots \\
 & & & & & +\tfrac{1}{5!}z^5 & +\tfrac{1}{5!}z^5w & +\ldots \\
 & & & & & & +\tfrac{1}{6!}z^6 & +\ldots
\end{array}$$

Hemos distribuido el producto respecto de las sumas como si fueran sumas finitas. Ésta es una de las operaciones mencionadas que debe justificarse cuidadosamente. Además, hemos encolumnado los términos según los grados, para poder reordenar los términos (otra de las operaciones mencionadas, válida para series absolutamente convergentes). Resulta, poniendo paréntesis innecesarios para indicar el agrupamiento de los términos por grados:

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= 1+(z+w)+(\tfrac{1}{2!}z^2+zw+\tfrac{1}{2!}w^2)+(\tfrac{1}{3!}z^3+\tfrac{1}{2!}z^2w+\tfrac{1}{2!}zw^2+\tfrac{1}{3!}w^3)+ \\
&+(\tfrac{1}{4!}z^4+\tfrac{1}{3!}z^3w+\tfrac{1}{2!2!}z^2w^2+\tfrac{1}{3!}zw^3+\tfrac{1}{4!}w^4)+ \\
&+(\tfrac{1}{5!}z^5+\tfrac{1}{4!}z^4w+\tfrac{1}{3!2!}z^3w^2+\tfrac{1}{2!3!}z^2w^3+\tfrac{1}{4!}zw^4+\tfrac{1}{5!}w^5)+ \\
&+(\tfrac{1}{6!}z^6+\tfrac{1}{5!}z^5w+\tfrac{1}{4!2!}z^4w^2+\tfrac{1}{3!3!}z^3w^3+\tfrac{1}{2!4!}z^2w^4+\tfrac{1}{5!}zw^5+\tfrac{1}{6!}w^6)+\ldots
\end{aligned}$$

Uf! Me cansé de escribir. Todo esto es más sencillo en el pizarrón, pero sigamos. Llegué hasta el término de grado 6 para que quede bien a la vista cómo se van formando los términos de la serie reordenada. Ahora, en el término de grado 2 vamos a sacar factor común $\frac{1}{2!}$, en el de grado 3, factor común $\frac{1}{3!}$, en el de grado cuatro…se entiende. Además, vamos a agregar algunos factoriales innecesarios para el cálculo pero no para la comprensión, como por ejemplo $1!$:

$$e^z e^w = 1 + (z+w) + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{2!}{0!2!}z^2 + \tfrac{2!}{1!1!}zw + \tfrac{2!}{2!0!}w^2\right) + \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3!}{0!3!}z^3 + \tfrac{3!}{1!2!}z^2w + \tfrac{3!}{2!1!}zw^2 + \tfrac{3!}{3!0!}w^3\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{4!}\left(\tfrac{4!}{0!4!}z^4 + \tfrac{4!}{1!3!}z^3w + \tfrac{4!}{2!2!}z^2w^2 + \tfrac{4!}{3!1!}zw^3 + \tfrac{4!}{4!0!}w^4\right) +$$
$$\tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{5!}{0!5!}z^5 + \tfrac{5!}{1!4!}z^4w + \tfrac{5!}{2!3!}z^3w^2 + \tfrac{5!}{3!2!}z^2w^3 + \tfrac{5!}{4!1!}zw^4 + \tfrac{5!}{5!0!}w^5\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{6!}\left(\tfrac{6!}{0!6!}z^6 + \tfrac{6!}{1!5!}z^5w + \tfrac{6!}{2!4!}z^4w^2 + \tfrac{6!}{3!3!}z^3w^3 + \tfrac{6!}{4!2!}z^2w^4 + \tfrac{6!}{5!1!}zw^5 + \tfrac{6!}{6!0!}w^6\right) + \ldots$$

He aquí una hermosa sorpresa: aparecieron los números combinatorios: en el paréntesis de grado2, los combinatorios de nivel 2, en el de tercer grado, los de nivel 3, etc. Y aparecen como coeficientes de los desarrollos de las potencias sucesivas del binomio $z+w$. Por lo tanto, tenemos la identidad fundamental, válida para cualquier par de complejos z y w:

$$e^z e^w = 1 + (z+w) + \tfrac{1}{2!}(z+w)^2 + \tfrac{1}{3!}(z+w)^3 + \tfrac{1}{4!}(z+w)^4 + \ldots = e^{z+w} \qquad (*8)$$

Observación* 4*: Esta propiedad es la que justifica la notación exponencial. Para exponentes enteros ya existía desde la edad media la notación a^n para indicar el producto de a por sí mismo n veces. Entonces, es claro que $a^{n+m} = a^n a^m$ para cualquier par de enteros n y m, pues ambos miembros indican el producto de a por sí mismo $n+m$ veces. El problema comienza cuando el exponente no es entero. Por ejemplo, ¿qué significa la expresión $a^{\sqrt{2}}$? ¿Qué significaría multiplicar a por sí mismo "$\sqrt{2}$ veces " ? Cuando el exponente es racional y la base es positiva, aparecen las raíces, pero cuando el exponente es irracional, la cosa se complica. Se puede resolver utilizando el hecho de que todo real es límite de racionales y argumentos muy delicados de continuidad. Otra es apelar a un truco que parece tramposo pero que es bastante efectivo: definir $a^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(a)}$. Obviamente, esto requiere la definición de la exponencial como hemos hecho y probar la existencia de su inversa, es decir: $\ln : (0,+\infty) \to \Re$.

Momento cultural: Esta deducción que hemos hecho tiene la ventaja de que solamente utiliza las propiedades aritméticas de la suma y el producto de complejos (además de las cuestiones de convergencia que hemos pospuesto). Por lo tanto, la identidad (*8) es válida, por ejemplo, si en lugar de z y w tenemos dos matrices cuadradas A y B que conmutan (es decir: tales que $AB = BA$). La exponencial matricial se define mediante la misma serie que aparece en (*7) y se puede probar su convergencia para cualquier matriz (real o compleja). Aunque usted no lo crea, la exponencial matricial tiene aplicaciones prácticas inmensas.

Ahora, podemos volver al siglo XVIII y comentarle al Sr. Euler que hemos entendido una propiedad muy importante de su exponencial (repetimos: la función exponencial, en todas sus variantes, es de Euler). Entonces, nos hace en el pizarrón las siguientes cuentas (tampoco había aulas virtuales en esa época): primero elige como complejo z a un imaginario puro, digamos $z = i\theta$, donde θ es un real cualquiera (la utilización de $i\theta$ en lugar de θi es cuestión de gusto y costumbre). Entonces:

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \tfrac{1}{2!}i^2\theta^2 + \tfrac{1}{3!}i^3\theta^3 + \tfrac{1}{4!}i^4\theta^4 + \tfrac{1}{5!}i^5\theta^5 + \tfrac{1}{6!}i^6\theta^6 + \ldots = \\
&= 1 + i\theta - \tfrac{1}{2!}\theta^2 - \tfrac{1}{3!}i\theta^3 + \tfrac{1}{4!}\theta^4 + \tfrac{1}{5!}i\theta^5 - \tfrac{1}{6!}\theta^6 - \ldots
\end{aligned}
$$

Separamos parte real y parte imaginaria (nuevamente, estamos operando con “sumas infinitas”, lo que solamente puede hacerse en compañía de un adulto) y obtenemos:

$$
e^{i\theta} = 1 - \tfrac{1}{2!}\theta^2 + \tfrac{1}{4!}\theta^4 - \tfrac{1}{6!}\theta^6 + i(\theta - \tfrac{1}{3!}\theta^3 + \tfrac{1}{5!}\theta^5 - \tfrac{1}{7!}\theta^7 - \ldots)
$$

Nos encontramos sorpresivamente con dos conocidas (ver (*7)): la parte real es $\cos(\theta)$ y la imaginaria $sen(\theta)$, es decir: llegamos a una fórmula que marcó un antes y un después en la historia de la humanidad:

$$
\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)} \qquad (*9)
$$

Las consecuencias y derivaciones de esta fórmula (junto con (*8)) son inmensas y no caben en estas breves notas. Veamos algunas muy básicas:

1) Para todo par de números α y β:

$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = [\cos(\alpha) + isen(\alpha)][\cos(\beta) + isen(\beta)] = \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)\cos(\beta) + i[sen(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)sen(\beta)]
\end{aligned}
$$

Es decir: las populares fórmulas trigonométricas

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \\
sen(\alpha+\beta) &= sen(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)sen(\beta)
\end{aligned}
$$

son consecuencias inmediatas de (*8) y (*9).

2) Mediante la aplicación reiterada de (*8) obtenemos que para cualquier número θ y todo entero positivo n se verifica que $\cos(n\theta)+isen(n\theta)=[\cos(\theta)+isen(\theta)]^n$, pues

$$\cos(n\theta)+isen(n\theta)=e^{in\theta}=e^{i\theta+i\theta+...+i\theta}=e^{i\theta}e^{i\theta}...e^{i\theta}=(e^{i\theta})=[\cos(\theta)+isen(\theta)]^n$$

Si aplicamos ahora la fórmula para las potencias de un binomio,

$$\cos(n\theta)+isen(n\theta)=[\cos(\theta)+isen(\theta)]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\theta)^{n-k}i^k sen(\theta)^k$$

Separando partes real e imaginaria en el último miembro (queda a cargo del interesado) obtenemos expresiones de $\cos(n\theta)$ y $sen(n\theta)$ como polinomios en $\cos(\theta)$ y $sen(\theta)$.

3) De las definiciones (*7) se deduce inmediatamente que la función seno es impar y coseno es par, es decir: para todo x es $sen(-x)=-sen(x)$ y $\cos(-x)=\cos(x)$. Entonces, $e^{-ix}=\cos(-x)+isen(-x)=\cos(x)-isen(x)$. Por lo tanto $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x)$ por un lado y $e^{ix}-e^{-ix}=2isen(x)$, de donde obtenemos

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad sen(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

(si le molesta la unidad imaginaria en un denominador, súbala utilizando la igualdad $\frac{1}{i}=-i$, equivalente a $1=-i^2$) . Estas identidades y las propiedades anteriores muestran claramente que toda la trigonometría puede desarrollarse a partir de la exponencial compleja, indicio – apenas un indicio – de la magia de esta función y del genio inmenso de su creador.

4) Dado un complejo $x+iy$, tenemos $e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x\cos(y)+ie^x sen(y)$, fórmula nada trivial puesto que exhibe la parte real y la parte imaginaria de $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+iy)^k$.

Podríamos seguir largo rato, mencionando por ejemplo que las series (*7) que definen las funciones trigonométricas también pueden extenderse a los números complejos, pero por ahora es suficiente como para una clase 0.

Recomendación bibliográfica del Profesor von Stahl: Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History* (Primera edición ed. New York: Spinger –Verlag, apartado *Euler's Formula and Its Consequences*, p.58 ss.)