Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

BREVE APUNTE SOBRE SERIES DE FOURIER

D. Prelat – 2020

§1. INTRODUCCIÓN.

Juan Bautista es empleado en una pinturería que trabaja exclusivamente la marca de pintura «Fígaro», cuyos colores ya preparados son cincuenta. Indiquemos con $f_1, f_2, ..., f_{50}$ estos colores. La pinturería cuenta, además, con una mezcladora automática de pintura. Llega un cliente y le pide que mezcle dos litros de blanco (color f_1), tres de azul (color f_5), uno y medio de rojo (color f_3) y medio de negro (color f_{42}). Juan Bautista vierte las cantidades indicadas en el mezclador automático y obtiene el color pedido: $2\breve{f}_1 + \frac{3}{2}\breve{f}_3 + 3\breve{f}_5 + \frac{1}{2}\breve{f}_{42}$, (donde para cada $i \in \{1,2,...,50\}$, $\breve{f}_i$ representa un litro del color f_i). Muy sencillo. El cliente se retira muy satisfecho con 7 litros de su color preferido. Pero esta no es la situación habitual, como todos sabemos. El cliente que acaba de retirarse debe ser químico, pintor o lunático (o las tres cosas). Lo más habitual es que el cliente llegue pidiendo, por ejemplo, «diez litros de un verdecito claro tirando a beige pero no muy apagado», y con suerte trae una muestra del color. Indiquemos con φ los diez litros del color que quiere este cliente. La información con la que cuenta ahora Juan Bautista es el color y la cantidad final: $\varphi = c_1\breve{f}_1 + c_2\breve{f}_2 + ... + c_{50}\breve{f}_{50}$, y a partir de φ necesita calcular los coeficientes $c_1, c_2, ..., c_m$. Dicho sea de paso: un primer problema es saber si φ es combinación lineal de $\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}$, es decir, si $\varphi \in gen\{\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}\}$. Por el momento, vamos a suponer que sí. Luego veremos cómo se puede determinar cuál de todos los colores $\psi \in gen\{\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}\}$ es el «más próximo» a φ, que en general es lo que se obtiene en una pinturería. Otro problema que puede presentarse es que podría haber más de una combinación lineal de $\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}$ que permita obtener el mismo φ. Juan Bautista ya cursó álgebra lineal y sabe que si los $\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}$ son linealmente independientes eso no ocurre. Traducido en términos de las pinturas «Fígaro»: si ninguno de los colores f_i puede obtenerse mezclando los otros colores $f_1, f_2, ..., f_{i-i}, f_{i+1}, ..., f_{50}$, entonces cada color $\varphi \in gen\{\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}\}$ puede obtenerse mediante una <u>única</u> combinación lineal $c_1\breve{f}_1 + c_2\breve{f}_2 + ... + c_{50}\breve{f}_{50}$. Este es un buen ejemplo de cómo la independencia lineal se traduce en eficiencia: en la lista $f_1, f_2, ..., f_{50}$ no sobra ningún color. Ahora, volvamos al problema actual de Juan Bautista, suponiendo que efectivamente $\varphi \in gen\{\breve{f}_1, \breve{f}_2, ..., \breve{f}_{50}\}$. ¿Cómo hace para calcular los coeficientes $c_1, c_2, ..., c_m$? Juan Bautista es muy astuto y – como ya mencionamos – ya aprobó Álgebra II. Lo que hizo en el primer día que

le tocó enfrentar este problema es definir un producto interno en $gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$ respecto del cual $\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}$ es un sistema ortogonal. Entonces, cada vez que tiene que calcular los coeficientes $c_1,c_2,...,c_m$ a partir del dato $\varphi = c_1\breve{f}_1 + c_2\breve{f}_2 + ... + c_{50}\breve{f}_{50}$, ya sabe que $c_i = \dfrac{<\varphi, f_i>}{\|f_i\|^2}$ para cada $i \in \{1,2,...,50\}$. Ya que estamos, un poco de terminología. Con el primer cliente, lo que hizo Juan Bautista fue *sintetizar* un color: conociendo las cantidades de cada componente (es decir los coeficientes $c_1 = 2, c_3 = \dfrac{3}{3}, c_5 = 3, c_{43} = \dfrac{1}{2}$; los coeficientes restantes son nulos), obtuvo el color $2\breve{f}_1 + \dfrac{3}{2}\breve{f}_3 + 3\breve{f}_5 + \dfrac{1}{2}\breve{f}_{42}$ mezclando las cantidades correspondientes. Con el segundo cliente, lo que tuvo que hacer es *analizar* el color φ, es decir: averiguar qué cantidades contenía de cada uno de los colores básicos $f_1, f_2, ..., f_{50}$. Los términos *análisis* y *síntesis* tienen una larga historia y desde hace un par de siglos fueron adoptados casi en exclusividad por los químicos, con el mismo sentido en que lo acabamos de utilizar. Obviamente, la situación de la química de los siglos XVIII y XIX era bastante más complicada que en la pinturería de Juan Bautista. Entre otras tantas dificultades no resueltas, había que encontrar una «base» en el «espacio de las sustancias».

Pasemos ahora al problema planteado en la pinturería de Juan Bautista cuando $\varphi \notin gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$. Se trata de saber cuál de todos los colores $\psi \in gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$ es el «más próximo» a φ. En este planteo parecería que la expresión «más próximo» tiene un sentido natural y definido, pero la realidad está muy lejos de esto. Pensemos que lo que estamos pretendiendo es calcular *distancias entre colores*. Esto, que puede parecerle delirante a mucha gente, lo hizo de alguna manera el físico – matemático Joseph Fourier (1768 –1830), en el siglo XIX, con las funciones periódicas. El desarrollo posterior de sus ideas culminó en lo que se conoce hoy en día como Análisis de Fourier. Si en lugar de *colores*, Juan Bautista mezclara *frecuencias*, estaríamos utilizando el lenguaje de esta teoría. En ese contexto, los coeficientes $c_1, c_2, ...$ se llaman *coeficientes de Fourier*. Una de las grandes diferencias es que la cantidad de funciones periódicas básicas no es finita, lo que origina la aparición de las Series de Fourier en reemplazo de las combinaciones lineales. Pero volviendo a nuestro problema, Juan Bautista ya introdujo un producto interno en el espacio $gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$, con lo cual ya tiene una norma y por lo tanto una forma práctica de medir distancias en dicho espacio. Pero para el caso $\varphi \notin gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$, lo que necesita es un producto interno definido en un espacio que contenga a $gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$ y <u>además</u> al color φ que le pidió el cliente. Esto tampoco es un problema para Juan Bautista y la conclusión a la que llega, a partir de sus conocimientos de Álgebra II, es que el color $\psi \in gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$ más próximo a φ es la <u>proyección ortogonal</u> de φ sobre $gen\left\{\breve{f}_1,\breve{f}_2,...,\breve{f}_{50}\right\}$. Su forma explícita es

$$\Pi(\varphi) = \frac{<\varphi, \breve{f}_1>}{\left\|\breve{f}_1\right\|^2}\breve{f}_1 + \frac{<\varphi, \breve{f}_2>}{\left\|\breve{f}_2\right\|^2}\breve{f}_2 + \ldots + \frac{<\varphi, \breve{f}_{50}>}{\left\|\breve{f}_{50}\right\|^2}\breve{f}_{50}$$

En el Apéndice 1 repasamos todo lo necesario de Álgebra II para la presentación geométrica que haremos de las Series de Fourier, incluyendo esta última fórmula.

***Un poco de historia*:**

El tema de este apunte tiene muy ilustre y antigua prosapia. En la forma en que se conoce en la actualidad, fue iniciado por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), cuando estudiaba los fenómenos de difusión del calor, tema crítico en plena Revolución Industrial. Luego de formular la correspondiente ecuación (con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno), encontró un método de resolución basado en la posibilidad de aproximar cualquier función periódica mediante polinomios trigonométricos (= combinaciones lineales de las funciones circulares: ver Apéndice 2) Estas aproximaciones dieron origen a las series que hoy llevan su nombre, pero el problema de la convergencia de estas series a la función periódica quedó abierto. El primer resultado sobre este tema es de Dirichlet (1805 – 1859), quien demostró la convergencia puntual bajo ciertas condiciones de regularidad de la función. Se inició entonces un extenso período de discusión y estudio sobre la convergencia de estas series, en el que intervinieron el mismo Dirichlet, Riemann, Weierstrass y Dedekin, quienes pensaban (e intentaron demostrar) que la continuidad de la función era suficiente para la convergencia de la correspondiente serie trigonométrica. A pesar de estas ilustres opiniones, esto resultó ser falso: en 1876, el matemático du Bois-Raymond encontró un contraejemplo, construyendo una función continua cuya serie de Fourier es divergente en un punto. [Siempre es bueno recordar que en matemática no existe el «principio de autoridad». Los matemáticos más grandes de la historia necesitaron demostrar rigurosamente sus afirmaciones para que se establecieran como verdaderas]. Quedaba entonces, el problema de estudiar el conjunto de puntos en los que la serie de Fourier de una función continua no es convergente (o converge, pero no al valor de la función). Este problema motivó el desarrollo de la teoría de cardinales (Georg Cantor, 1845 – 1918), de la teoría de la medida y de la *integral de Lebesgue* (Henri Lebesgue, 1875 – 1941). En 1935 aparece la primera edición de *Trigonometrical Series*, de Antoni Zygmund, un libro que sigue siendo, hasta el día de hoy, referencia universal sobre las series de Fourier. Esta obra se fue ampliando en sucesivas ediciones y la última fue editada en 2002 por unos de los matemáticos más importantes de la actualidad, Charles Fefferman [El nombre de Zygmund está indisolublemente asociado, en la historia de la matemática del siglo XX, al del argentino Alberto Calderón]. Pero la respuesta definitiva del problema planteado por aquellos matemáticos del siglo XIX recién llegó en 1966, con el Teorema de Carleson (Lennart Carleson, nacido en 1928). Este teorema afirma que el conjunto de puntos en los que la serie de Fourier de una función continua es divergente tiene *medida nula* (medida en el sentido de Lebesgue). En el camino, las series de Fourier y sus primas hermanas, las transformadas de Fourier, dieron origen a lo que hoy se conoce en matemática como Análisis Armónico y fueron, además, protagonistas matemáticas exclusivas en la revolución de las telecomunicaciones iniciada en el siglo pasado.

Referencia bibliográfica recomendada con énfasis: *Fourier Analysis* (*an Introduction*), de Elias M. Stein y Rami Sharkarchi. Princeton University Press. (2007). Ya que estamos: Elias Stein se doctoró en 1955 bajo la dirección de Zygmund, y a su vez fue director de tesis de Charles Fefferman y Terence Tao.

§2. SERIES EXPONENCIALES DE FOURIER. CONVERGENCIA CUADRÁTICA.

Los espacios vectoriales en los que trabajaremos son los espacios de funciones periódicas seccionalmente continuas. Por lo tanto, es necesario comenzar con las correspondientes definiciones.

***Definición* 2.1**: Dado un número real positivo *P*, una función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ es *P*– periódica sii para todo $x\in\Re: f(x+P)=f(x)$.

Ejemplos muy importantes: Dado un número real $P > 0$, para cada entero *n*, las funciones $\alpha_n:\Re\longrightarrow\Re$, $\beta_n:\Re\longrightarrow\Re$ y $e_n:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tales que

$$\alpha_n(x)=\cos\left(\tfrac{2n\pi}{P}x\right) \quad , \quad \beta_n(x)=sen\left(\tfrac{2n\pi}{P}x\right) \quad , \quad e_n(x)=e^{\frac{2n\pi}{P}ix} \tag{2.1}$$

son *P*– periódicas. Estas funciones van a ser utilizadas permanentemente en este apunte.

***Consecuencia* 2.1**: Si $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ es *P*– periódica, entonces para todo entero *k* y todo $x\in\Re$: $f(x+kP)=f(x)$.

Demostración: Para cada $x\in\Re$, $f(x+2P)=f((x+P)+P)\overset{def}{=}f(x+P)\overset{def}{=}f(x)$. Se entiende fácilmente entonces por qué es $f(x+nP)=f(x)$ para todo entero positivo *n* (puede demostrarlo rigurosamente mediante *inducción completa*, si no está convencido). Ahora, para cada $x\in\Re$: $f(x-P)\overset{def}{=}f((x-P)+P)=f(x)$ y entonces $f(x-2P)=f((x-P)-P)=f(x)$ (por lo probado previamente). Le dejamos completar los detalles que faltan de la demostración, (o terminar de convencerse) ■

***Observación* 2.1**:

(*a*) En particular resulta que una función *P*–periódica es, también, *nP*–periódica para todo entero positivo *n*. Si usted está pensando en el «período mínimo» de una función periódica, piense que las funciones constantes son *P*–periódicas para todo *P* real positivo, y por lo tanto no admiten un «período mínimo».

(*b*) Es evidente que una función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ es *P*–periódica si y solamente si sus componentes real e imaginaria son *P*– periódicas.

***Definición* 2.2**: Una función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ *P*– periódica es *seccionalmente continua* sii en el intervalo [0, *P*] (y por lo tanto en cualquier intervalo $[a, a+P]$, $a\in\Re$), tiene una cantidad finita de discontinuidades « de salto finito » , es decir: para cada $x_0\in[0,P]$ existen y son finitos los límites laterales $f(x_0^-)=_t \underline{Lim}_{0+} f(x_0-t)$ y $f(x_0^+)=_t \underline{Lim}_{0+} f(x_0+t)$. El «salto» de f en el punto x_0 es, por definición, la diferencia $f(x_0^+)-f(x_0^-)$.

***Observación* 2.2**:

(*a*) La cantidad finita de discontinuidades puede ser 0, obviamente. Por lo tanto, las funciones *P* – periódicas continuas son seccionalmente continuas.

(*b*) También es evidente que una función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ *P*–periódica es seccionalmente continua si y solamente si lo son sus componentes real e imaginaria.

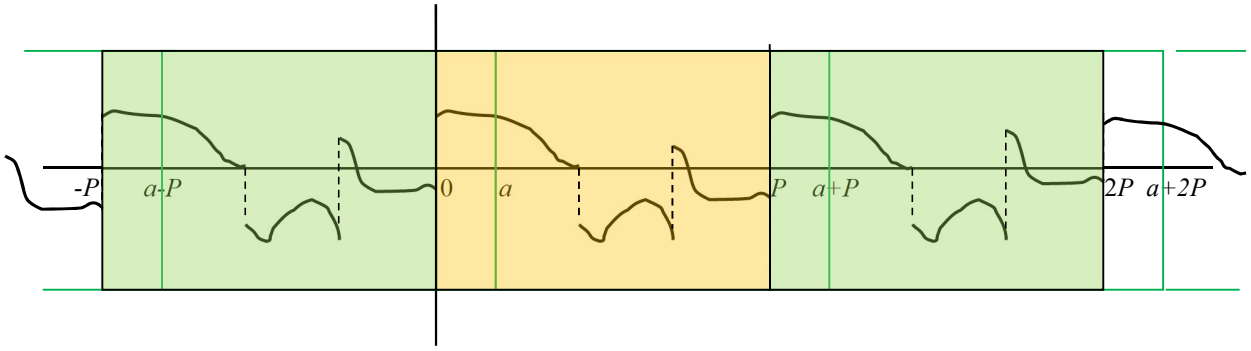


Gráfico de una función real *P*–periódica y seccionalmente continua.
Hemos ilustrado la repetición del gráfico en los intervalos [–*P*,0], [0, *P*], [*P*, 2*P*] y también en los intervalos [*a* –*P*, *a*], [*a* , *a* +*P*], [*a*+*P*, *a* +2*P*] , para algún *a*.
Los *saltos* están indicados con los segmentos punteados.

Fig. 2.1

Por ser seccionalmente continuas, estas funciones son integrables en cualquier intervalo cerrado y acotado de la recta, y cuando decimos integrables nos referimos a la integral definida que usted ya conoce, la de Riemann. No utilizaremos en este apunte (ni en este curso) otra integral. Además, recordemos que para una función seccionalmente continua $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$, su integral en cada intervalo $[a,\ b]$ es $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt+i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$. Ahora, la periodicidad tiene una consecuencia muy sencilla pero muy práctica que vamos a utilizar en todo este apunte:

***Lema* 2.1**: Sea $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ una función *P*–periódica y seccionalmente continua. Entonces, para todo $a\in\Re$:

$$\int_a^{a+P} f(x)dx=\int_0^P f(x)dx \tag{2.2}$$

En particular, para $a=-\frac{1}{2}P$, se tiene:

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x)dx=\int_0^P f(x)dx \tag{2.3}$$

Demostración: En la igualdad $\int_0^P f(x)dx+\int_P^{P+a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a+P} f(x)dx$ tenemos

$$\int_0^a f(x)dx \overset{x=t-P}{=} \int_P^{P+a} f(t-P)dt \overset{(H)}{=} \int_P^{P+a} f(t+P-P)dt=\int_P^{P+a} f(t)dt\ ,$$

por lo tanto, $\int_0^P f(x)dx+\int_P^{P+a} f(x)dx=\int_P^{P+a} f(x)dx+\int_a^{a+P} f(x)dx$ ■

La identidad (2.3) es muy útil para el cálculo de integrales de funciones *P*–periódicas pares o impares en intervalos simétricos respecto del origen. Recordemos que una función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ es par sii para todo $x\in\Re: f(-x)=f(x)$, y que es impar sii para todo $x\in\Re: f(-x)=-f(x)$.

La ventaja práctica mencionada es la siguiente: si *f* es par, $\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x)dx=2\int_0^{\frac{P}{2}} f(x)dx$, y si *f* es impar:

$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x)dx = 0$. Dejamos como ejercicio (es de Análisis I) probar estas identidades mediante el cambio de variable obvio: $x = -t$. Ejemplos de funciones pares son 1, x^2 y cos(x). Ejemplos de funciones impares son x, x^3 y $sen(x)$. Por favor no cometa el error de suponer que las funciones tienen la obligación de tener alguna paridad: las bonitas funciones $1 + x$ y e^x no son ni pares ni impares. Lo que sí es cierto es que para cada función $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ existen una única función par $f_{par} : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ y una única función impar $f_{impar} : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f = f_{par} + f_{impar}$. Esto es muy sencillo de comprobar y seguramente lo vio en cursos anteriores, pues para todo $x \in \Re$:

$$f(x) = \overbrace{\tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}^{f_{par}(x)} + \overbrace{\tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}^{f_{impar}(x)} \qquad (2.4)$$

Para el trabajo con una determinada clase de funciones, siempre es conveniente conocer si esta clase tiene alguna estructura operativa. Por ejemplo, si la suma de dos funciones P–periódicas y seccionalmente continuas es, también, P–periódica y seccionalmente continua.

***Notación* 2.1**: Para cada $P > 0$, indicaremos con el símbolo E_P el conjunto de todas las funciones $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ P–periódicas y seccionalmente continuas.

***Proposición* 2.1:** E_P es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita. Además, es cerrado sobre el producto de funciones, es decir: para todo para de funciones f y g en E_P : $fg \in E_p$.

Demostración: Ejercicio: pruebe que E_P es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$. Que su dimensión no puede ser finita se puede ver fácilmente utilizando las exponenciales del ejemplo (2.1): para cada entero positivo m, las m +1 funciones e_0, e_1,e_2,…,e_m son linealmente independientes. Por último, es muy sencillo probar (utilizando directamente las definiciones) que el producto de funciones P–periódicas es P–periódica y que el producto de funciones seccionalmente continuas también es seccionalmente continua. ■

En cada espacio E_P tenemos, además de la estructura lineal:

(*a*) El «casi» producto interno $< f, g > = \int_0^P \overline{f(t)} g(t) dt$. Decimos «casi» pues este producto tiene todas las propiedades de los productos internos excepto $< f, f > = 0 \Rightarrow f = 0_{E_P}$, pues lo que implica la igualdad $< f, f > = 0$ es que f es nula salvo en una cantidad finita de puntos del intervalo $[0, P]$ y por lo tanto en cada intervalo de longitud P).

***Nota* 2.1**: A estas funciones las denominaremos *casi nulas* (o *nulas en casi todo punto*); de la misma manera, diremos que dos funciones f y g son *casi iguales* (o *iguales en casi todo punto*) si $f - g$ es *casi nula*.[No estamos inventando esta terminología. En la teoría de la medida, las funciones que se denominan *casi nulas o nulas en casi todo punto* son las que se anulan en todos los puntos de su dominio excepto en un conjunto de *medida nula*. Para las funciones *P*– periódicas y seccionalmente continuas, este concepto coincide con el que estamos utilizando aquí. Uno de los recursos que se utiliza clásicamente para eliminar el «casi» es identificar, en el espacio E_P, las funciones que son «casi iguales» como si fueran un solo elemento. Este recurso se utiliza desde hace mucho tiempo en todas las ramas de la matemática y se conoce formalmente como *relación de equivalencia y conjunto cociente*]. Terminemos esta nota con un ejemplo sencillo: la función $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Z \\ 0 & si \quad x \notin Z \end{cases}$ es 1– periódica, seccionalmente continua, verifica $< f, f > = 0$ y sin embargo no es la función nula, como es de público conocimiento.

(*b*) La «casi» norma asociada al producto interno: $\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_0^P |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Aquí, la expresión «casi» tiene el mismo sentido que en (*a*): la función nula tiene norma cero, obviamente, pero las funciones de norma cero son las «casi nulas». El subíndice 2 que utilizamos para esta norma es para distinguirlas de otras normas. En particular veremos otras dos más adelante, que se indican clásicamente con los símbolos $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$. Hasta hace algunos años, en Álgebra II se enseñaba el concepto de norma. La definición es muy sencilla: una norma en un espacio vectorial V (real o complejo, de dimensión finita o no) es una función $\| \ \| : V \longrightarrow \Re$ con las siguientes propiedades: (1) para todo $v \in V : \|v\| \geq 0$ y además $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$; (2) para todo escalar λ y todo $v \in V$: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$; (3) para todo par de elementos *u* y *v* en *V*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Lo que sí se sigue enseñando en Álgebra II es que dado un producto interno $< , >$ en *V*, la función definida por $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ tiene estas tres propiedades, y por lo tanto es una norma, que se denomina *norma asociada al producto interno* o *norma euclídea*. Cuando en un mismo espacio se trabaja con distintas normas, es necesario distinguir la notación que se utiliza para cada una de ellas, como haremos en nuestro caso.

Momento cultural: El número $\left(\frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se denomina *media cuadrática* de *f*. En el caso en que *f* representa una magnitud eléctrica variable con el tiempo y *P*–periódica (una de las aplicaciones clásicas), este número recibe el nombre más técnico de *valor eficaz*.

(*c*) La «casi distancia» asociada a la norma, que a cada par de funciones *f* y *g* del espacio E_P le asigna el número real no negativo $d_2(f,g) = \|g - f\|_2$. Como ya se puede imaginar, la culpa de que sea una «casi distancia» es que $d_2(f,g) = 0$ no implica que *f* = *g* , si no que *f* es «casi igual» a *g*, es decir, que *g* – *f* es casi nula.

A pesar de este defecto, se puede hacer geometría y análisis en E_P con este «casi» producto interno y sus derivados. Comencemos con la definición de un concepto básico y necesario para comenzar el análisis.

***Definición* 2.3**: Una sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos de E_P *converge cuadráticamente* (o en *media cuadrática*) a un elemento $f \in E_P$ si ${}_n\underline{Lim}_{\infty}\|f - f_n\|_2 = 0$. También se dice que $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *converge a f en norma dos* .

***Ejercicio* 2.1**: Demuestre que si ${}_n\underline{Lim}_{\infty}\|f - f_n\|_2 = 0$ y ${}_n\underline{Lim}_{\infty}\|g - f_n\|_2 = 0$, entonces *f* y *g* son «casi iguales». Es decir: el límite según la «casi norma» $\|\ \|_2$ es «casi único».

Recordemos que para cada entero *n*, $e_n \in E_P$ es la función tal que tal que $e_n(x) = e^{\frac{2n\pi}{P}ix}$ para todo $x \in \Re$. Observe que $e_n = e_1^n$. Veamos primero que el sistema $\Omega = \{...,e_{-3},e_{-2},e_{-1},e_0,e_1,e_2,e_3,...\}$ es un sistema ortogonal. Dicho sea de paso, esto prueba automáticamente que cualquier subconjunto finito de Ω es linealmente independiente y que por lo tanto E_P es de dimensión infinita.

***Proposición* 2.2**:
(a) Para todo par de enteros *n* y *k* : $n \neq k \Rightarrow < e_n, e_k > = 0$ y $\|e_n\|_2 = \sqrt{P}$.
(b) Para toda secuencia finita $c_1, c_2, ..., c_m$ de números complejos: $\left\|\sum_{k=1}^{m} c_k e_k\right\|_2^2 = P\sum_{k=1}^{m}|c_k|^2$

Demostración: (a) es una cuenta directa y sencillita y (b) una consecuencia inmediata de (a) ■

Para cada entero positivo *m*, sea E_P^m el siguiente subespacio de E_P:

$$E_P^m = gen\{e_{-m}, e_{-m+1}, ..., e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, ..., e_{m-1}, e_m\} \tag{2.5}$$

Observe que $\dim(E_P^m) = 2m+1$ y que se tiene la cadena infinita $E_P^1 \subset E_P^2 \subset E_P^3 \subset ...$ de inclusiones estrictas (otra comprobación de que E_P no puede tener dimensión finita).

Para cada $f \in E_P$, sea $f_m = \Pi_m(f)$ la proyección ortogonal de f sobre E_P^m, es decir:

$$f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\, e_n \tag{2.6}$$

donde los coeficientes

$$c_n(f) = \frac{< e_n, f >}{\|e_n\|_2^2} = \frac{1}{P}\int_0^P \overline{e_n(\theta)} f(\theta) d\theta = \frac{1}{P}\int_0^P f(\theta) e^{-\frac{2n\pi}{P} i\theta} d\theta \tag{2.7}$$

se denominan *coeficientes de Fourier* de *f*. Todo esto, visto en Álgebra II, está repasado en el Apéndice 1.

***Nota* 2.2:** Dos funciones $f, g \in E_P$ tales que $f = g$ en *casi todo punto* (es decir: tales que $f - g$ es *casi nula*) tienen los mismos coeficientes de Fourier.

La siguiente proposición también es conocida desde nuestro paso por Álgebra II, pero preferimos repasarla aquí y ahora, en el momento en que la necesitamos.

***Proposición* 2.3**: (*Teorema de Pitágoras*) Sean $f \in E_P$, *m* un entero positivo, f_m su proyección ortogonal sobre E_P^m y *k* un entero tal que $-m \le k \le m$. Entonces:

(*i*) $< f - f_m, e_k > = 0$ (es decir: $f - f_m$ es ortogonal a E_P^m).
(*ii*) Para todo $g \in E_P^m$: $\|f - g\|_2^2 = \|f - f_m\|_2^2 + \|f_m - g\|_2^2$. (*Teorema de Pitágoras*)
(*iii*) Para todo $g \in E_P^m$: $\|f - f_m\|_2^2 \le \|f - g\|_2^2$ y vale la igualdad sii $g = f_m$ (en *casi* todo punto).
(*iv*) $\|f_m\|_2^2 \le \|f\|_2^2$ y vale igualdad sii $f = f_m$ (en *casi* todo punto)

Demostración:

Prueba de (i) : $< e_k, f - f_m > = < e_k, f > - < e_k, f_m > = P c_k(f) - < e_k, \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e_n > =$

$$= P c_k(f) - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) < e_k, e_n > = P c_k(f) - c_k(f) P = 0 \qquad \square$$

Prueba de (ii): $\|f - g\|_2^2 = \|f - f_m + f_m - g\|_2^2 = \|f - f_m\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re} < f - f_m, f_m - g > + \|f_m - g\|_2^2$.
Pero $f_m - g \in E_P^m$ y por lo tanto el término central es 0 por (i) $\square$

Prueba de (iii): consecuencia inmediata de (ii) $\square$

Prueba de (iv): Para $g = 0$, (ii) queda $\|f\|_2^2 = \|f - f_m\|_2^2 + \|f_m\|_2^2$ $\square$ ■

Una primera consecuencia muy importante es la siguiente desigualdad y el sorprendente *Lema de Riemann – Lebesgue* (para el caso periódico).

***Corolario* 2.1**: (*Desigualdad de Bessel* y *Lema de Riemann – Lebesgue*). Para toda $f \in E_P$ y para todo entero positivo m se verifica

$$\sum_{n=-m}^{m} |c_n(f)|^2 \le \tfrac{1}{P} \|f\|_2^2 \qquad (2.8)$$

Por lo tanto, puesto que el segundo miembro de esta desigualdad no depende de m:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \le \tfrac{1}{P} \|f\|_2^2 \qquad (2.8\text{ bis})$$

(ver Observación 2.3). En particular (2.8 bis) implica que ${}_n\underline{Lim}_{\infty} c_n(f) = 0 = {}_n\underline{Lim}_{-\infty} c_n(f)$ es decir:

$${}_n\underline{Lim}_{\infty} \int_0^P f(t) e^{\frac{2n\pi}{P} it} dt = 0 = {}_n\underline{Lim}_{\infty} \int_0^P f(t) e^{-\frac{2n\pi}{P} it} dt \qquad (2.9)$$

(Este es el *Lema de Riemann – Lebesgue para el caso periódico*).

Demostración: La desigualdad (2.8) se deduce de las desigualdades $\|f_m\|_2^2 \le \|f\|_2^2$ (Proposición 2.3) y $\|f_m\|_2^2 = P\sum_{n=-m}^{m}|c_n(f)|^2$, y ésta, a su vez, se deduce de la igualdad $f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\,e_n$ (2.6) calculando la norma de ambos miembros (ver Proposición 2.2 (b))■

***Observación* 2.3**: La sumatoria $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f)|^2$ debe entenderse de la siguiente manera

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f)|^2 = {}_m\underline{Lim}_{\infty}\left(\sum_{n=-m}^{m}|c_n(f)|^2\right) = {}_m\underline{Lim}_{\infty}\left(|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{m}\left[|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\right]\right)$$

***Observación* 2.4**: El Lema de Riemann–Lebesgue es realmente sorprendente. Afirma que cualquiera sea la función *P*– periódica y seccionalmente continua f, sus componentes $c_n(f)e_n$ tienden a «desaparecer» a medida que crece la *frecuencia* $\omega_n = \frac{2n\pi}{P}$. Separando las partes real e imaginaria de $e_n(t) = e^{\frac{2n\pi}{P}it}$ en la igualdad ${}_n\underline{Lim}_{\infty}\int_0^P f(t)e^{\frac{2n\pi}{P}it}dt = 0$, se obtiene la versión trigonométrica del Lema de Riemann–Lebesgue (caso periódico).

$$ {}_n\underline{Lim}_{\infty}\int_0^P f(t)\cos(\tfrac{2n\pi}{P}t)dt = 0 = {}_n\underline{Lim}_{\infty}\int_0^P f(t)sen(\tfrac{2n\pi}{P}t)dt \qquad (2.10)$$

Cuando estudiemos la Transformada de Fourier veremos la versión no periódica de este Lema.

Ya podemos ir redondeando esta presentación geométrica de las series de Fourier. Dicho sea de paso, me acabo de dar cuenta de que todavía no mencioné explícitamente qué son estas series. La serie de Fourier de $f \in E_P$ es la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$, donde los coeficientes $c_n(f)$ son los coeficientes de Fourier de f (ver (2.7)). Cada proyección $f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e_n$ se denomina *suma de Fourier* o *suma parcial de Fourier*. La idea original de Fourier, traducida en los términos y notación que estamos utilizando, podría presentarse de la siguiente manera. Dada $f \in E_P$, para cada entero positivo *m*, tenemos su proyección ortogonal f_m sobre el subespacio E_P^m. Sabemos que si existe algún m_0 tal que $f \in E_P^{m_0}$, entonces se tiene la igualdad $\|f - f_{m_0}\|_2 = 0$. También

sabemos que los subespacios $\mathcal{E}_P^m$ están ordenados en una cadena $\mathcal{E}_P^1 \subset \mathcal{E}_P^2 \subset \mathcal{E}_P^3 \subset ...$ estrictamente creciente, y por lo tanto si $f \in \mathcal{E}_P^{m_0}$, entonces $f \in \mathcal{E}_P^{m_0+k}$ para todo $k \geq 0$, es decir: $0 = \left\| f - f_{m_0} \right\|_2 = \left\| f - f_{m_0+1} \right\|_2 = \left\| f - f_{m_0+2} \right\|_2 = ...$ Este es el caso en que se puede lograr la mejor aproximación cuadrática de *f* mediante combinaciones lineales de exponenciales, pues se tiene directamente la igualdad $\left\| f - f_{m_0} \right\|_2 = 0$. Pero no existe ningún entero positivo m_0 tal que $\mathcal{E}_P^{m_0} = \mathcal{E}_P$, pues cada $\mathcal{E}_P^m$ es de dimensión finita. Sin embargo, las dimensiones $\dim(E_P^m) = 2m+1$ van creciendo a medida que crece *m*, con lo cual, los subespacios $\mathcal{E}_P^m$ van «ocupando cada vez más lugar» en el espacio $\mathcal{E}_P$, por lo tanto, «es de esperar» que a medida que *m* crece, la distancia $\left\| f - f_m \right\|_2$ tienda a cero. Esta es una versión geométrica de la idea de Fourier sobre la posibilidad de aproximar cualquier función periódica mediante combinaciones lineales de las trigonométricas. Difícilmente un matemático profesional, acostumbrado a lidiar con contraejemplos patológicos, sostenga una conjetura tan ingenua como esta. Dada la importancia del tema, no es casual que esta idea haya sido discutida y estudiada por los más grandes matemáticos del siglo XIX y ya hemos mencionado, en la introducción, la existencia de funciones periódicas continuas con serie de Fourier divergente en al menos un punto. Pero hacia fines de ese siglo y comienzos del XX, desde el punto de vista de la aproximación cuadrática, la historia le terminó dando la razón a Fourier. Antes de enunciar el teorema, veamos algunas formulaciones equivalentes.

***Proposición* 2.4**. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*A*) Para toda $f \in \mathcal{E}_P$: $\underset{m}{\underline{Lim}}_{\infty} \left\| f - f_m \right\|_2 = 0$.

(*B*) Para toda $f \in \mathcal{E}_P$: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| c_n(f) \right|^2 = \frac{1}{P} \left\| f \right\|_2^2$.

Demostración: Por la Proposición 2.3 (*ii*) sabemos que para toda $g \in \mathcal{E}_P^m$ se verifica la igualdad $\left\| f - g \right\|_2^2 = \left\| f - f_m \right\|_2^2 + \left\| f_m - g \right\|_2^2$; eligiendo $g = 0_{\mathcal{E}_P} : \left\| f \right\|_2^2 = \left\| f - f_m \right\|_2^2 + \left\| f_m \right\|_2^2$. Por otra parte, sabemos que $\left\| f_m \right\|_2^2 = P \sum_{n=-m}^{m} \left| c_n(f) \right|^2$ (es una cuentita). De todo esto resultan la igualdades (válidas para cada entero positivo *m*): $\left\| f \right\|_2^2 = \left\| f - f_m \right\|_2^2 + P \sum_{n=-m}^{m} \left| c_n(f) \right|^2$, y de esta igualdad se deduce inmediatamente la equivalencia $(A) \Leftrightarrow (B)$. ■

La igualdad (*B*) se denomina *Igualdad de Parseval* (comparar con (2.8) bis). El matemático Marc-Antoine Paseval des Chênes (1755 – 1836) ya había comunicado esta igualdad, pero sin ninguna demostración rigurosa, absolutamente necesaria para ser tomada en cuenta por sus colegas contemporáneos (y futuros).

En la demostración del siguiente teorema intervinieron varios pesos pesados del XIX y comienzos del XX, pero el que abrió el camino fue Lipót Fejér (1880 – 1959). Este teorema es el broche de oro para este parágrafo.

***Teorema* 2.1**: Para toda $f \in E_P$ se verifica:

$$ {}_m\underline{Lim}_{\infty} \|f - f_m\|_2 = 0 \tag{2.11}$$

Demostración: No la daremos aquí, pues escapa al alcance y extensión de este curso. Para el interesado, indicamos que se demuestra utilizando las sumas de Fejér F_m de *f*, que son las medias aritméticas de las sumas de Fourier, es decir: $F_m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f_k$. Por lo tanto $F_m \in E_P^m$ y puesto que f_m es la proyección ortogonal de *f* sobre E_P^m, se tiene $\|f - f_m\|_2 \le \|f - F_m\|_2$ (Proposición 2.3 (*iii*)). La parte central de la demostración de Fejér es la prueba de la convergencia uniforme de las sumas de Fejér a *f, para el caso en que f es continua*. La hipótesis de continuidad es inevitable, pues el límite uniforme de funciones continuas es una función necesariamente continua (uno de los tantos teoremas de Weierstrass). Este teorema de Fejér es un teorema importantísimo por sí mismo, independientemente del teorema (2.1) para cuya demostración lo estamos utilizando. Ahora, el límite $F_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ (*uniforme* en [0, P]) implica que ${}_m\underline{Lim}_{\infty}\|f - F_m\|_2 = 0$, y entonces, de la desigualdad $\|f - f_m\|_2 \le \|f - F_m\|_2$ se deduce inmediatamente que ${}_m\underline{Lim}_{\infty}\|f - f_m\|_2 = 0$. Esto que prueba el teorema 2.1 para el caso en que *f* es continua. Para demostrar el caso general, basta con probar (no es difícil) que para cada $f \in E_P$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon \in E_P$ continua tal que $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$, pues entonces

$$\|f - f_m\|_2 = \|f - f_\varepsilon + f_\varepsilon - f_{\varepsilon,m} + f_{\varepsilon,m} - f_m\|_2 \le \overbrace{\|f - f_\varepsilon\|_2}^{(1)} + \overbrace{\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon,m}\|_2}^{(2)} + \overbrace{\|f_{\varepsilon,m} - f_m\|_2}^{(3)}$$

El término (1) es menor o igual que ε; el término (2) tiende a cero cuando $m \longrightarrow \infty$, pues f_ε es continua (y el teorema ya fue probado para continuas); en el término (3) tenemos que cada $f_{\varepsilon,m} - f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f_\varepsilon)e_n - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e_n = \sum_{n=-m}^{m}[c_n(f_\varepsilon) - c_n(f)]e_n \overset{(1)}{=} \sum_{n=-m}^{m} c_n(f_\varepsilon - f)e_n$ es la *m*–ésima suma de Fourier de $f_\varepsilon - f$ (la igualdad (1) se debe a que los coeficientes de Fourier son funciones lineales $c_n : E_P \longrightarrow \mathbb{C}$, como usted puede constatar con solo observar su definición). Pero entonces, dado que la norma de la proyección de un vector es siempre menor o igual que la norma del vector (Propiedad 2.3 (*iv*)), tenemos $\|f_{\varepsilon,m} - f_m\|_2 \le \|f_\varepsilon - f\|_2 < \varepsilon$. ■

---

§3. CONVERGENCIA PUNTUAL. CONDICIONES DE DIRICHLET.

Estudiaremos ahora otro tipo de convergencia de las series de Fourier, la convergencia puntual. El problema es muy sencillo de plantear: dada $f \in E_P$, ¿para qué puntos $x \in \Re$ se verifica que ${}_m\underline{Lim}_{\infty} f_m(x) = f(x)$? Teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones involucradas, es obvio que alcanza con estudiar los puntos del intervalo [0, *P*]. Ya hemos mencionado en la Introducción (en el parágrafo *Un poco de historia*) que la continuidad de *f* en un punto *x* no alcanza para garantizar que ${}_m\underline{Lim}_{\infty} f_m(x) = f(x)$. Espero (imploro) que los alumnos no cometan el error, tantas veces perpetrado en los exámenes, de escribir: « la serie de Fourier de *f* converge a *f* en todos los puntos del intervalo [0, *P*] porque *f* es continua». Lamentablemente no es fácil construir ejemplos, como lo demuestra el hecho de que el matemático que encontró el primero pasó a la historia, pero ya transcurrieron 144 años desde que ese ejemplo fue descubierto y creo que ya es tiempo de aprender a no cometer este error, extrañamente persistente.

La convergencia puntual de la serie de Fourier en un determinado punto está más relacionada con la *suavidad* de la función a la izquierda y la derecha de este punto que con la continuidad. La formulación precisa de esta condición es el enunciado del siguiente teorema, cuyo autor, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) fue uno de los espíritus matemáticos más finos y sutiles del siglo XIX. Existen otras condiciones suficientes para la convergencia puntual de la serie de Fourier (criterio de Dini, variación acotada, etc), pero en la práctica, las más sencillas de verificar suelen ser las condiciones de Dirichlet.

***TEOREMA* 3.1 (*Condiciones de Dirichlet para la convergencia puntual*)**

Dada $f \in E_P$ y un punto $x_0 \in [0, P]$, si existen las derivadas laterales (finitas)

$$f'^{-}(x_0) = {}_t\underline{Lim}_{0+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^-)}{t} \quad \text{y} \quad f'^{+}(x_0) = {}_t\underline{Lim}_{0+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{t} \tag{3.1}$$

entonces

$${}_m\underline{Lim}_{\infty} f_m(x_0) = \tfrac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)] \tag{3.2}$$

donde, recordemos, $f(x_0^-) = {}_t\underline{Lim}_{0+} f(x_0 - t)$ y $f(x_0^+) = {}_t\underline{Lim}_{0+} f(x_0 + t)$. El número (3.2) es el promedio de los valores de *f* en la discontinuidad de salto finito en el punto x_0. En particular, si *f* es continua en x_0, entonces $\tfrac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)] = f(x_0)$ y por lo tanto, si además admite las derivadas laterales finitas (3.1), es ${}_m\underline{Lim}_{\infty} f_m(x_0) = f(x_0)$.

Demostración: Apéndice 3. ■

---

§4. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LAS SERIES DE FOURIER

La versión más popular de las series de Fourier es la que se suele denominar *forma trigonométrica.* Tal vez sea su popularidad se deba al hecho de que cuando $f \in E_P$ es una función real, todos los términos de su serie trigonométrica de Fourier son, también, funciones reales. La relación entre las formas exponencial y trigonométrica es extremadamente sencilla:

$$f_m(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e^{\frac{2n\pi}{P} ix} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{m} [c_{-n}(x) e^{-\frac{2n\pi}{P} ix} + c_n(f) e^{\frac{2n\pi}{P} ix}] =$$

$$= c_0(f) + \sum_{n=1}^{m} (\overbrace{[c_{-n}(f) + c_n(f)]}^{a_n(f)} \cos(\tfrac{2n\pi}{P} x) + \overbrace{i[-c_{-n}(f) + c_n(f)]}^{b_n(f)} sen(\tfrac{2n\pi}{P} x))$$

Hemos utilizado la notación clásica para los coeficientes: para cada entero positivo n:

$$a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f) = \frac{1}{P}\int_0^P f(t) e^{\frac{2n\pi}{P} it} dt + \frac{1}{P}\int_0^P f(t) e^{-\frac{2n\pi}{P} it} dt = \frac{2}{P}\int_0^P f(t) \cos(\tfrac{2n\pi}{P} t) dt \qquad (4.1)(a)$$

$$b_n(f) = i[-c_{-n}(f) + c_n(f)] = -\frac{i}{P}\int_0^P f(t) e^{\frac{2n\pi}{P} it} dt + \frac{i}{P}\int_0^P f(t) e^{-\frac{2n\pi}{P} it} dt = \frac{2}{P}\int_0^P f(t) sen(\tfrac{2n\pi}{P} t) dt \quad (4.1)(b)$$

Para incluir el caso $n = 0$ en las fórmulas (4.1)(a), se define clásicamente el coeficiente que falta de la siguiente manera:

$$a_0(f) = 2c_0(f) = \frac{2}{P}\int_0^P f(t) dt \qquad (4.1)(c)$$

Observe que para $n = 0$, la fórmula (4.1) quedaría $b_0 = 0$. En definitiva, las sumas de Fourier de f, con esta notación, quedan:

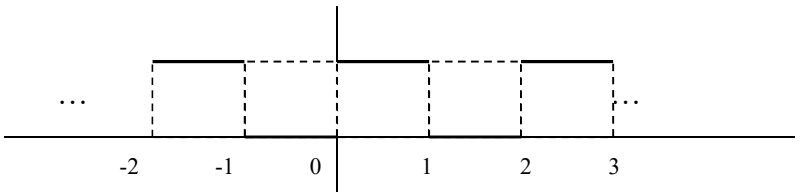
$$f_m(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e^{\frac{2n\pi}{P} ix} = \tfrac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{m} [a_n(f) \cos(\tfrac{2n\pi}{P} x) + b_n(f) sen(\tfrac{2n\pi}{P} x)] \qquad (4.2)$$

Para indicar la serie de Fourier de *f*, se suele utilizar la curiosa notación

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f) \cos(\tfrac{2n\pi}{P} x) + b_n(f) sen(\tfrac{2n\pi}{P} x)] \quad . \tag{4.3}$$

Se trata de una notación muy prudente, casi temerosa, pues no involucra ninguna afirmación sobre la convergencia de la serie. Lo único que indica es la función y su serie. Pero, curiosamente, es bastante práctica, como veremos a continuación.

Un ejemplo muy sencillo para el cálculo de los coeficientes trigonométricos de Fourier es el de la función $f \in E_2$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$.



Haciendo cuentas muy sencillas resulta

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1-(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{2k+1} sen((2k+1)\pi x)$$

Observe, como hemos mencionado, que el símbolo $\sim$ evita toda alusión a las cuestiones de convergencia de la serie, lo cual es una virtud de esta extraña notación. Otra observación: si *f* es una función que toma valores reales, los coeficientes (4.1)(*a*) y (4.1)(*b*) de la serie (4.3) son reales y por lo tanto, como hemos anunciado al principio de este parágrafo, cada término de la serie es una función real. Por último, la recuperación de los coeficientes $c_n(f)$ a partir de los coeficientes $a_n(f)$ y $b_n(f)$ es muy sencilla:

Para todo entero $n \ge 1$:

$$c_n(f) = \tfrac{1}{2}[a_n(f) - i b_n(f)] \tag{4.4}$$
$$c_{-n}(f) = \tfrac{1}{2}[a_n(f) + i b_n(f)]$$

Para n = 0, ambas fórmulas quedan $c_0(f) = \frac{1}{2} a_0(f)$, pues para n = 0, la fórmula (4.1)(b) es $b_0(f) = 0$. Observe que si f es real, de (4.4) resulta $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$. Por último, la igualdad de Parseval, (*Proposición* 2.4. (*B*)) referida a los coeficientes (4.1) es:

$$\frac{1}{P}\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \qquad (4.5)$$

Para finalizar ese parágrafo, observemos que las expresiones exponencial y trigonométrica de las series de Fourier corresponden a un cambio de bases ortogonales en cada E_P^m: la que utilizamos al principio, $\Omega_m = \{e_{-m}, e_{-m+1}, ..., e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, ..., e_{m-1}, e_m\}$ y la que aparece en este parágrafo: $\Omega'_m = \{\frac{1}{2}\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 ..., \alpha_m, \beta_m\}$, donde $\alpha_n(x) = \cos(\frac{2n\pi}{P}x)$ y $\beta_n(x) = sen(\frac{2n\pi}{P}x)$. Dejamos como ejercicio comprobar que, efectivamente, Ω'_m es una base ortogonal de E_P^m. Recomendamos hacerlo con detalle. Por otra parte, mucho más sencillo es probar que:

$$f \in E_P \text{ es par} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(\frac{2n\pi}{P}x)$$

$$f \in E_P \text{ es impar} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) sen(\frac{2n\pi}{P}x) \qquad (4.6)$$

---

§5. CONVERGENCIA EN MEDIA Y CONVERGENCIA UNIFORME.

En este parágrafo, para aligerar un poco la escritura omitiremos el prefijo *casi* para referirnos a las normas, prefijo que deberá ser sobreentendido. En cada espacio $\mathcal{E}_P$ son importantes otras dos normas, además de la norma euclídea $\|\ \|_2$ que hemos considerado en los parágrafos precedentes: las normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_\infty$, definidas para cada $f \in \mathcal{E}_P$ de la siguiente manera:

$$\|f\|_1 = \int_0^P |f(t)|dt \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup\left\{ \left| f_0(x) \right| : 0 \le x \le P \right\} \tag{5.1}$$

donde $f_0(x) = f(x)$ en todos los puntos x donde f es continua y $f_0(x) = 0$ en los puntos x donde f es discontinua.

***Observación* 5.1**: La razón de reemplazar f por f_0 en la definición de $\|\ \|_\infty$ se ve claramente en el siguiente ejemplo: sea $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ la función característica de los enteros, es decir: $f(x) = 1$ si x es entero y $f(x) = 0$ si x no es entero. Entonces, f es 1-periódica, seccionalmente continua y $\sup\{ |f(x)| : 0 \le x \le 1 \} = 1$, mientras que $\sup\left\{ \left| f_0(x) \right| : 0 \le x \le 1 \right\} = 0$. Dado que f es una función casi nula, parece más razonable 0 y no 1 como medida del «tamaño» de f. La definición que hemos adoptado es una simplificación de lo que se conoce como *supremo esencial*. Esta simplificación es posible porque estamos tratando con funciones seccionalmente continuas, que no tienen «demasiadas» discontinuidades. Utilizando la terminología del parágrafo 2, se puede decir que las funciones seccionalmente continuas son *casi continuas*. Otro ejemplo: $g : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(x) = \cos(\pi x)$ si x no es entero y $g(x) = 18$ si x es entero. Esta función también es seccionalmente continua y 1-periódica, y resulta $\sup\{ |g(x)| : 0 \le x \le 1 \} = 18$, lo que no parece muy razonable, mientras que $\sup\left\{ \left| g_0(x) \right| : 0 \le x \le 1 \right\} = 1$. Para relacionar esta definición de la norma $\|\ \|_\infty$ con las otras normas (y recordando que $\not{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x-)]$) observe que

$$\|f\|_1 = \|\not{f}\|_1 = \left\| f_0 \right\|_1 \quad \text{y} \quad \|f\|_2 = \|\not{f}\|_2 = \left\| f_0 \right\|_2 . \tag{5.2}$$

como se puede comprobar fácilmente (las integrales definidas no distinguen valores puntuales).

***Observación* 5.2**: Dada la periodicidad de $f \in E_P$, en la definición (5.1) de $\| \ \|_\infty$ puede reemplazarse $0 \le x \le P$ por $a \le x \le a + P$ para cualquier $a \in \Re$. Lo mismo ocurre (Lema 2.1) con los extremos de integración en la definición de $\| \ \|_1$. Recordemos que una elección que suele resultar útil para los cálculos es $a = -\frac{1}{2}P$.

***Momento cultural* 5.1**: Las normas $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ y $\| \ \|_\infty$ se llaman «norma uno», «norma dos» y «norma infinito». Tal vez los índices en las tres normas que hemos presentado hasta ahora le hayan hecho sospechar que hay más normas por el estilo. En efecto, para cada número real positivo *q*, en E_P se tiene la norma $\| \ \|_q$ definida por $\|f\|_q = \left(\int_0^P |f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}$. La relación de estas normas con la norma infinito es la que insinúa la notación: ${}_q\underline{Lim}_{+\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$. La prueba de esto, así como las importantes desigualdades de Hölder - Minkowsky, pueden consultarse en cualquier (buen) texto introductorio de teoría de la medida y análisis funcional. Por ejemplo, de los mismos autores de la referencia bibliográfica enfáticamente recomendada en la introducción, y de la misma serie de volúmenes: *An Introduction to Further Topics in Analysis,* de Elias M. Stein y Rami Sharkarchi. Princeton University Press. (2011). Un texto clásico para este tema (y muchos otros…) es *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, de A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin (Editorial MIR – 1975)

Para cada norma en E_P se tiene la correspondiente definición de convergencia. Incluimos la convergencia cuadrática y la puntual para tener a mano las cuatro clases de convergencia que nos interesan en este apunte.

***Definición* 5.1**: Dada $f \in E_P$ y una sucesión $(f_m)_{m=0}^\infty$ de funciones de E_P (nos interesa especialmente el caso en que $(f_m)_{m=0}^\infty$ es la sucesión de la sumas de Fourier de f):

(*A*) $(f_m)_{m=0}^\infty$ converge *puntualmente* a f *en* $x_0 \in [0, P]$ sii ${}_m\underline{Lim}_{+\infty} |f(x_0) - f_m(x_0)| = 0$

(*B*) $(f_m)_{m=0}^\infty$ converge *en media* a f sii ${}_m\underline{Lim}_{+\infty} \|f - f_m\|_1 = 0$

(*C*) $(f_m)_{m=0}^\infty$ converge *cuadráticamente* a f (o converge *en media cuadrática*) sii ${}_m\underline{Lim}_{+\infty} \|f - f_m\|_2 = 0$

(*D*) $(f_m)_{m=0}^\infty$ converge *uniformemente* a f (*en* $[0, P]$) sii ${}_m\underline{Lim}_{+\infty} \|f - f_m\|_\infty = 0$

La siguiente proposición nos va a indicar claramente algunas relaciones entre estas cuatro clases de convergencia.

***Proposición* 5.1**: Para toda $f \in E_P$: $\|f\|_1 \le \sqrt{P}\|f\|_2 \le P\|f\|_\infty$.

Demostración: Utilizaremos (5.2) sin mencionarlo explícitamente. Una desigualdad es muy sencilla de probar: $\|f\|_2^2 = \int_0^P |f(t)|^2 dt \le \int_0^P \|f\|_\infty^2 dt = P\|f\|_\infty^2$, por lo tanto: $\|f\|_2 \le \sqrt{P}\|f\|_\infty$. Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las funciones $|f|$ y la función constante 1 obtenemos la desigualdad que faltaba: $\|f\|_1 == \int_0^P |f(t)|dt = <1,|f|> \le \|1\|_2\|f\|_2 = \sqrt{P}\|f\|_2$. (Las funciones constantes son ubicuas: pertenecen a todos los espacios E_P) ■

***Corolario* 5.1**: Dada $f \in E_P$, sea $(f_m)_{m=0}^{\infty}$ la sucesión de sus sumas de Fourier. Entonces, se verifican las siguientes implicaciones:

Se verifica siempre: Teorema 2.1

$\underset{m}{Lim}_{\to+\infty}\|f - f_m\|_\infty = 0$ convergencia uniforme $\Rightarrow$ $\underset{m}{Lim}_{\to+\infty}\|f - f_m\|_2 = 0$ convergencia cuadrática $\Rightarrow$ $\underset{m}{Lim}_{\to+\infty}\|f - f_m\|_1 = 0$ convergencia en media

$\Downarrow$ (5.3)

f *es continua* (Teorema de Weierstrass) y además $\forall x \in [0,P]: \underset{m}{Lim}_{\to+\infty}|f(x) - f_m(x)| = 0$ convergencia puntual en todo [0,*P*]

Demostración: Las implicaciones de la primera línea horizontal se deducen directamente de la proposición anterior. El teorema de Weierstrass es aplicable en este caso pues las sumas de Fourier de *f* son funciones continuas. Veamos la implicación diagonal: por ser f límite uniforme de continuas es continua y por lo tanto $\not{f} = f$; entonces, para todo $x \in [0,P]$:

$$|f(x) - f_m(x)| \le \max\{|f(x) - f_m(x)| : 0 \le x \le P\} = \|f - f_m\|_\infty$$

■

Nota* 5.1*: El diagrama (5.3) resume visualmente las relaciones entre los distintos tipos de convergencia y al respecto es importante tener en cuenta que:
(*a*) Ninguna de las implicaciones reciprocas es válida.
(*b*) La convergencia cuadrática se verifica para cualquier $f \in \mathcal{E}_P$, como hemos demostrado en el Teorema 2.1. Por lo tanto, también se verifica siempre la convergencia en media.
(*c*) La convergencia uniforme a f de sus sumas de Fourier implica la continuidad de *f*, pero por favor, reitero mi ruego, no vale la recíproca. La continuidad de *f* no garantiza ni siquiera la convergencia puntual. Lo que sí se puede afirmar es que si f no es continua, entonces sus sumas de Fourier no convergen uniformemente a *f*.

Dada la fuerza exhibida por la convergencia uniforme, sería bueno contar con algún criterio para detectarla. Para la convergencia puntual ya vimos el Criterio de Dirichlet (Teorema 3.1) y las convergencias cuadráticas y en media se verifican automáticamente para toda $f \in \mathcal{E}_P$. Mencionamos a continuación algunos de estos criterios para la convergencia uniforme, sin demostrarlos. Como siempre, pueden consultarse en cualquiera de los textos ya recomendados. Recordemos que para cada $f \in \mathcal{E}_P$ y cada entero positivo *m*, $f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e_n$ es la *m*–ésima suma de Fourier de *f*.

Criterios para la convergencia uniforme

(a) Si la serie $\left(\sum_{n=-m}^{m} c_n \right)_{m=1}^{\infty}$ converge absolutamente, es decir: si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$, entonces por el criterio de Weierstrass, la serie de funciones $\left(\sum_{n=-m}^{m} c_n e_n \right)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente a una función $h \in \mathcal{E}_P$ (pues $|e_n(x)| = 1$ para todo entero *n* y todo real *x*). Ahora, por ser límite uniforme de continuas, esta función *h* es continua. Entonces, dada una función $f \in \mathcal{E}_P$ tal que la serie $\left(\sum_{n=-m}^{m} c_n(f) \right)_{m=1}^{\infty}$ converge absolutamente, se tiene una función continua $h \in \mathcal{E}_P$ tal que $\underset{m}{Lim} \left\| h - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e_n \right\|_{\infty} = 0$. Puesto que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, tenemos en particular que para cada $x \in [0, P]$ es $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{\frac{2n\pi}{P} ix}$. La pregunta natural es si $h = f$. Desde ya, si f no es continua esto no puede ocurrir y es muy fácil entonces construir un ejemplo donde la respuesta a la pregunta es negativa, pues los coeficientes de Fourier de h y de f son los mismos. Por ejemplo: sea h 2π–periódica tal que $h(x) = \pi - |x|$ para $-\pi \le x \le \pi$, y sea *f* la función 2π–periódica y seccionalmente continua f tal que $f(x) = h(x)$

si x no es múltiplo entero de 2π y $f(2k\pi)=18$ para todo entero k. Entonces, ambas funciones tienen la misma serie de Fourier, $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$, que converge absoluta y uniformemente (pues $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge y se puede aplicar el criterio de Weierstrass). Pero esta serie no converge a $f(x)$ en $x = 0$ (ni en los puntos $x=2k\pi$), pues por el criterio de Dirichlet aplicado a h, esta serie converge a $h(0)=\pi\neq f(0)$. Más aún, por el mismo criterio, sabemos que la serie converge puntualmente a h (en toda la rectal real). Queda la pregunta de si esta convergencia es uniforme.

Teorema* 5.*a: Si $f\in E_P$ es continua y además la serie $\left(\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)\right)_{m=1}^{\infty}$ converge absolutamente, entonces la serie $\left(\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e_n\right)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f. ■

[La demostración puede encontrarse en los textos ya citados y recomendados. También en el notable libro *Pour l'honneur de l'esprit humain*, de J. Dieudonné – Ed Hachette – 1987, donde puede leerse una demostración muy detallada de este teorema en particular]

Este criterio requiere examinar la serie y por lo tanto se necesita el cálculo de los coeficientes de Fourier de f para su aplicación. En este sentido, el siguiente es más práctico cuando no se tienen calculados los coeficientes de Fourier, pues solo requiere observar la función, no la serie.

Teorema* 5.*b: Si $f\in E_P$ es continua y, $f'\in E_P$ entonces su serie de Fourier $\left(\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)\right)_{m=1}^{\infty}$ converge absolutamente (y por lo tanto, por teorema anterior, converge uniformemente a f).

Demostración (muy esquemática): Los coeficientes de Fourier de f' son $c_n(f')=inc_n(f)$ y dado que $f'\in E_P$, se tiene $\sum_{n=-m}^{m}n^2|c_n(f)|^2\leq\frac{1}{P}\|f'\|_2^2$. Ahora,

$$\sum_{n=-m}^{m}|c_n(f)|=|c_0(f)|+\sum_{\substack{n=-m\\n\neq0}}^{m}\frac{1}{n}n|c_n(f)|\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq}|c_0(f)|+\sqrt{\sum_{0\neq n=-m}^{m}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{0\neq n=-m}^{m}n^2|c_n(f)|^2}<$$

$$<|c_0(f)|+\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{P}\|f'\|_2^2$$

■

***Nota* 5.2:** Cuando la serie $\left(\sum_{n=-m}^{m} c_n(f) \right)_{m=1}^{\infty}$ no converge absolutamente, aún puede ocurrir que la serie de Fourier sea uniformemente convergente, y esto puede probarse en algunos casos mediante los criterios de Dirichlet-Abel. Pero queda siempre el problema de saber si la serie de Fourier de f converge (puntual o uniformemente) a f.

---

§6. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER.

Cuando estudiamos series de potencias, nos encontramos con la maravillosa posibilidad de derivarlas e integrarlas término a término como si fueran sumas finitas (y sin alterar su radio de convergencia). Pero ése es un privilegio muy singular. Para las series de Fourier (y para las series de funciones en general) es necesario tener mucho cuidado con estas operaciones, en especial con la derivación. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{inx}$ converge absoluta y uniformemente en toda la recta real, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}$, obtenida derivando término a término, diverge en todos los puntos $2k\pi$, $k \in Z$. Los dos siguientes teoremas presentan condiciones suficientes, bastante sencillas de verificar en la práctica, para la integración y la derivación término a término de las series de Fourier. Recordemos que para cada $f \in \mathcal{E}_P$ y cada entero positivo m, $f_m = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e_n$ es la m–ésima suma de Fourier

Teorema* 6.*a : Si $f \in \mathcal{E}_P$ es derivable y $f' \in \mathcal{E}_P$, entonces la función $F : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F(x) = c_0(f)x + \frac{P}{2\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{n} e^{\frac{2n\pi}{P} ix} \qquad (6.1)$$

es una primitiva de f en el intervalo $[0, P]$.

***Demostración*:** Se deduce del Teorema 5.*b* de convergencia uniforme, pues las series uniformemente convergentes se pueden integrar término a término con el resultado esperado: para cada $x \in [0, P]$:

$$\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x f_m(t)dt\right| \le \int_0^x |f(t)-f_m(t)|dt \le \int_0^P |f(t)-f_m(t)|dt \le \int_0^P \|f-f_m\|_\infty dt = P\|f-f_m\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Entonces, para cada $x \in [0,P]$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^x e^{\frac{2n\pi}{P}it}dt = c_0(f)\int_0^x dt + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} c_n(f)\int_0^x e^{\frac{2n\pi}{P}it}dt =$$

$$= c_0(f)x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{Pc_n(f)}{i2n\pi}(e^{\frac{2n\pi}{P}ix}-1) = \overbrace{-\frac{P}{2\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{c_n(f)}{n}}^{cte} + c_0(f)x + \frac{P}{2\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{Pc_n(f)}{i2n\pi}e^{\frac{2n\pi}{P}ix}$$

Del Teorema 5.b se deduce que la serie $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{c_n(f)}{n}$ es absolutamente convergente, por serlo la serie $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} c_n(f)$. Por lo tanto, $F(x) = \int_0^x f(t)dt - cte = c_0(f)x + \frac{P}{2\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{c_n(f)}{n}e^{\frac{2n\pi}{P}ix}$ es una primitiva de f en [0, *P*]. ■

***Observación* 6.1**: Si $c_0(f)=0$, entonces la función (6.1) se extiende automáticamente a una primitiva periódica de *f* en toda la recta.

Teorema* 6.*b: Si $f \in E_P$ es de clase C^1 en (0, *P*) y se verifica $f(0^+) = f(P^-)$ entonces, en cada punto $x \in (0,P)$ donde existen (y son finitas) las derivadas laterales segundas $f''(x^+)$ y $f''(x^+)$ se verifica que:

$$f'(x) = \frac{2\pi i}{P}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n(f)e^{\frac{2n\pi}{P}ix} \qquad (6.2)$$

Demostración: Por ser f' continua en (0, *P*), se deduce del criterio de Dirichlet que en cada punto $x \in (0,P)$ donde existen (y son finitas) las derivadas laterales segundas $f''(x^+)$ y $f''(x^+)$ la serie de Fourier de f' converge a $f'(x)$. Por otro lado, los coeficientes de Fourier de f' son:

$$c_n(f') = \frac{1}{P}\int_0^P f'(t)e^{-\frac{2n\pi}{P}it}dt = \frac{1}{P}\left[f(P^-)e^{-\frac{2n\pi}{P}iP} - f(0^+) + \frac{2n\pi i}{P}\int_0^P f(t)e^{-\frac{2n\pi}{P}it}dt \right] =$$

$$= \frac{1}{P}\left[\overbrace{f(P^-) - f(0^+)}^{=0} + \frac{2n\pi i}{P}\int_0^P f(t)e^{-int}dt \right] = \frac{2n\pi i}{P}c_n(f)$$

En la segunda igualdad hemos integrado por partes. ■

Observación: Si $h:[a,b]\longrightarrow\Re$ es de clase C^1 en $[a,c)\cup(c,b]$, para algún punto intermedio $c\in(a,b)$, y h y h' tienen una discontinuidad de salto finito en c, entonces:

$$\int_a^b h'(t)dt = \int_a^c h'(t)dt + \int_c^b h'(t)dt = h(c^-) - h(a) + h(b) - h(c^+) = h(b) - h(a) - [h(c^+) - h(c^-)]$$

En general, si existe una cantidad finita de discontinuidades de este tipo, cada una de estas discontinuidades contribuye con el valor del salto en la expresión final de la integral. Por lo tanto, si no hubiéramos supuesto que f es de clase C^1 en el enunciado del teorema, la expresión de los coeficientes de la serie (6.2) no resultaría tan sencilla. Dejamos a cargo del interesado la expresión de los coeficientes de la serie de Fourier de f' bajo las hipótesis menos restrictivas de que f y f' son *seccionalmente* continuas.

---

§7. APLICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER A LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR UNIDIMENSIONAL FINITA.

El objetivo de este parágrafo es mostrar, esquemáticamente, la aplicación de las series de Fourier a la resolución de ciertos problemas de condiciones de contorno e iniciales como los que hemos presentado en el apunte sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Lo haremos con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} (i) \quad \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ (ii) \quad \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad t > 0 \\ (iii) \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{7.1}$$

En este problema, $u(x,t)$ es la temperatura – en el punto de abscisa x y en el instante t – de una varilla de longitud l, representada por el segmento de recta del plano cartesiano comprendido entre el origen de coordenadas y el punto de coordenadas (1,0). Se suponen dadas las condiciones de homogeneidad e isotropía para la validez de la ecuación (*i*) y las condiciones de contorno (*ii*) representan la aislación térmica de la varilla. La longitud l de la varilla, la constante de difusión μ (es positiva) y la distribución inicial u_0 son datos del problema. Ya hemos probado, en el apunte mencionado, la unicidad de la solución de este problema, hecho que nos va a facilitar enormemente la resolución y la exposición de la resolución. Las ideas centrales son, precisamente, las que llevaron a Fourier a iniciar el inmenso camino del análisis armónico.

Primer paso: Este paso consiste en conseguir una «buena cantidad» de soluciones de la parte lineal del problema, es decir, de (*i*) y (*ii*). Si la cantidad obtenida es buena o insuficiente, lo veremos en el tercer paso. En nuestro caso, es muy fácil verificar que para cualquier entero $n \geq 0$ las funciones $\alpha_n(x,t) = \cos(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$ y $\beta_n(x,t) = sen(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$ son soluciones de la ecuación (*i*). Las primeras, además, satisfacen las condiciones de contorno (*ii*), lo que no ocurre con las segundas.

Observación: Hay un método para encontrar estas soluciones que se conoce popularmente como *separación de variables* y consiste en buscar soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. En mi humildísima opinión, la fama de este método es exagerada y no pienso extenderme al respecto, para no interrumpir la secuencia de ideas del método de resolución original de Fourier. El interesado cuenta con abundante y excesiva literatura sobre el método de separación de variables.

Segundo paso: Cualquier combinación lineal de soluciones de (*i*) y (*ii*) también es solución de (*i*) y (*ii*). Por lo tanto, cualquier función de la forma $u(x,t)=\sum_{n=0}^{m} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$ es solución de (*i*) y (*ii*), cualesquiera sean las constantes $A_0, A_1,....,A_m$. Este paso se suele mencionar como aplicación del *principio de superposición*, terminología decimonónica para expresar la linealidad de las ecuaciones (*i*) y (*ii*).

Tercer paso: Para satisfacer la tercera y última condición, es decir: la condición inicial (*iii*), tenemos libres los coeficientes $A_0, A_1,....,A_m$. Planteamos $u(x,0)=\sum_{n=0}^{m} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)=u_0(x)$ y tenemos un problema: la función $\sum_{n=0}^{m} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)$ es una hermosa función 2*l*-periódica (y par), cualesquiera sean las constantes $A_0, A_1,....,A_m$. El dato inicial u_0 no tienen ninguna obligación de ser una función tan bonita. Por otra parte, está definida solamente en el intervalo [0, *l*], y ni sueña con ser periódica. Aquí es donde aparece la idea central de Jean-Baptiste Joseph Fourier: extendemos u_0 a una función periódica par $\tilde{u}_0$ y en lugar de una combinación lineal finita $u(x,t)=\sum_{n=0}^{m} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$ consideramos la serie $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$, buscando satisfacer la condición inicial (*iii*) en la forma $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)=\tilde{u}_0(x)$. Precisamente, el segundo miembro no es otra cosa que la serie de Fourier de $\tilde{u}_0$, y por lo tanto sabemos (porque nacimos después que Fourier) cómo quedan determinados los coeficientes A_n: para todo $n\geq 1$:

$$A_n = a_n(\tilde{u}_0)=\frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}\tilde{u}_0(t)\cos(\tfrac{2n\pi}{2l}t)dt \overset{\tilde{u}_0 \text{ es par}}{=} \frac{2}{l}\int_{0}^{l}\tilde{u}_0(t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}t)dt = \frac{2}{l}\int_{0}^{l}u_0(t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}t)dt$$

y $$A_0 = \tfrac{1}{2}a_0(\tilde{u}_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\tilde{u}_0(t)dt \overset{\tilde{u}_0 \text{ es par}}{=} \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\tilde{u}_0(t)dt = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}u_0(t)dt \qquad (7.2)$$

Por lo tanto, la solución del problema (7.1) es $u(x,t)=\sum_{n=0}^{m} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}t}$, donde los coeficientes están dados por las fórmulas (7.2). No haremos aquí el estudio de la convergencia de esta serie ni del problema de su derivación término a término. Es un estudio no trivial y en la práctica puede reemplazarse la serie $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)=u_0(x)$ por una suma finita que

aproxime «suficientemente» la condición inicial. De todos modos, observe que para $t > 0$, los factores exponenciales $e^{-\frac{n^2\pi^2}{\mu l}t}$ contribuyen maravillosamente a la convergencia de la serie.

APÉNDICE 1: *Remojito de Álgebra II. Sistemas ortogonales y proyecciones.*

El contenido de este apéndice es el de una nota sobre los sistemas ortogonales recientemente escrita para mi curso de Álgebra II. Lo transcribo porque introduce, precisamente, el aspecto geométrico de este apunte. Son las delicias de «cortar y pegar»

Aclaración: En este apéndice, los productos internos en los espacios vectoriales complejos V verifican $<\lambda v, w> = \lambda <v, w>$ y $<v, \lambda w> = \overline{\lambda} <v, w>$ para todo par de elementos v y w en V y todo escalar complejo λ. La mitad del planeta utiliza esta versión y la otra mitad utiliza $<\lambda v, w> = \overline{\lambda} <v, w>$ y $<v, \lambda w> = \lambda <v, w>$. Se trata de una simple cuestión de elección y costumbre, pues las teorías resultantes son completamente isomorfas.

Los sistemas ortogonales poseen determinadas ventajas prácticas y teóricas que los hacen muy buscados por ingenieros y matemáticos. Recordemos: dado un espacio vectorial V (real o complejo, de dimensión finita o no) con producto interno $< . >$, un *sistema ortogonal* en V es un simplemente un conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_m\} \subset V$ de vectores ortogonales dos a dos, es decir: para todo par de índices i y j entre 1 y m: $i \neq j \Rightarrow < w_i, w_j > = 0$. Si además, todos estos vectores tienen norma 1, el sistema se dice *ortonormal*.

***Observación* 1:** A pesar de la notación habitual $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, estos sistemas son conjuntos <u>ordenados</u> con lo cual habría que escribir, por ejemplo, $[w_1, w_2, ..., w_m]$. Lo mismo pasa con las bases, pero no vamos a cambiar aquí la notación utilizada en este curso y en muchos textos clásicos.

***Observación* 2:** La definición de sistemas ortogonales se extiende a conjuntos infinitos, pero los más importantes para las aplicaciones son los finitos y los *numerables*, es decir: las sucesiones $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ de vectores de V tales que para todo par de enteros positivos distintos i y j se verifica $< w_i, w_j > = 0$. Veremos ejemplos de estos últimos (en espacios de dimensión infinita).

Veamos una primera propiedad sencilla pero importante de los sistemas ortogonales

***Proposición* 1**:

(*i*) Un sistema ortogonal $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall i \in \{1,2,...,m\}: w_i \neq 0_V$

(*ii*) Los sistemas ortonormales son linealmente independientes.

Prueba: (*ii*) es consecuencia inmediata de (*i*), pues los vectores de norma 1 son no nulos. Probemos (*i*): La implicación $\Rightarrow$ es inmediata, pues todo sistema que contiene al 0_V es linealmente dependiente. Veamos $\Leftarrow$: nuestra hipótesis es que $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es un sistema ortogonal de vectores no nulos y tenemos que probar que entonces el sistema es l. i.

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_m w_m = 0_V \Rightarrow \forall i \in \{1,2,...,m\}: < \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_m w_m, w_i > = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,2,...,m\}: \lambda_1 < w_1, w_i > + \lambda_2 < w_2, w_i > + ... + \lambda_m < w_m, w_i > = 0 \Rightarrow$$

(Todos los términos de la suma son nulos salvo el *i*-ésimo, por tratarse de un sistema ortogonal)

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,2,...,m\}: \lambda_i \overbrace{< w_i, w_i >}^{\neq 0 \text{ por hipótesis}} = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,2,...,m\}: \lambda_i = 0 .$$

Hemos probado que el sistema es linealmente independiente ■

Veamos ahora la propiedad práctica fundamental de los sistemas ortogonales de vectores no nulos.

***Proposición* 2**: Sea $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ un sistema ortogonal de vectores no nulos (por lo tanto, por la propiedad anterior, el sistema es l. i.). Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$v \in gen\{w_1, w_2, ..., w_m\} \Leftrightarrow v = \frac{< v, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{< v, w_2 >}{\|w_2\|^2} w_2 + ... + \frac{< v, w_m >}{\|w_m\|^2} w_m \qquad (*)$$

Demostración: La implicación $\Leftarrow$ es trivial, pues los elementos de $gen\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ son precisamente las combinaciones lineales de los vectores $w_1, w_2, ..., w_m$. Para demostrar $\Rightarrow$ tomemos un elemento cualquiera $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_m w_m$ de $gen\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ y probemos que $\lambda_i = \frac{< v, w_i >}{\|w_i\|^2}$ para cada $i \in \{1,2,...,m\}$.

Ahora bien, de la igualdad $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_m w_m$ resulta, para cada $i \in \{1,2,...,m\}$:

$$< v, w_i > = \lambda_1 < w_1, w_i > + \lambda_2 < w_2, w_i > + ... + \lambda_m < w_m, w_i > .$$

Como en la demostración de la proposición anterior esta igualdad se reduce a $< v, w_i > = \lambda_i \|w_i\|^2$ Puesto que por hipótesis $\|w_i\|^2 \neq 0$, tenemos $\lambda_i = \dfrac{< v, w_i >}{\|w_i\|^2}$, lo que termina la demostración. ■

Veamos lo que está diciendo esta propiedad y para esto nos referiremos a una situación en la que sabemos que se verifica que $v \in gen\{w_1, w_2, ..., w_m\}$. Supóngase que usted tiene una base $\{v_1, v_2, ..., v_{18}\}$ de $\Re^{18}$ y un vector $v \in \Re^{18}$, y lo que necesita es encontrar las coordenadas $c_1, c_2, ..., c_{18}$ de v respecto de esa base. Usted sabe cómo hacerlo, desde que era chiquito. La igualdad $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_{18} v_{18}$ entre dos vectores de $\Re^{18}$, expresada en las coordenadas canónicas de estos vectores, equivale un sistema de 18 ecuaciones lineales en las incógnitas $c_1, c_2, ..., c_{18}$. Le va a llevar un poco de tiempo… (si está pensando en una calculadora, piense en lo que se tarda cargar los datos. Además, piense en dimensiones mayores, que son necesarias en muchas aplicaciones, como veremos en otra nota). En cambio, si la base $\{v_1, v_2, ..., v_{18}\}$ es ortogonal (por ejemplo respecto del producto interno canónico en $\Re^{18}$), no necesita resolver ningún sistema. Simplemente es $c_i = \dfrac{< v, v_i >}{\|v_i\|^2}$ para cada $i \in \{1,2,...,18\}$. Esta eficiencia para el cálculo de las funciones coordenadas respecto de una base ortogonal hace que los sistemas ortogonales sean muy buscados en la práctica, y es – en gran medida – la motivación para el algoritmo de Gram-Schmidt (ver ejercicio 3.26).

***Definición* 1**: Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita o no. Una proyección en V es una transformación lineal $\Pi : V \longrightarrow V$ tal que

$$\boxed{\Pi \circ \Pi = \Pi} \qquad (1)$$

Una de las inmensas ventajas de esta definición es que las demás propiedades importantes de las proyecciones son consecuencias inmediatas de (1), como veremos a continuación. Otra de las ventajas, también inmensa, es que en esta definición – y sus consecuencias inmediatas – V puede ser un espacio vectorial cualquiera, y no requiere que V sea de dimensión finita. Observe que de

acuerdo con esta definición, existen siempre al menos dos proyecciones en cualquier espacio V: la identidad I_V y la función nula. Dado el escaso interés práctico de estas dos proyecciones, las denominaremos «triviales» y nos concentraremos en las proyecciones no triviales.

***Proposición* 3**: Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita o no, y sea $\Pi : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $\Pi \circ \Pi = \Pi$. Entonces:

(i) Para todo $v \in V$: $v \in IM(\Pi) \Leftrightarrow \Pi(v) = v$.

(ii) $V = IM(\Pi) \oplus NU(\Pi)$ (2)

Demostración de (i): La implicación $\Leftarrow$ es inmediata por la definición misma de imagen de una función. Veamos $\Rightarrow$: Si $v \in IM(\Pi)$, por definición de imagen existe $u \in V$ tal que $v = \Pi(u)$. Entonces, $\Pi(v) = \Pi(\Pi(u)) \overset{\Pi \circ \Pi = \Pi}{=} \Pi(u) = v$.

Demostración de (ii): Probemos primero que $V = IM(\Pi) + NU(\Pi)$, es decir, que para cada $v \in V$ existen $\breve{v} \in IM(\Pi)$ y $v_0 \in NU(\Pi)$ tales que $v = \breve{v} + v_0$. Pero esto es muy sencillo, pues para todo $v \in V$ se verifica trivialmente la igualdad $v = \Pi(v) + v - \Pi(v)$, donde $\Pi(v) \in IM(\Pi)$. Por lo tanto, lo único que nos queda por hacer es comprobar que $v - \Pi(v) \in NU(\Pi)$, es decir, que $\Pi(v - \Pi(v)) = 0_V$. Veamos: $\Pi(v - \Pi(v)) = = \Pi(v) - \Pi(\Pi(v)) \overset{\Pi \circ \Pi = \Pi}{=} \Pi(v) - \Pi(v) = 0_V$. Es decir: $v = \overbrace{\Pi(v)}^{\breve{v} \in IM(\Pi)} + \overbrace{v - \Pi(v)}^{v_0 \in NU(\Pi)}$. Ahora, probemos que la suma es directa. Tratándose de <u>dos</u> subespacios, recordemos que basta con probar que $IM(\Pi) \cap NU(\Pi) = \{0_V\}$. Dado $v \in IM(\Pi) \cap NU(\Pi)$, por ser v un elemento de $IM(\Pi)$, es $v = \Pi(v)$, por lo demostrado en (i). Pero además, $v \in NU(\Pi)$, es decir: $\Pi(v) = 0_V$, con lo cual tenemos que $v = \Pi(v) = 0_V$ ■

Manteniendo la terminología de los ejemplos, decimos que Π *es una proyección <u>en</u> V <u>sobre</u> $IM(\Pi)$ <u>en la dirección</u> $NU(\Pi)$*.

La Proposición 1 implica, entre otras cosas, que cada proyección en un espacio vectorial induce una descomposición del mismo como suma directa de dos subespacios (la imagen y el núcleo de la proyección). Es interesante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, que recíprocamente toda descomposición de un espacio como suma directa de un espacio determina una única proyección, como se enuncia detalladamente en la siguiente proposición.

***Proposición* 4**: Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita o no, y sean S y S_0 dos subespacios de V tales que $V = S \oplus S_0$. Entonces, existe una única proyección $\Pi : V \longrightarrow V$ tal que $IM(\Pi) = S$ y $NU(\Pi) = S_0$.

Demostración: Por definición de suma directa, para cada $v \in V$ existen un <u>único</u> $v_S \in S$ y un <u>único</u> $v_0 \in S_0$ tales que $v = v_S + v_0$. Entonces queda bien definida la función $\Pi : V \longrightarrow V$ tal que $\Pi(v) = v_S$. Probemos primero que Π es lineal: sean *u* y *v* dos elementos cualesquiera de *V* y λ y μ dos escalares. Sea $w = \lambda u + \mu v$. Entonces, existen <u>únicos</u> u_S, v_S, w_S en *S* y <u>únicos</u> u_0, v_0 y w_0 en S_0 tales que $u = u_S + u_0$, $v = v_S + v_0$ y $w = w_S + w_0$. Por un lado tenemos entonces que $w = \lambda u + \mu v = \lambda(u_S + u_0) + \mu(v_S + v_0) = \overbrace{\lambda u_S + \mu v_S}^{\in S} + \overbrace{\lambda u_0 + \mu v_0}^{\in S_0}$ y por otro lado $w = w_S + w_0$. Por la unicidad de w_S y de w_0, se tiene que $w_S = \lambda u_S + \mu v_S$, es decir: $\Pi(w) = \lambda\Pi(u) + \mu\Pi(v)$. Pero, precisamente, $w = \lambda u + \mu v$, es decir: $\Pi(\lambda u + \mu v) = \lambda\Pi(u) + \mu\Pi(v)$, lo que prueba la linealidad de Π. Veamos ahora que $\Pi \circ \Pi = \Pi$. Para cada $s \in S$, $s = \underbrace{s}_{\in S} + \underbrace{0_V}_{\in S_0}$, por lo tanto (unicidad….), $\Pi(s) = s$. Ahora, para cada $v = v_S + v_0$, por la definición de Π es $\Pi(v) = v_S \in S$ y por lo tanto $\Pi(\Pi(v)) = \Pi(v_S) \overset{v_S \in S}{=} v_S = \Pi(v)$. Finalmente, debemos probar que $IM(\Pi) = S$ y $NU(\Pi) = S_0$. La inclusión $IM(\Pi) \subseteq S$ se deduce inmediatamente de la definición misma de Π, pues para cada $v \in V$, $v_S \in S$. La inclusión $S \subseteq IM(\Pi)$ se deduce de la identidad $\Pi(s) = s$, que se verifica para todo $s \in S$ y que hemos demostrado recién. Dejamos como ejercicio (muy sencillito) demostrar que $NU(\Pi) = S_0$ ■

Veamos ahora cómo, en espacios vectoriales con producto interno, existe una definición muy natural de proyección ortogonal.

***Definición* 2**: Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita o no, con un producto interno $< , >$. Una *proyección ortogonal* en V (respecto del producto interno dado) es una proyección $\Pi : V \longrightarrow V$ tal que $IM(\Pi) \perp NU(\Pi)$

Desde el punto de vista práctico, detectar cuándo una proyección es ortogonal utilizando esta definición puede resultar complicado. A veces, es mejor utilizar la siguiente propiedad.

***Proposición* 3**: Sea Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita o no, con producto interno < , >. Entonces, una proyección $\Pi : V \longrightarrow V$ es ortogonal si y solamente si para todo par de elementos v y w en V se verifica:

$$< \Pi(v), w > = < v, \Pi(w) > \qquad (3)$$

Demostración: Supongamos primero que se verifica (3) y probemos que $IM(\Pi) \perp NU(\Pi)$. Dados $v \in IM(\Pi)$ y $w \in NU(\Pi)$, tenemos $\Pi(v) = v$ y $\Pi(w) = 0_V$, por lo tanto

$$< v, w > = < \Pi(v), w > \overset{(3)}{=} < v, \Pi(w) > = < v, 0_V > = 0$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $IM(\Pi) \perp NU(\Pi)$ y probemos que se verifica (3). Para cada par de elementos v y w en V tenemos las descomposiciones $v = \Pi(v) + v_0$ y $w = \Pi(w) + w_0$ donde $v_0 \in NU(\Pi)$ y $w_0 \in NU(\Pi)$. Entonces, por un lado, tenemos

$$< \Pi(v), w > = < \Pi(v), \Pi(w) + w_0 > = \quad < \Pi(v), \Pi(w) > + < \overbrace{\Pi(v)}^{\in IM(\Pi)}, \overbrace{w_0}^{\in NU(\Pi)} > = < \Pi(v), \Pi(w) >$$

(la última igualdad se debe a la hipótesis $IM(\Pi) \perp NU(\Pi)$). Análogamente:

$$< v, \Pi(w) > = < \Pi(v) + v_0, \Pi(w) > = \quad < \Pi(v), \Pi(w) > + < \overbrace{v_0}^{\in NU(\Pi)}, \overbrace{\Pi(w)}^{\in IM(\Pi)} > = < \Pi(v), \Pi(w) >$$

Hemos probado que para todos v y w en V se verifica

$$< \Pi(v), w > = < v, \Pi(w) > = < \Pi(v), \Pi(w) >$$

■

Momento cultural: las transformaciones lineales $T : V \longrightarrow V$ que verifican, para todo par de elementos v y w en V, la igualdad $< T(v), w > = < v, T(w) >$, se denominan *operadores autoadjuntos*. Respecto de la palabra «operador» (si mal no recuerdo creo haber hecho la aclaración en notas anteriores), simplemente es un sinónimo de *función* entre espacios vectoriales. Históricamente, se comenzó a utilizar para las transformaciones lineales entre espacios de funciones.

Vamos cerrando este apéndice con una construcción práctica que se necesita para la presentación geométrica de las series de Fourier.

***Proposición* 4**: Sea V un espacio vectorial (de dimensión finita o no, real o complejo), con producto interno $< , >$ y un subespacio $S \subset V$ de dimensión finita . Entonces:

(*i*) Existe una base ortogonal $B_S^o = \{w_1, w_2, ..., w_r\}$ de S (r = dimensión de S, obviamente)

(*ii*) La función $\Pi : V \longrightarrow V$ tal que

$$\Pi(v) = \frac{< v, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{< v, w_2 >}{\|w_2\|^2} w_2 + ... + \frac{< v, w_r >}{\|w_r\|^2} w_r \qquad (4)$$

es la proyección ortogonal en V sobre S.

Demostración: Dada una base $B_S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ de S, aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a esta base se obtiene una base ortogonal $B_S^o = \{w_1, w_2, ..., w_r\}$ de S. Ahora, probemos que la función $\Pi : V \longrightarrow V$ dada por (4) es la proyección ortogonal sobre S. Hay que hacerlo cuidadosamente, pues V puede ser de dimensión infinita (ver llamado de atención a continuación). Veamos un poco:

(a) La linealidad de Π se demuestra haciendo las cuentitas a partir de la definición (4) y utilizando la linealidad del producto interno respecto de su primera variable.

(b) $\Pi \circ \Pi = \Pi$: de la definición (4) se tiene, en particular, que $\Pi(w_1) = w_1$, $\Pi(w_2) = w_2$, …, $\Pi(w_r) = w_r$. Para esto es clave el hecho de que los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_r$ son ortogonales. Ahora, aplicando Π en ambos miembros de (4) y utilizando la linealidad de Π:

$$\Pi(v) = \frac{< v, w_1 >}{\|w_1\|^2} \overbrace{\Pi(w_1)}^{=w_1} + \frac{< v, w_2 >}{\|w_2\|^2} \overbrace{\Pi(w_2)}^{=w_2} + ... + \frac{< v, w_r >}{\|w_r\|^2} \overbrace{\Pi(w_r)}^{=w_r} = \Pi(v)$$

(c) $IM(\Pi) = S$: la inclusión $IM(\Pi) \subseteq S$ es trivial, pues para cualquier $v \in V$, el segundo miembro de (4) es combinación lineal de los elementos de la base ortogonal de S. Ahora, dado $s \in S$, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ tales que $s = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_r w_r$. De aquí resulta, teniendo en cuenta la ortogonalidad de $w_1, w_2, \ldots, w_r$, que $< s, w_1 > = \lambda_1 < w_1, w_1 >$, es decir: $\lambda_1 = \frac{< s, w_1 >}{\|w_1\|^2}$. Análogamente se deduce que $\lambda_2 = \frac{< s, w_2 >}{\|w_2\|^2}, \ldots, \lambda_r = \frac{< s, w_r >}{\|w_r\|^2}$, o sea:

$$s = \frac{< s, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{< s, w_2 >}{\|w_2\|^2} w_2 + ... + \frac{< s, w_r >}{\|w_r\|^2} w_r = \Pi(s) \in IM(\Pi)$$

(d) Nos falta probar que $IM(\Pi) \perp NU(\Pi)$. Lo que ya sabemos (Proposición 1) es que $V = IM(\Pi) \oplus NU(\Pi)$ y que $\forall v \in V : v \in IM(\Pi) \Leftrightarrow \Pi(v) = v$. Además, acabamos de probar que $IM(\Pi) = S$. Por otra parte,

$$v \in NU(\Pi) \Leftrightarrow \Pi(v) = 0_V \overset{(4)}{\Leftrightarrow} < v, w_1 > = < v, w_2 > = ... = < v, w_r > = 0 \Leftrightarrow v \in S^{\perp}$$

(La última doble implicación se debe a que $B_S^o = \{w_1, w_2, ..., w_r\}$ es base de S y por lo tanto $\forall s \in S :< v, s > = 0 \Leftrightarrow < v, w_1 > = < v, w_2 > = ... = < v, w_r > = 0$. Atención que $S^{\perp}$ puede ser de dimensión infinita). Por lo tanto hemos probado que $V = IM(\Pi) \oplus NU(\Pi)$, que $IM(\Pi) = S$ y que $NU(\Pi) = S^{\perp}$.

Atención: Si V es de dimensión infinita, puede ocurrir que $V \neq S \oplus S^{\perp}$, donde $S^{\perp} = \{v \in V :< v, s > = 0 \text{ para todo } s \in S\}$. Por ejemplo: en el espacio vectorial real $C^0([-1, 1], \Re)$ de las funciones continuas $f : [-1, 1] \longrightarrow \Re$ con el producto interno $< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, consideremos el subespacio $S = \{s \in C^0([-1, 1], \Re) : s(0) = 0\}$. Se puede probar sin demasiadas dificultades (ejercicio de Análisis I) que si $h \in C^0([-1, 1], \Re)$ verifica $< h, s > = \int_{-1}^{1} h(t)s(t)dt = 0$ para toda $s \in S$, entonces h es necesariamente la función nula. Es decir: $S^{\perp} = \{0_V\}$, por lo tanto en este caso se tiene que $S \oplus S^{\perp} = S \neq V$. Estas «patologías» no ocurren cuando hay una proyección ortogonal (no trivial) presente, pues automáticamente V se descompone obedientemente en la forma $V = IM(\Pi) \oplus^{\perp} NU(\Pi)$.

APÉNDICE 2: *Polinomios Trigonométricos*

Un polinomio trigonométrico es la composición de un polinomio $P(x,y)$ en dos variables, con coeficientes complejos, con las funciones circulares, es decir: son funciones $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma $f(\theta) = P(\cos(\theta), sen(\theta)) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \lambda_{nm} \cos(\theta)^n sen(\theta)^m$, donde los coeficientes λ_{nm} son constantes complejas. Estos polinomios nos interesan por la siguiente propiedad:

Proposición:

(*i*) Sea $f(\theta)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\lambda_{nm}\cos(\theta)^n sen(\theta)^m$ un polinomio trigonométrico. Entonces, existe un entero positivo *K* y 2*K*+1 constantes complejas $c_{-K},c_{-K+1},...,c_K$ tales que $f(\theta)=\sum_{k=-K}^{K}c_k e^{ik\theta}$ para todo $\theta\in\Re$.

(*ii*) Toda función de la forma $f(\theta)=\sum_{k=-K}^{K}c_k e^{ik\theta}$ es un polinomio trigonométrico.

Demostración: (*ii*) Es consecuencia inmediata de las identidades

$$e^{ik\theta}=(\cos(\theta)+isen(\theta))^k=\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}i^h\cos(\theta)^{k-h}sen(\theta)^h$$

Demostración de (*i*): Alcanza con probar que cada una de las funciones $\cos(\theta)^n sen(\theta)^m$ es combinación lineal de exponenciales. Utilizando las expresiones $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $sen(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, podemos expresar cada término del polinomio trigonométrico como combinación lineal de exponenciales:

$$\cos(\theta)^n sen(\theta)^m=\sum_{l=0}^{L}\gamma_{mnl}e^{il\theta}$$

Probemos esto:

$$\cos(\theta)^n=\frac{1}{2^n}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-k)\theta}e^{-ik\theta}=\sum_{k=0}^{n}\overbrace{\left[\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right]}^{\alpha_{nk}}e^{i(n-2k)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}e^{i(n-2k)\theta}$$

$$sen(\theta)^m=\frac{1}{(2i)^m}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^m=\frac{1}{(2i)^m}\sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}e^{i(m-h)\theta}(-1)^h e^{-ih\theta}=$$

$$=\sum_{h=0}^{m}\overbrace{\left[\frac{(-1)^h}{(2i)^m}\binom{m}{h}\right]}^{\beta_{mh}}e^{i(m-2h)\theta}=\sum_{h=0}^{m}\beta_{mh}e^{i(m-2h)\theta}$$

Entonces,

$$\cos(\theta)^m sen(\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m}\alpha_{nk}\beta_{mh}e^{i(n-2k)\theta}e^{i(m-2h)\theta} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m}\alpha_{nk}\beta_{mh}e^{i(n+m-2k-2h)\theta}$$

es la expresión buscada (parece complicada, pero es una combinación lineal de las exponenciales $e^{-i(n+m)\theta}, e^{-i(n+m-1)\theta}, ..., e^{i(n+m)\theta}$). ■

APÉNDICE 3: *Demostración del Teorema* 3.1 (*Condiciones de Dirichlet*)

Para simplificar y abreviar la escritura, consideraremos el caso $P = 2\pi$, es decir: demostraremos el teorema para funciones 2π-periódicas. No se trata de una restricción muy seria que digamos: dada una función P–periódica $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$, la función $\breve{f}:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $\breve{f}(x) = f\left(\frac{P}{2\pi}x\right)$ es claramente 2π–periódica, y podemos recuperar la función original de la manera obvia: $f(x) = \breve{f}\left(\frac{2\pi}{P}x\right)$. Este cambio de escala nos permite extender la demostración del caso $P = 2\pi$ a un período $P > 0$ cualquiera. Antes de pasar directamente a la demostración, recordemos que para cada función $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ seccionalmente continua y 2π–periódica se tiene la igualdad $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ (Lema 2.1).

Primer caso: en un punto x donde f es derivable:

$$f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e^{inx} = f(x) - \sum_{n=-m}^{m}\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-in.t}dt\right)e^{inx} = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)\tfrac{1}{2\pi}\sum_{n=-m}^{m}e^{in(x-t)}\right]dt \qquad (1)$$

Por otra parte, si $e^{i\theta} \neq 1$:

$$\sum_{n=-m}^{m}e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{m}e^{-in\theta} + 1 + \sum_{n=1}^{m}e^{in\theta} = -1 + \sum_{n=0}^{m}e^{-in\theta} + 1 - 1 + \sum_{n=0}^{m}e^{in\theta} = -1 + \frac{1-e^{-i(m+1)\theta}}{1-e^{-i\theta}} + \frac{1-e^{i(m+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} =$$

$$= -1 + \frac{e^{\frac{\theta}{2}i} - e^{-\frac{2m+1}{2}\theta i}}{e^{\frac{\theta}{2}i} - e^{-\frac{\theta}{2}i}} + \frac{e^{-\frac{\theta}{2}i} - e^{\frac{2m+1}{2}\theta i}}{e^{-\frac{\theta}{2}i} - e^{\frac{\theta}{2}i}} = -1 + \frac{e^{\frac{\theta}{2}i} - e^{-\frac{2m+1}{2}\theta i}}{2i.sen(\frac{\theta}{2})} + \frac{e^{-\frac{\theta}{2}i} - e^{\frac{2m+1}{2}\theta i}}{-2i.sen(\frac{\theta}{2})} =$$

$$= \frac{-2i.sen(\frac{\theta}{2}) + e^{\frac{\theta}{2}i} - e^{-\frac{2m+1}{2}\theta i} - e^{-\frac{\theta}{2}i} + e^{\frac{2m+1}{2}\theta i}}{2i.sen(\frac{\theta}{2})} =$$

$$= \frac{-2i.sen(\frac{\theta}{2}) + 2i.sen(\frac{\theta}{2}) + 2i.sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{2i.sen(\frac{\theta}{2})} = \frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}$$

Obsérvese que ${}_{\theta}\underrightarrow{Lim}_{2k\pi} \frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})} = 2m+1$. Por lo tanto, para cada entero positivo m, la función $D_m : \Re \to \Re$ tal que para todo $\theta \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es $D_m(\theta) = \frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{2\pi\, sen(\frac{\theta}{2})}$ y $D_m(2k\pi) = 2m+1$ (para todo entero k), resulta continua en toda la recta real (más aún: su expresión como suma de exponenciales implica que es analítica), verifica la identidad $D_m(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-m}^{m} e^{i\theta}$, es 2π – periódica y es par. Además, integrando $D_m(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-m}^{m} e^{i\theta}$ se obtiene $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(\theta)d\theta = 1$ (notar que esto equivale a la igualdad $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{1}{2}\theta)} d\theta = 2\pi$, que no es trivial). Esta función se denomina núcleo de Dirichlet (de orden m). Reemplazando en (1) se tiene, entonces:

$$f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e^{inx} = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_m(x-t)dt \qquad (2)$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = t - x$ en la integral:

$$f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e^{inx} = f(x) - \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\theta)D_m(-\theta)d\theta \qquad (3)$$

Dado que $D_m(-\theta) = D_m(\theta)$ y que el integrando es 2π – periódico (respecto de θ), tenemos

$$f(x)-\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx}=f(x)-\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\theta)D_m(\theta)d\theta \qquad (4)$$

Ahora, utilizando que $\int_{-\pi}^{\pi}D_m(\theta)d\theta=1$ podemos escribir

$$f(x)-\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx}=f(x)\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}D_m(\theta)d\theta}^{=1}-\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\theta)D_m(\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\theta)]D_m(\theta)d\theta$$

o bien

$$\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx}-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\theta)-f(x)]D_m(\theta)d\theta \qquad (5)$$

o bien

$$\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx}-f(x)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\theta)-f(x)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \qquad (6)$$

Ahora, el Lema de Riemann-Lebesgue[1] aplicado a $h_x(\theta)=\dfrac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta}\dfrac{\theta}{sen(\frac{\theta}{2})}$ si $0<|\theta|<\pi$ y $h_x(0)=2f'(x)$ (y extensión periódica) termina la demostración para el caso en que f es derivable en *x*.

[1]***Aclaración***: Del lema de Riemann-Lebesgue se tiene que para cada $f\in E_{2\pi}$ se verifica:

$$\underset{n}{Lim}_{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt=0=\underset{n}{Lim}_{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)sen(nt)dt$$

Entonces, $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)sen(\frac{2m+1}{2}t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{f(t)\cos(\frac{1}{2}t)}^{\in E_{2\pi}}sen(mt)dt+\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{f(t)sen(\frac{1}{2}t)}^{\in E_{2\pi}}\cos(mt)dt\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

***Segundo caso*:** existencia de derivadas laterales en un punto de discontinuidad de salto finito:

Sea $\widetilde{f}(x)=f(x)$ si $x\neq x_0$, y $\widetilde{f}(x_0)=\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. Observar que $c_n(\widetilde{f})=c_n(f)$. Entonces,

$$\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx_0}-\widetilde{f}(x_0)=$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^+)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \quad + \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^-)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta$$

Cambiando de variable en la segunda integral, $t=-\theta$,

$$\sum_{n=-m}^{m}c_n(f)e^{inx_0}-\widetilde{f}(x_0)=$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^+)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \quad - \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0-t)-\tfrac{1}{2}f(x_0^-)]\frac{sen(-\frac{2m+1}{2}t)}{sen(-\frac{t}{2})}dt=$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^+)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \quad - \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0-t)-\tfrac{1}{2}f(x_0^-)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}t)}{sen(\frac{t}{2})}dt=$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^+)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \quad + \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0-t)-\tfrac{1}{2}f(x_0^-)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}t)}{sen(\frac{t}{2})}dt=$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0+\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^+)+\tfrac{1}{2}\widetilde{f}(x_0-\theta)-\tfrac{1}{2}f(x_0^-)]\frac{sen(\frac{2m+1}{2}\theta)}{sen(\frac{\theta}{2})}d\theta \quad =$$

Ahora, la función

$$h_{x_0}(\theta)=\frac{\frac{1}{2}[\widetilde{f}(x_0+\theta)-f(x_0^+)]+\frac{1}{2}[\widetilde{f}(x_0-\theta)-f(x_0^-)]}{\theta}\frac{\theta}{sen(\frac{\theta}{2})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\widetilde{f}(x_0-\theta)-f(x_0^+)]+\frac{1}{2}[\widetilde{f}(x_0+\theta)-f(x_0^-)]}{\theta}\frac{\theta}{sen(\frac{\theta}{2})}$$

tiende a $\left[\frac{1}{2}f'(x_0^+)+\frac{1}{2}f'(x_0^-)\right]2$ cuando $\theta\to 0^+$ y cuando $\theta\to 0^-$. Es decir: tiene límite (finito) cuando $\theta\to 0$ y por lo tanto se le puede aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue, concluyendo la demostración. ■

FIN DEL APUNTE SOBRE SERIES DE FOURIER