

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

BREVE APUNTE SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

D. Prelat – 2020

§1. INTRODUCCIÓN

Las series de Fourier tuvieron tanto éxito (además de promover tantas discusiones entre los matemáticos del siglo XIX) que el mismo Fourier comenzó a pensar en una herramienta análoga para funciones no periódicas. El resultado fue la transformación integral que hoy lleva su apellido y que se ha constituido en una herramienta muy poderosa en aplicaciones tan disímiles como el procesamiento de señales y de imágenes, el estudio de fenómenos cuánticos, tomografía computada, genética y otras áreas de la medicina y la biología. Desde el punto de vista matemático, la Transformación de Fourier dio origen, junto con las series de Fourier, a la teoría que hoy se conoce como Análisis Armónico y que ha tenido un desarrollo importantísimo en el siglo XX. Desde el punto de vista de sus aplicaciones a la física matemática, la transformación de Fourier tiene una propiedad clave para la resolución de ecuaciones diferenciales, que es la de convertir un operador de derivación en un operador algebraico muy sencillo. Pero esta propiedad no es exclusiva de la transformación de Fourier. Las primeras transformaciones integrales que tienen esta propiedad fueron descubiertas (o inventadas) por Leonhard Euler (1707–1783). Entre ellas, la que posteriormente terminó llevando el apellido de Laplace.

Aclaración muy necesaria: que dicha transformada integral llevara su apellido nunca fue intención de Laplace, que sentía una profunda admiración por Euler y a quien llamaba «el maestro de todos nosotros». Ya que estamos, y a modo de intermezzo cultural, veamos una lista cronológica de los matemáticos que hemos ido nombrando a lo largo de estos apuntes. En la misma lista agregamos un par de hitos históricos que influyeron de manera decisiva en la vida de varios de ellos.

René Descartes (1596 - 1650)
 Pierre de Fermat (1607 - 1665)
 Isaac Newton (1642 - 1727)
 Leonhard Euler (1707 - 1783)
 Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783)
 Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)
 Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)
 Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)
 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)
Revolución Francesa: 1789 - 1799
 Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)
 Niels Henrik Abel (1802 - 1829)
Imperio Napoleónico: 1804 - 1814
 Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)
 Évariste Galois (1811 - 1832)
 Karl Weierstrass (1815 - 1897)
 Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Nosotros estudiaremos, en el apunte siguiente, la Transformación de Laplace. En este, daremos una breve introducción a la Transformación de Fourier, mencionando sus propiedades básicas y algunos aspectos geométricos muy interesantes.

§2. DE LAS SERIES DE FOURIER A LAS INTEGRALES DE FOURIER: UNA PRESENTACIÓN HEURÍSTICA.

Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ una función seccionalmente continua con derivadas laterales finitas en cada punto de la recta real. Para facilitar la exposición, vamos a suponer que en cada punto de discontinuidad x_0 , el valor de f en ese punto es el promedio del salto, es decir: $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$. Para cada número real $l > 0$, sea $f_l : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ la extensión $2l$ -periódica de la restricción de f al intervalo $[-l, l]$, es decir: para cada $x \in [-l, l]$ es $f_l(x) = f(x)$ y para cualquier entero k y cualquier real x es $f_l(x + 2kl) = f(x)$ (hacer un dibujito). Entonces, cada una de estas funciones f_l verifica las condiciones de Dirichlet de convergencia puntual de su serie de Fourier, como hemos visto en el apunte precedente. Por lo tanto, las sumas de Fourier $f_{l,m} = \sum_{n=-m}^m c_n(f_l) e_n$ de f_l convergen puntualmente a f_l en cada uno de los puntos del intervalo $(-l, l)$, es decir: $\forall x \in (-l, l): \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=-m}^m c_n(f_l) e^{\frac{2n\pi}{2l}ix} = f_l(x)$. La idea, muy sencilla pero poco precisa, es que «cuanto más grande es l , menor es la diferencia entre f y f_l ». Otra manera de verlo es considerar a la función no periódica $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ como una función con «período infinito», lo que es más impreciso aún. Para poder desarrollar esta idea con un mínimo de precisión, tenemos que estudiar lo que ocurre con la serie de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_l) e^{\frac{2n\pi}{2l}ix}$ cuando l tiende a infinito (si es que ocurre algo decente). Veamos: por las hipótesis que asumimos, para cada $x \in [-l, l]$:

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{l,m}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=-m}^m c_n(f_l) e^{\frac{2n\pi}{2l}ix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_l) e^{\frac{n\pi}{l}ix} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f_l(t) e^{-\frac{n\pi}{l}it} dt \right) e^{\frac{n\pi}{l}ix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) e^{-\frac{n\pi}{l}it} dt \right) e^{\frac{n\pi}{l}ix} \frac{1}{2l} \end{aligned} \quad (2.1)$$

La última igualdad se debe a que para todo $x \in (-l, l)$ es $f_l(x) = f(x)$. Ahora, para cada real $l > 0$ y cada entero n , sea $\omega_{n,l} = \frac{n\pi}{l}$. Entonces, para cada $l > 0$, la sucesión $(\omega_{n,l})_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ es una sucesión de números que divide a toda la recta real en intervalos de longitud constante $\Delta\omega_{n,l} = \omega_{n+1,l} - \omega_{n,l} = \frac{\pi}{l}$, longitud que tiende a 0 cuando l tiende a $+\infty$. Con esta notación tenemos

$$f_l(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_{n,l}t} dt \right) e^{i\omega_{n,l}x} \frac{\Delta\omega_{n,l}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_l(\omega_{n,l}) e^{i\omega_{n,l}x} \Delta\omega_{n,l} \quad (2.2)$$

donde para cada $l > 0$, la función $\hat{f}_l : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ está definida por $\hat{f}_l(\omega) = \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega t} dt$.

Como el objetivo es tomar límites en ambos miembros de (2.2) para $l \longrightarrow +\infty$, vamos a agregar como hipótesis que para cada $\omega \in \mathfrak{R}$ existe el límite

$$\hat{f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \hat{f}_l(\omega) = {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega t} dt \stackrel{\text{def}}{=} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

Queda entonces definida una función $\hat{f} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ que dentro de poco bautizaremos. El paso al límite para $l \longrightarrow +\infty$ en el primer miembro de (2.2) es sencillo, pues $\forall x \in [-l, l] : f_l(x) = f(x)$ y por lo tanto ${}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} f_l(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{R}$. Ahora, el paso al límite en el segundo miembro sigue siendo delicado, a pesar de las hipótesis asumidas. Necesitamos que la serie involucrada sea convergente. Una manera de entender esa serie es observar que la sumatoria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_{n,l}) e^{i\omega_{n,l}x} \Delta\omega_{n,l} \quad (2.4)$$

que aparece en el segundo miembro de (2.2) es una suma de Riemann de la integral definida de \hat{f}_l , pues como hemos dicho, para cada $l > 0$, la sucesión de puntos $\omega_{n,l} = \frac{n\pi}{l}$ es una partición de la recta en intervalos de longitud $\Delta\omega_{n,l} = \omega_{n+1,l} - \omega_{n,l} = \frac{\pi}{l}$ que tiende a cero cuando $l \longrightarrow +\infty$. Por lo tanto, el límite de las sumas (2.4), si existe, es

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_{n,l}) e^{i\omega_{n,l}x} \Delta\omega_{n,l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2.5)$$

Esto nos exige agregar otra hipótesis: para cada x , la función $\omega \mapsto \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$ es integrable en \mathfrak{R} . Ahora sí, considerando a las series del segundo miembro de (2.2) como sumas de Riemann, podemos intentar tomar límites en (2.2) para $l \longrightarrow +\infty$, y lo haremos partiendo directamente de la integral impropia doble que resulta del paso al límite de esta sucesión de sumas de Riemann:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \stackrel{(!)}{=} {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_{n,l}) e^{i\omega_{n,l}x} \Delta\omega_{n,l} =$$

Si bien es cierto que para todo $\omega \in \mathfrak{R}$ se verifica $\hat{f}(\omega) = {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \hat{f}_l(\omega)$, este paso que estamos dando es muuuy delicado y requiere una justificación cuidadosa, como siempre que se intercambian límites con series. Hay que tener presente que por ahora estamos intentando entender informalmente las ideas que derivaron en la transformada de Fourier de f a partir de su serie de Fourier. Luego demostraremos la igualdad final (2.6) de manera rigurosa, estableciendo condiciones suficientes para la misma.

$$= {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_l(\omega_{n,l}) e^{i\omega_{n,l}x} \Delta\omega_{n,l} = {}_l \underline{\text{Lim}}_{+\infty} f_l(x) = f(x).$$

Es decir: para cada $x \in \mathfrak{R}$ tendríamos la igualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x) \quad (2.6)$$

donde

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2.7)$$

Hemos visto que son necesarias algunas hipótesis bastante fuertes sobre la función f para que se verifique la igualdad (2.6). En cambio, la igualdad (2.7) es la definición de una función, que se define como transformada de Fourier de f . Para que esta función esté bien definida solo es necesaria la convergencia de la integral del miembro derecho de (2.7) para cada $\omega \in \mathfrak{R}$, al menos en valor principal, como hemos considerado en (2.3). Una condición sencilla y no demasiado restrictiva que garantiza esto es que f sea absolutamente integrable en \mathfrak{R} , pero, insistimos, la sola convergencia de las integrales (2.7) no garantizan la igualdad (2.6). Son necesarias condiciones adicionales que expondremos en el siguiente teorema (Teorema de Inversión).

Releyendo los párrafos anteriores podemos ver que la función definida en (2.7) substituye, para las funciones no periódicas, a la sucesión de los coeficientes de Fourier, y que la fórmula (2.6) reemplaza al Teorema de Dirichlet de convergencia puntual de la serie de Fourier de la periódica correspondiente. Hubiera sido mucho más sugestiva la notación $\hat{f}(\frac{2n\pi}{P})$ para los coeficientes de Fourier de una función P -periódica f , en lugar de la habitual $c_n(f)$, pero una tradición pedagógica secular lo impide. La terminología habitual, sobre todo en las aplicaciones al estudio de señales, es mencionar a la sucesión de los coeficientes de Fourier de una función periódica o bien a la transformada de Fourier de una función no periódica, como el *espectro de frecuencias* de la función (o de la señal). En el caso de las funciones periódicas, el espectro se dice *discreto* y en el segundo caso, espectro *continuo*. (Nos estamos refiriendo, obviamente, a funciones periódicas seccionalmente continuas y, en el caso de no periódicas, absolutamente integrables en la recta).

Terminamos este párrafo con la presentación en sociedad de la protagonista de este apunte.

Definición 2.1: Dada una función $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} , se define como transformada de Fourier de f a la función $\hat{f}: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $\omega \in \mathfrak{R}$:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2.8)$$

Observación 2.1: Para cada $\omega \in \mathfrak{R}$, la integral del segundo miembro de (2.8) converge absolutamente, pues $\forall x \in \mathfrak{R} : |f(x)e^{i\omega x}| = |f(x)|$, y f es absolutamente integrable. Por otra parte, es evidente que para definir su transformada de Fourier no hace falta que f sea absolutamente integrable, pues la integral (2.8) puede ser condicionalmente convergente (o inclusive, puede ser convergente solamente en valor principal). Pero la convergencia absoluta no es una condición demasiado restrictiva en la mayoría de las aplicaciones y por otro lado es necesaria para garantizar algunas de las bonitas e importantes propiedades que mencionaremos luego del Teorema de Inversión.

§3. TEOREMA DE INVERSIÓN.

El Teorema de Inversión al que se refiere el título es un teorema de convergencia puntual, análogo al de Dirichlet para series de Fourier. No es casual, entonces, que la condición de Dirichlet vuelva a aparecer.

Teorema 3.1 (Teorema de Inversión): Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada $x \in \mathfrak{R}$ donde existen y son finitas las derivadas laterales de f , se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] \quad (3.1)$$

Demostración: En Apéndice. ■

Observación 3.1: Si en el punto x , además de verificar las condiciones del enunciado, f es continua en x , entonces el miembro derecho de (3.1) es, obviamente, $f(x)$ y entonces

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x) \quad (3.2)$$

Observación 3.2: Recordemos que $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x-t)$, $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t)$ y que las derivadas laterales en x son, por definición, $f'(x^-) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^-) - f(x-t)}{t}$ y $f'(x^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$.

La hipótesis del enunciado sobre la existencia de derivadas laterales se denomina *condición de Dirichlet*, como hemos dicho. Existen otras hipótesis que garantizan la

igualdad (3.1) (junto con la integrabilidad absoluta de f). Una bastante popular es la *condición de Dini* en el punto x : existe $\delta > 0$ para el cual converge la integral impropia

$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt$. Es casi evidente que si en x se verifica la condición de Dirichlet,

entonces también se verifica la de Dini. La recíproca no es cierta: pues por ejemplo la

función $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$ verifica la condición de Dini

en $x = 0$, pero no la de Dirichlet. De todos modos, hemos elegido la condición de Dirichlet por ser mucho más sencilla de verificar en la práctica y en las aplicaciones en general.

Una forma de simplificar los enunciados (y las demostraciones) es introducir, para cada función seccionalmente continua $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$, la función $\mathcal{f}: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $x \in \mathfrak{R}$:

$$\mathcal{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}. \quad (3.3)$$

Esta función es seccionalmente continua y las integrales definidas de f y \mathcal{f} en cada intervalo acotado son iguales, pues los valores de estas dos funciones difieren en a lo sumo una cantidad finita de puntos en cada intervalo acotado. Resulta entonces, que la integrabilidad (absoluta o condicional) de f equivale a la de \mathcal{f} y las integrales impropias resultantes son las mismas. En particular: $\widehat{\mathcal{f}} = \widehat{f}$. En cada punto x donde f es continua se tiene, obviamente, que $\mathcal{f}(x) = f(x)$ y además f verifica la condición de Dirichlet en punto x sii la verifica \mathcal{f} , pues en la condición de Dirichlet no interviene el valor de f en x (ver observación 3.2) No hemos encontrado esta notación ni ninguna denominación especial para la función \mathcal{f} en la ilustre literatura consultada, y por lo tanto no vamos a introducir un nuevo nombre en este modesto apunte.

Con esta notación, tenemos, entonces:

(A) Dada una función $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} , para cada $\omega \in \mathfrak{R}$:

$$\widehat{\mathcal{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{f}(x) e^{-i\omega x} dx \quad (3.4)$$

(B) En cada punto $\omega \in \mathfrak{R}$ donde f verifica la condición de Dirichlet:

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{f}}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{f}(x) \quad (3.5)$$

Respecto de la simetría visual que existe entre estas dos últimas fórmulas, transcribo un párrafo de *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, de A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, (de la desaparecida editorial MIR):

«Conviene prestar atención a la semejanza que existe entre estas fórmulas. La segunda difiere de la primera sólo en el signo del exponente y en el coeficiente $\frac{1}{2\pi}$ » (Los autores no utilizan el símbolo \mathcal{P} ni ningún otro, aclarando en el texto si se trata del valor principal) «Podríamos alcanzar una simetría aún mayor si hubiéramos tomado

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

La fórmula de inversión tendría entonces la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

es decir, la diferencia consistiría sólo en el signo del exponente. Sin embargo, a pesar de la semejanza exterior, estas fórmulas son sustancialmente distintas: en la primera, la integral existe en el sentido habitual (ya que f es absolutamente integrable en \mathfrak{R}) mientras que la segunda sólo en el sentido del valor principal. Además, la primera es la *definición* de la función \hat{f} , mientras que la segunda es la afirmación de que la integral que figura en el miembro derecho es igual a la función inicial f , y como hemos visto, para que esta igualdad sea válida, la función f , además de ser absolutamente integrable, debe verificar algunas condiciones adicionales, digamos la condición de Dini. »

Momento cultural: Restringiendo alevosamente el espacio de funciones con las que trabajamos y quedándonos solamente con las funciones $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ de clase C^∞ que verifican determinadas condiciones muy fuertes de acotación, se puede lograr una simetría casi perfecta entre estas maravillosas funciones y sus transformadas de Fourier. El interesado puede buscar información sobre el *Espacio de Schwartz*. Si queda tiempo y lugar, haremos alguna mención del mismo más adelante. De paso, aclaremos que el apellido del espacio mencionado se refiere a un matemático del siglo XX, que recibió la medalla Fields por sus trabajos sobre la transformación de Fourier. Estos trabajos permitieron extender de una manera sofisticada, sencilla y muy poderosa esta transformación a un vasto dominio de objetos, denominados *funciones generalizadas* o *distribuciones*. Las ideas iniciales fueron de Paul Dirac, pero Laurent Schwartz puso estas ideas sobre bases matemáticas firmes y las desarrolló hasta consolidar una teoría central en el análisis matemático del siglo XX. Si usted lo piensa un poco, sería la primera vez en su carrera que toma contacto con algún desarrollo matemático posterior al siglo XIX. Para concluir este momento cultural, un breve comentario local: hasta el año 2005, aproximadamente, en los cursos de Análisis III de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires se enseñaban funciones generalizadas y la transformación de Fourier en el espacio de Schwartz.

La importancia de las fórmulas (3.4) y (3.5) no está dada, entonces, por su aparente simetría si no que reside principalmente en la posibilidad de recuperar la función f a partir de su transformada de Fourier. El hecho de que en las discontinuidades (de salto) de f no se recupere el valor de f es inevitable, pues la transformada de Fourier no detecta valores

puntuales, es decir: si f y g difieren solamente en una cantidad finita de puntos en cada intervalo acotado, entonces tienen la misma transformada de Fourier.

Nota 3.1: Es importante tener en cuenta que la continuidad seccional y la integrabilidad absoluta de una función son suficientes pero no necesarias para la existencia de su transformada de Fourier ni para la validez de la fórmula de inversión. Pero estas hipótesis son verificadas por la mayoría de las funciones que aparecen en la práctica y por otra parte no es nada sencillo caracterizar a todas las funciones que admiten transformada de Fourier y su correspondiente fórmula de inversión. En la práctica, cuando una función no verifica las hipótesis del Teorema 3.1, debe ser estudiada aparte, individualmente. En el primero de los ejemplos que damos a continuación vamos a presentar un caso muy importante en las aplicaciones donde la transformada de Fourier converge solamente en valor principal.

Ejemplos: Los siguientes ejemplos son sencillos (aunque no triviales) e importantes. Se recomienda graficar las funciones involucradas.

1) Para cada intervalo acotado $[a, b] = [c-r, c+r]$ donde $c = \frac{a+b}{2}$ es el punto medio del intervalo y $r = \frac{b-a}{2}$ su radio, sea $\mathfrak{1}_{[a,b]} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\mathfrak{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \{a,b\} \end{cases} . \quad (3.6)$$

Es evidente que esta función es absolutamente integrable y satisface las condiciones de Dirichlet en todos los puntos de la recta real. Entonces, en primer lugar, mediante una cuenta sencilla que dejamos como ejercicio, resulta que su transformada de Fourier es

$$\hat{\mathfrak{1}}_{[a,b]}(\omega) = 2 \frac{\text{sen}\left(\frac{b-a}{2}\omega\right)}{\omega} e^{-i\frac{a+b}{2}\omega} = 2 \frac{\text{sen}(r\omega)}{\omega} e^{-ic\omega} . \quad (3.7)$$

En segundo lugar, dado que esta función satisface las condiciones del Teorema de Inversión en todo punto $x \in \mathfrak{R}$, tenemos que

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(r\omega)}{\omega} e^{i\omega(x-c)} d\omega = \pi \mathfrak{1}_{[c-r, c+r]}(x) \quad (3.8)$$

Es una identidad nada trivial, que se verifica para todo $x \in \mathfrak{R}$. Para $c = 0$ y mediante un cambio de nombre en la variable de integración ($\omega \leftrightarrow t$) y luego poniendo $x = -\omega$, tenemos:

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(rt)}{\pi t} e^{-it\omega} dt = \mathbb{1}_{[-r,r]}(\omega) \quad (3.9)$$

Esta identidad es un buen ejemplo de lo mencionado en la Nota 3.1 arriba, pues se trata de la transformada de Fourier (que solo existe en valor principal) de la función

$$\sigma_r : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } \sigma_r(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(rt)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{r}{\pi} & \text{si } t = 0 \end{cases}, \text{ donde } r \text{ es un parámetro real}$$

positivo cualquiera. Estas funciones son continuas (mucho más: son analíticas) y son extremadamente importantes en las aplicaciones (por ejemplo, en el procesamiento de señales). En particular, la función σ_π ha sido bautizada, en el siglo XX, con el nombre de *seno cardinal* por los ingenieros que trabajaban en telecomunicaciones. Volveremos a mencionar este ejemplo cuando hablemos de convoluciones. Mientras tanto, en este párrafo veremos el papel central que juegan estas funciones en las fórmulas de inversión (el Lema 3.1 es clave para la demostración del Teorema de Inversión)

2) Para cada real positivo a , sea $E_a : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ la función tal que $E_a(x) = e^{-a^2 x^2}$ (es una *gaussiana*). En el apunte sobre integrales impropias hemos probado que para todo par de constantes reales a y μ (con $a > 0$), se verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \theta^2 \pm i\mu\theta} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\mu^2}{4a^2}}$$

(previamente habíamos comprobado fácilmente la convergencia absoluta de la integral). Cambiando los nombres de los parámetros resulta que para todo $\omega \in \mathfrak{R}$:

$$\hat{E}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} e^{-i\omega x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

En particular, para $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ resulta $\hat{E}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \sqrt{2\pi} E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\omega)$, es decir: la

transformada de Fourier de $E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ es $\sqrt{2\pi} E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

3) La función $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|}$, es continua, absolutamente integrable y satisface la condición de Dirichlet en todo punto de la recta real: para $x < 0$ es $f'(x) = e^x$, para $x > 0$ es $f'(x) = -e^{-x}$ y en $x = 0$ tenemos las derivadas laterales

finitas $f'(0^-) = 1$ y $f'(0^+) = -1$. Una cuenta sencilla nos permite calcular su transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Dado que f satisface las condiciones de Dirichlet en todo punto, podemos aplicar el teorema de inversión:

$$e^{-|x|} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\pi(1 + \omega^2)} d\omega$$

Hemos eliminado el símbolo vp pues la integral es absolutamente convergente. Ahora bien: cambiemos el nombre de la variable ω de integración por t . Lo que tenemos es, para todo $x \in \mathfrak{R}$:

$$\pi e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1 + t^2} dt$$

Finalmente, renombrando $x = -\omega$, tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it\omega}}{1 + t^2} dt = \pi e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$. Esta

identidad nos dice que la transformada de Fourier de la función $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ es

$\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Este ejemplo muestra que cuando la transformada de Fourier de una función admite, a su vez, transformada de Fourier, el Teorema de Inversión permite calcularla directamente (ver propiedad 7 en la tabla del párrafo siguiente).

Terminamos este párrafo con dos resultados que se necesitan para la demostración del Teorema de Inversión pero que son muy importantes por sí mismos.

Lema 3.1 (Lema de Riemann-Lebesgue para la transformación de Fourier en \mathfrak{R}):

Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada constante real β se verifica:

$$\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0 \quad (3.10)$$

En particular,

(a) para $\beta = 0$: $\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t) dt = 0$,

(b) para $\beta = \frac{\pi}{2}$: $\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{cos}(\lambda t) dt = 0$

y como consecuencia inmediata:

$$(c) \quad \omega \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = 0 \quad \text{y} \quad \omega \underline{\text{Lim}}_{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = 0, \text{ es decir:}$$

$$\omega \underline{\text{Lim}}_{-\infty} \hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{y} \quad \omega \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \hat{f}(\omega) = 0 \quad (3.11)$$

Observación 3.3: Para cada par de números reales λ y β , la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\text{sen}(\lambda t + \beta)dt$ converge absolutamente, pues f es absolutamente integrable y $|f(t)\text{sen}(\lambda t + \beta)| \leq |f(t)|$.

Demostración: En Apéndice. ■

Lema 3.2 (Lema del «seno cardinal»: una aproximación de la unidad). Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada $x \in \mathfrak{R}$ donde existen y son finitas las derivadas laterales de f , se tiene:

$$\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad (3.12)$$

Demostración: En Apéndice. ■

Observación 3.4: En el transcurso de la demostración se prueba la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt$ (para cada real λ).

§4. LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN $L^1(\mathfrak{R})$

Hemos visto que para cada función $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable existe su transformada de Fourier $\hat{f} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{para cada } \omega \in \mathfrak{R}.$$

Para estudiar las propiedades de la aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es indispensable observar la estructura operativa del conjunto de estas funciones seccionalmente continuas y absolutamente integrables. A este conjunto lo designaremos $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$.

Aclaración: El símbolo $L^1(\mathfrak{R})$ es utilizado universalmente para el conjunto de las funciones $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ absolutamente integrables en el sentido de Lebesgue (esta es la razón de la L en el símbolo), concepto que no se ha estudiado en los cursos anteriores y no tendría ningún sentido intentarlo en éste. Nosotros seguiremos utilizando la integral definida de Riemann, que admite integrales impropias como la hermosa, conocida e importantísima $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} d\theta = \pi$. Esta integral no existe en el sentido de Lebesgue, pero sí como integral de Riemann. En dominios de integración de medida finita (por ejemplo en intervalos cerrados y acotados), si una función es integrable en el sentido de Lebesgue, entonces también lo es en el sentido de Riemann. Esto no ocurre cuando se trata de la integración en una semirrecta o en toda la recta real. En realidad, tendríamos que utilizar el símbolo $R^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$, pero no queremos agregar notaciones ad-hoc.

Este conjunto $L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ tiene la estructura adecuada para la operación que estamos estudiando: es un espacio vectorial. Otro espacio que aparece naturalmente a partir del Lema de Riemann-Lebesgue es el espacio vectorial $C_c^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ de las funciones continuas $h : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ que tales que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} h(\omega) = 0$ y $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} h(\omega) = 0$. Resumimos las primeras propiedades importantes en un solo teorema.

Teorema 4.1:

(a) $L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita y la función $\| \cdot \|_1 : L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que a para cada $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) : \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ es una *casi-norma* (es decir: $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f$ es nula en todos los puntos de \mathfrak{R} excepto en a los sumo en una cantidad finita en cada intervalo acotado)

(b) $C_c^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita y la función $\| \cdot \|_{\infty} : C_c^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que a para cada $h \in C_c^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) : \|h\|_{\infty} = \sup\{|h(\omega)| : \omega \in \mathfrak{R}\}$ es una norma en este espacio.

(c) La función $\mathfrak{F} : L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow C_c^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ tal que $\mathfrak{F}(f) = \hat{f}$ es una transformación lineal bien definida (en particular, esto significa que para toda $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$, su transformada de Fourier \hat{f} es continua y verifica $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. Esto último es exactamente lo que afirma el Lema de Riemann-Lebesgue. Queda por demostrar la continuidad de cada \hat{f} y la linealidad de \mathfrak{F})

(d) $\forall f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) : \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$. (Es decir: \mathfrak{F} es una *contracción*)

(e) \mathfrak{F} es *casi* inyectiva, es decir: $\forall \omega \in \mathfrak{R} : \hat{f}(\omega) = 0 \Rightarrow f$ es nula en todos los puntos de \mathfrak{R} excepto en (a lo sumo) en una cantidad finita en cada intervalo acotado.

Demostración: Solamente demostraremos la continuidad de las transformadas de Fourier de las funciones absolutamente integrables (en el Apéndice), el ítem (d) y la casi inyectividad de \mathfrak{F} (también en el Apéndice). El resto es un ejercicio rutinario de álgebra lineal, y la demostración del ítem (d) es tan cortita que no vale la pena relegarla al Apéndice: para todo $\omega \in \mathfrak{R}$

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \overbrace{|e^{-i\omega x}|}^{=1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1$$

Por lo tanto, $\|f\|_1$ es cota superior del conjunto $\{|\hat{f}(\omega)| : \omega \in \mathfrak{R}\}$. Por definición de supremo se tiene entonces que $\sup\{|\hat{f}(\omega)| : \omega \in \mathfrak{R}\} \leq \|f\|_1$. ■

Observación 4.1: Antes de tentarse con aplicar el Teorema de Inversión para demostrar la casi-inyectividad de \mathfrak{F} , preste atención al hecho de que no todas las funciones $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ verifican la condición de Dirichlet en todos los puntos de la recta real.

Observación 4.2: Si usted se está preguntando si $\mathfrak{F}: L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es sobreyectiva, lo felicito. Es una excelente pregunta y la respuesta es negativa, como muestra el siguiente ejemplo. Puede demostrarse (no es trivial) que la función impar

$$h \in C^0(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \text{ tal que } h(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{e} & \text{si } 0 \leq \omega \leq e \\ \frac{1}{\ln(\omega)} & \text{si } \omega \geq e \end{cases}, \text{ no es la transformada de Fourier}$$

de ninguna función $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$.

Terminología:

(1) La transformación lineal $\mathfrak{F}: L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tal que $\mathfrak{F}(f) = \hat{f}$ es la transformación de Fourier, mientras que para cada $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, \hat{f} se denomina transformada de Fourier de f . Es la misma terminología que utilizamos en Álgebra II cuando mencionamos una transformación lineal, por un lado, y por otro nos referimos al transformado de un determinado vector del dominio por esa transformación lineal.

(2) Existe una expresión ya clásica para referirse a una función f que es nula en todos los puntos de \mathfrak{R} excepto en (a lo sumo) en una cantidad finita en cada intervalo acotado: se dice que f es *casi nula* o bien que f se anula en *casi todo punto*. Es una terminología utilizada en teoría de la medida en un sentido más amplio para referirse a una función que se anula excepto en un conjunto de *medida nula*. En francés: «*f est nulle presque partout*», abreviado: $f = 0$ p.p. En inglés: «*f vanishes almost everywhere*», abreviado: $f = 0$ a.e.

Terminamos este párrafo con algunas propiedades muy sencillas de probar y que suelen ser muy útiles para algunos cálculos de transformadas de Fourier. Las presentamos en una tabla, incluyendo una columna con las condiciones de aplicación.

	<i>Condiciones de aplicación</i>	<i>Función original</i>	<i>Transformada de Fourier</i>
1	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ ♣ Condiciones de Dirichlet 	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
2	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$f(x - x_0)$, $x_0 \in \mathfrak{R}$	$e^{-i\omega x_0} \hat{f}(\omega)$
3	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$e^{i\omega_0 x} f(x)$, $\omega_0 \in \mathfrak{R}$	$\hat{f}(\omega - \omega_0)$
4	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$f(\alpha x)$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
5	<ul style="list-style-type: none"> ♣ f es de clase C^1 ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ ♣ $f' \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$f'(x)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
6	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ ♣ $xf \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$-ixf(x)$	$\hat{f}'(\omega)$
7	<ul style="list-style-type: none"> ♣ $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ ♣ Condiciones de Dirichlet ♣ $\hat{f} \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ 	$\hat{f}(x)$	$2\pi f(-x)$

Algunos breves comentarios sobre cada una de las filas:

1) La tercera casilla es la definición de la transformada de Fourier de f , cuya existencia está garantizada por la condición $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$, mientras que el Teorema de Inversión local es el contenido de la segunda casilla, y su validez está garantizada por las condiciones de Dirichlet.

2) Esta propiedad muestra cómo se modifica el espectro de frecuencias de f cuando se produce un «desplazamiento temporal», terminología que se utiliza cuando en lugar de

x se utiliza la variable $t =$ tiempo. Se prueba mediante un cambio de variable obvio en la

$$\text{integral } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) e^{-i\omega x} dx.$$

3) Esta propiedad es la dual de la anterior y muestra cómo se desplazan las frecuencias del espectro de f cuando ésta se modifica mediante un «factor de modulación». Su prueba no requiere ni siquiera un cambio de variables.

4) También se prueba mediante un sencillo cambio de variables, que en este caso significa un *cambio de escala* en la variable original. Esta propiedad muestra que el efecto en el espectro es doble: un cambio de escala y un factor de amplificación o de contracción de frecuencias.

5) Una propiedad muy importante en las aplicaciones de la transformación de Fourier a las ecuaciones diferenciales. La demostración consiste en una integración por partes y el uso necesario de la siguiente propiedad, demostrada en el apunte sobre integrales impropias: si $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y existen (y son finitas) las integrales

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ y } \int_a^{+\infty} g'(x) dx, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \text{ Insistimos una vez más que para la}$$

convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ no es necesario ni suficiente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Se sigue inmediatamente que para nuestra f se verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y además que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Si estos límites no se anularan (o no existieran) la propiedad 5 sería completamente falsa y recomendamos escribir prolijamente la prueba, que utiliza – como dijimos – integración por partes. Observe que el Lema de Riemann–Lebesgue aplicado a la transformada de f' implica que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega \hat{f}(\omega) = 0 = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \omega \hat{f}(\omega)$. Esta es la primera indicación de que cuanto más «suave» es f , más rápido decrece su transformada de Fourier en infinito. Esto se puede ver aplicando esta misma propiedad a las derivadas sucesivas de f (suponiendo que existan y con las condiciones de aplicación requeridas). Este es un fenómeno sorprendente de la relación entre una función y su transformada de Fourier, sobre el que no volveremos en este apunte, lamentablemente.

6) Es la propiedad dual de la anterior, pues intercambia los roles de f y \hat{f} . La parte más delicada de la demostración es demostrar que \hat{f} es derivable y que se puede calcular su derivada derivando directamente adentro de la integral.

7) Cuando la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ converge absolutamente en sentido estricto (no solo en valor principal) para todo $x \in \mathfrak{R}$, esta fórmula tiene una consecuencia muy importante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico: si $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente integrable, satisface la condición de Dirichlet en todos los puntos de la recta real y su transformada de Fourier es absolutamente integrable, tenemos que para todo $x \in \mathfrak{R}$:

$$2\pi f(-x) \stackrel{\text{Teorema de Inversión}}{=} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \stackrel{\text{hip}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(x).$$

§5. CONVOLUCIÓN

La *convolución* es una operación especialmente importante, tanto desde el punto de vista teórico como en las aplicaciones prácticas. Utilizaremos frecuentemente en este párrafo la notación (3.3): para cada $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, $\check{f} \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es la función tal que $\check{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$. Hemos mencionado que en todas las integrales definidas que contienen a la función f en el integrando, ésta se puede reemplazar por \check{f} . Recordemos, también, una vez más, que una función absolutamente integrable no tiene por qué ser acotada, como lo demuestra el sencillo ejemplo de la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = 0$ si x no es entero y $f(n) = n$ para todo entero n . (Puede construirse fácilmente un ejemplo de función continua no acotada en \mathfrak{R} y absolutamente integrable).

Antes de pasar a la definición de *convolución*, es necesario observar que el producto de dos funciones seccionalmente continuas y absolutamente integrables puede no ser absolutamente integrable, es decir: no es cierto en general que si $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y $g \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, entonces $fg \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. El siguiente es un ejemplo donde $g = f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y sin embargo $f^2 \notin L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$.

Ejemplo 5.1: Para cada entero positivo sea I_n el intervalo $\left[n - \frac{1}{2n^2}, n + \frac{1}{2n^2}\right]$ y sea $\mathbf{1}_n$ su función característica. Ahora, sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \mathbf{1}_n: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Es decir: $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y $f^2 \notin L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Desde luego, puede construirse un ejemplo continuo.

Es por esta razón que en el enunciado del siguiente teorema es necesaria alguna hipótesis de acotación. Obsérvese que una cota superior de $|f|$ puede no serlo de $|f|$.

Teorema/Definición 5.1: Sean $f, g \in L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ tales que f y g son acotadas, es decir: existen constantes M_f y M_g tales que $\forall x \in \mathfrak{R} : |f(x)| \leq M_f$ y $|g(x)| \leq M_g$. Entonces, para cada $x \in \mathfrak{R}$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ es absolutamente convergente. Queda entonces bien definida la función $f * g : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $x \in \mathfrak{R}$: $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$. Esta función, que se define como *convolución* entre f y g , es absolutamente integrable (ver nota a continuación) y verifica la desigualdad

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (5.1)$$

Demostración: Veamos primero la convergencia absoluta. Para cada par de reales positivos a y b :

$$\int_{-a}^b |f(x-t)g(t)|dt = \int_{-a}^b |f(x-t)||g(t)|dt \leq M_g \int_{-a}^b |f(x-t)|dt \leq M_g \|f\|_1$$

y queda demostrada la convergencia absoluta de la integral. Ahora, veamos que $f * g$ es absolutamente integrable. En la prueba que sigue interviene de manera decisiva el hecho de que f y g son absolutamente integrables en \mathfrak{R} , lo que permite cambiar el orden de integración:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \right|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)||g(t)|dtdx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|dx \right) |g(t)|dt \stackrel{\theta=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\theta)|d\theta \right) |g(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_1 |g(t)|dt = \\ &= \|f\|_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

■

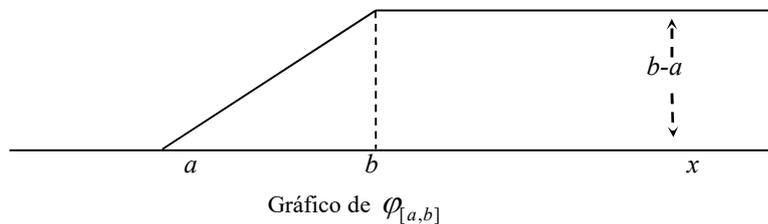
Nota 5.1: El problema de la continuidad o continuidad secuencial de la función $f * g$ es un tema extremadamente delicado. Se puede probar que con las condiciones de acotación impuestas, $f * g$ es continua, además de ser absolutamente integrable. Pero esta prueba no es sencilla, pues requiere del uso de las funciones que se denominan *débilmente regulares* o *regladas* (*regulated functions*), que son las que admiten límites laterales finitos en todo punto y están caracterizadas (no es trivial) por ser límites uniformes de funciones escalonadas. Puesto que las funciones seccionalmente continuas son funciones regladas, podemos utilizar el hecho de que son límites uniformes de funciones escalonadas. El argumento seguiría, esquemáticamente, de la siguiente manera:

Las funciones escalonadas son, por definición, combinaciones lineales de funciones características de intervalos acotados disjuntos, es decir, de la forma

$$F = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{[a_k, b_k]}, \text{ donde } a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m \text{ y los coeficientes } c_1, c_2, \dots, c_m \text{ son}$$

constantes complejas. Es muy sencillo comprobar (aunque algo engorroso) que la convolución de dos funciones características de intervalos acotados es una función continua, continua, seccionalmente de clase C^1 y que se anula fuera de un intervalo cerrado y acotado (por lo tanto es absolutamente integrable en la recta). Más

precisamente: $(\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]})(x) = \varphi_{[a,b]}(x-d) - \varphi_{[a,b]}(x-c)$, donde $\varphi_{[a,b]}(x) = \int_{-\infty}^x \mathbf{1}_{[a,b]}(t) dt$ es (obviamente) una primitiva de $\mathbf{1}_{[a,b]}$.



Entonces, la convolución de dos funciones escalonadas es también una función continua, seccionalmente de clase C^1 y que se anula fuera de un intervalo cerrado y acotado (por lo tanto es absolutamente integrable en la recta), pues:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{1}_{[a_k, b_k]} \right) * \left(\sum_{j=1}^l \beta_j \mathbf{1}_{[c_j, d_j]} \right) (x) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^l \alpha_k \beta_j (\mathbf{1}_{[a_k, b_k]} * \mathbf{1}_{[c_j, d_j]})(x) \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_j [\varphi_{[a_k, b_k]}(x-d_j) - \varphi_{[a_k, b_k]}(x-c_j)] \end{aligned}$$

Ahora bien: si f y g son acotadas y seccionalmente continuas, son límites uniformes de funciones escalonadas; digamos que $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ y $G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$ uniformemente en \mathfrak{R} , donde para cada n , F_n y G_n son funciones escalonadas. No es difícil probar (y para esto la convergencia uniforme es clave) que entonces también $F_n * G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f * g$

uniformemente en \mathfrak{R} . Pero hemos visto que las convoluciones $F_n * G_n$ son continuas, por lo tanto, $f * g$ resulta ser continua por ser límite uniforme de continuas (gracias de nuevo, Weierstrass).

Podríamos haber trabajado de entrada con funciones regladas, lo que hubiera facilitado todo el trabajo con las integrales de Fourier. Es uno de los enfoques posibles de esta teoría, pero no parece ser adecuado pedagógicamente, pues hubiera requerido extender el concepto de integral (y probar sus propiedades) a partir de los límites uniformes de las funciones escalonadas. De allí a la integral de Lebesgue hay un solo paso. Parecería que cuando le cerramos la puerta a la integral de Lebesgue, en algún momento termina entrando por la ventana....

Por otro lado, si g es una función «maravillosa», es decir: de clase C^∞ y tal que ella y todas sus derivadas son absolutamente integrables, la convolución $f * g$ resulta ser de clase C^∞ y absolutamente integrable, aunque f solo sea seccionalmente continua (y absolutamente integrable). Esta propiedad se suele utilizar en el proceso que se denomina *regularización* de una función, que consiste simplemente en convolucionar esta función con una de estas funciones «maravillosas». Estas funciones son los elementos del Espacio de Schwartz, mencionado el momento cultural del párrafo 3. También podríamos haber comenzado a desarrollar toda la teoría en dicho espacio, como en muchos buenos textos, para después extenderla a funciones no tan maravillosas. No estoy seguro de que hubiera sido lo mejor desde el punto de vista pedagógico. Tal vez, en otro apunte, en algún momento futuro, escribamos esta presentación de la integral de Fourier.

Para cerrar esta disquisición, podemos mencionar que bajos ciertas condiciones no tan restrictivas sobre la clase de regularidad de f (o g), se puede probar fácilmente que $f * g$ es continua. Por ejemplo, si existe una constante real $c > 0$ tal que para todos $x, y \in \mathfrak{R} : |f(y) - f(x)| \leq c|y - x|$. En este caso:

$$\begin{aligned} |(f * g)(y) - (f * g)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x-t)g(t) - f(y-t)g(t)] dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y-t) - f(x-t)| |g(t)| dt \leq \\ &\stackrel{\text{hipótesis}}{\leq} \int_{-\infty}^{+\infty} c|y-t - (x-t)| |g(t)| dt = c|y-x| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = c|y-x| \|g\|_1 \end{aligned}$$

Esto demuestra no solamente que $f * g$ es continua, si no que es *uniformemente* continua en toda la recta real. La condición impuesta sobre f se denomina *condición de Lipschitz*.

Resumimos las principales propiedades operativas básicas de la convolución en el siguiente:

Teorema 5.2: Sean f, g y h tres funciones acotadas del espacio $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y c una constante compleja. Entonces (teniendo en cuenta las reservas formuladas en la nota 5.1):

$$(i) \quad f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$(ii) \quad g * f = f * g$$

$$(iii) \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

$$(iv) \quad (cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$$

$$(v) \quad \mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f)\mathfrak{F}(g), \text{ es decir: } \forall \omega \in \mathfrak{R} : \widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Demostración: Ejercicio. ■

Las propiedades (i), (ii) y (iii) son muy importantes en las aplicaciones (en especial a la teoría de sistemas convolucionales). Desde un punto de vista puramente aritmético, son propiedades operativas muy importantes. Comparando con las multiplicaciones que hemos visto en nuestras vidas, podemos preguntarnos si la convolución admite un elemento neutro (o *unidad*, como se suele denominar al elemento neutro de un producto). Esta pregunta, en el contexto de la teoría de circuitos, por ejemplo, es crucial. Supongamos que existe esta unidad, es decir, una función $\delta \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tal que para toda $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ se verifica $f * \delta = f$. Aplicando la propiedad (v), tendríamos $\forall \omega \in \mathfrak{R} : \hat{f}(\omega)\hat{\delta}(\omega) = \hat{f}(\omega)$. Si esto fuera cierto para toda $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, no sería difícil concluir que $\forall \omega \in \mathfrak{R} : \hat{\delta}(\omega) = 1$. Pero esto contradice el Lema de Riemann-Lebesgue, según el cual la transformada de Fourier de toda función de $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tiende a cero en infinito. Por lo tanto, la convolución, tal como la hemos definido, no admite unidad. Esto resultó muy incómodo para los físicos e ingenieros que trabajaban en mecánica cuántica y telecomunicaciones, respectivamente. El gran Paul Dirac (1902–1984) supuso la existencia de una «función ideal» con esta propiedad. Poco después, Laurent Schwartz, a quien ya hemos citado varias veces, le dio el certificado de existencia a esta función ideal. En ese certificado de nacimiento, esa famosa δ que necesitaban Dirac y sus contemporáneos, es bautizada como *delta de Dirac* y se aclara, en el mismo certificado, que es un elemento más de la vasta dinastía de funciones lineales $S \longrightarrow \mathbb{C}$, donde S es el ya mencionado espacio de Schwartz. Estas funciones lineales se denominan *funciones generalizadas* o *distribuciones*.

Lo que existe, en el territorio más vulgar de las funciones $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, son sucesiones de funciones $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ que se van comportando «cada vez más parecido» a la unidad a medida que n va creciendo. Más precisamente, verifican ${}_n \underline{\text{Lim}}_{\infty} (\sigma_n * f) = f$ para cada $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Estas sucesiones se denominan *aproximaciones de la unidad* y vimos un primer ejemplo en el Lema 3.2 (*Lema del «seno cardinal»: una aproximación de la unidad*). Recordando que para cada $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, $\hat{f} \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es la función tal que

$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$, en ese lema se demuestra que si para todo $x \in \mathfrak{R}$ existen y son finitas las derivadas laterales de f , entonces:

$${}_{\lambda} \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = f(x)$$

Cada integral del primer miembro de esta igualdad es la convolución de f con la función $\sigma_{\lambda} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\forall x \neq 0 : \sigma_{\lambda}(x) = \frac{\text{sen}(\lambda x)}{\pi x}$ y $\sigma_{\lambda}(0) = \frac{\lambda}{\pi}$. Entonces, la igualdad anterior tiene la forma convolucional

$${}_{\lambda} \underline{\text{Lim}}_{\infty} (\sigma_{\lambda} * f)(x) = f(x)$$

Por lo tanto, eligiendo $\lambda = n \in \mathbb{N}$ tenemos que, efectivamente, $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *aproximación de la unidad*.

Para concluir este párrafo, veamos lo que dice la propiedad (v) del Teorema 5.2 cuando g es una de las funciones σ_{λ} , con $\lambda > 0$. En el ejemplo 1 del párrafo 3, igualdad (3.9) obtuvimos su transformada de Fourier (en valor principal):

$$\hat{\sigma}_{\lambda}(\omega) = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda t)}{\pi t} e^{-i t \omega} dt = \mathbf{1}_{[-\lambda, \lambda]}(\omega)$$

Entonces, para toda $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$: $\forall \omega \in \mathfrak{R} : (\widehat{f * \sigma_{\lambda}})(\omega) = \hat{f}(\omega) \mathbf{1}_{[-\lambda, \lambda]}(\omega)$. Es decir: el espectro de frecuencias de $f * \sigma_{\lambda}$ queda reducido a la «banda» $[-\lambda, \lambda]$. Esperemos que esta pequeña observación permita intuir, aunque sea rudimentariamente, una de las tantas aplicaciones de la convolución.

§6. LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN $L^2(\mathfrak{R})$

Haremos lo posible por abreviar este último párrafo. Entre otras omisiones, vamos a relegar las demostraciones a la extensa y buena literatura existente. Ya hemos estudiado la casi-norma $\| \cdot \|_1$ y el correspondiente espacio $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Ahora, vamos a introducir la casi-norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (6.1)$$

y el espacio $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ de las funciones seccionalmente continuas $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ para las cuales la integral del segundo miembro de (6.1) es convergente. Es un ejercicio sencillo probar que $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita. A diferencia de lo que ocurre con los espacios de funciones definidas en intervalos acotados (o periódicas), no existe ninguna relación de inclusión entre $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. El ejemplo 5.1 es el de una función $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tal que $f \notin L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Por otro lado, un ejemplo muy sencillo de una función $f \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tal que $f \notin L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es la función $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

El espacio $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es el que permite el estudio geométrico de la transformación de Fourier, de manera análoga a lo que hemos estudiado en el apunte sobre series de Fourier. La razón fundamental es que la casi-norma (6.1) es la asociada al casi-producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (6.2)$$

A diferencia de lo que hemos visto en el apunte sobre series de Fourier, el estudio de la síntesis armónica de una función (es decir: la recuperación de la función a partir de su espectro de frecuencias) es muy delicado en $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Solamente podemos mencionar al respecto el siguiente teorema, demostrado por Michel Plancherel (1885 – 1967) en 1910. El interesado audaz puede consultar la demostración en el libro ya mencionado del gran matemático del siglo XX, Andréi N. Kolmogórov (1903-1987): *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, de A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, editorial MIR.

Teorema/ Definición: 6.1. (Plancherel – 1910): Dada $f \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, para cada $b > 0$ y cada $\omega \in \mathfrak{R}$, existe la integral

$$\hat{f}_b(\omega) = \int_{-b}^b f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (6.3)$$

y la fórmula (6.3) define una función $\hat{f}_b \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Además, existe una función $\hat{f} \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ tal que ${}_b \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \|\hat{f} - \hat{f}_b\|_2 = 0$. Esta función \hat{f} es única (respecto de la igualdad en *casi todo punto*), se define como la *transformada de Fourier de f en $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$* y verifica la igualdad (llamada *identidad de Parseval* para la transformación de Fourier):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad (6.4)$$

Por último, si además $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, entonces la transformada de Fourier de f en $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ coincide con la transformada de Fourier de f en $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, es decir: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$

Demostración: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, de A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin - MIR. segunda edición, página 485. ■

Lo que tenemos, ahora, es una transformación lineal $\mathfrak{F}: L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, es decir, un endomorfismo lineal en $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. En el ejemplo 2 del párrafo 3 hemos visto que la transformada de Fourier de la gaussiana $E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ era $\sqrt{2\pi} E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Recordemos que $E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, por lo tanto es evidente que $E_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Por lo tanto, podemos afirmar que $\mathfrak{F}(E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}) = \sqrt{2\pi} E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, es decir: $E_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ es un autovector de \mathfrak{F} asociado al autovalor $\sqrt{2\pi}$.

La identidad de Parseval tiene un significado geométrico tan hermoso como importante. Expresando (6.4) en términos de la casi-norma (6.1), tenemos que para cualquier $\hat{f} \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$:

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2 \quad (6.5)$$

Ahora, utilizando la identidad (se llama «identidad de polarización»)

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f - ig\|_2^2 - i\|f + ig\|_2^2)$$

se deduce que para todo par de elementos $f, g \in L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle \quad (6.6)$$

Dicho de otra manera: la transformación lineal $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}: L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es una transformación unitaria, pues conserva el producto interno: $\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$.

Por lo tanto, conserva normas y ángulos (en el caso de funciones reales), en particular, preserva ortogonalidad. Las consecuencias de esta propiedad geométrica son realmente muy importantes.

Momento cultural: Existe una sucesión $(E_{\frac{1}{\sqrt{2}}} H_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ que son autovectores de la transformación de Fourier, donde cada H_n es un polinomio de grado n . Estos polinomios se llaman polinomios de Hermite (sí, el mismo de las matrices hermíticas). Esta sucesión forma una «especie» de base ortogonal de $L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ y por lo tanto, la transformación lineal $\mathfrak{F}: L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ es, de alguna manera bastante parecida a la que estudiamos en Álgebra II, diagonalizable ortogonalmente. Por otra parte, el hecho de que la transformación $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}: L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ sea unitaria nos permite afirmar que sus autovalores tienen módulo 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}(f) = \lambda f \Rightarrow \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}(f) \right\|_2 = |\lambda| \|f\|_2 \stackrel{\text{Parseval}}{\Rightarrow} 1 = |\lambda|.$$

Por lo tanto, los autovalores de \mathfrak{F} tienen módulo $\sqrt{2\pi}$. De todos modos, podemos ser más precisos sobre los autovalores de la transformación de Fourier, pues de la propiedad 7 de la tabla de página 14 (párrafo 4), tenemos que si $f \in L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$, entonces $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(f)(x) = \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ y por lo tanto $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(f) = 4\pi^2 f$. Es decir: $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F})^4 = Id$, la identidad en $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$. Entonces, si $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}(f) = \lambda f \Rightarrow f = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F})^4(f) = \lambda (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F})^3(f) = \lambda \lambda^3 f = \lambda^4 f$. Puesto que estamos suponiendo que $f \neq 0$, resulta que $\lambda^4 = 1$. Es decir: cada autovalor de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}$ es alguna de las cuatro raíces cuartas de la unidad (se puede probar que, en efecto, estas cuatro raíces son autovalores de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}$). En definitiva, lo que se tiene es que los autovalores de la transformación de Fourier son $\sqrt{2\pi}$, $-\sqrt{2\pi}$, $i\sqrt{2\pi}$, y $-i\sqrt{2\pi}$.

La última parte del enunciado del Teorema de Plancherel indica que en el espacio $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ pueden ocurrir cosas interesantes. Solamente daremos un ejemplo de lo que está mostrando la identidad de Parseval en esta intersección. Las funciones más sencillas (sin ser triviales) en $L^1(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ son las funciones características de los intervalos acotados: $\mathbf{1}_{[a,b]}$. Hemos visto en el párrafo 3 que sus transformadas de Fourier son, para el caso $-a = b > 0$:

$$\hat{\mathbf{1}}_{[-a,a]}(\omega) = 2 \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}.$$

Si aplicamos la identidad de Parseval a estas funciones obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega} \right]^2 d\omega = \|\hat{f}_{[-a,a]}\|_2^2 = 2\pi \|f_{[-a,a]}\|_2^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [f_{[-a,a]}(x)]^2 dx = 4a\pi$$

Nota final: Hemos concluido un extenso apunte, si tenemos en cuenta las demostraciones relegadas al apéndice que sigue. Lamentablemente, no hemos tenido, como en los apuntes anteriores, tiempo y espacio para incluir temas básicos importantes. En nuestro caso, hemos omitido, por ejemplo, las aplicaciones de la Transformación de Fourier a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y alguna introducción a los núcleos integrales, como el de Poisson. Menos graves nos parecen las omisiones de las transformaciones de Fourier-seno y Fourier-coseno, que el alumno puede consultar en cualquier texto o en el aula.

APÉNDICE: DEMOSTRACIONES

Existe una razón personal fundamental por la cual incluyo las siguientes demostraciones en este apunte. El Teorema de Inversión es extremadamente sensible a las hipótesis de su enunciado, y antes de escribirlo en un pizarrón frente a los alumnos, necesito estar absolutamente seguro de que lo que estoy escribiendo es cierto. Esta necesidad no es exclusivamente una obsesión personal, es característica de cualquiera que ha estudiado matemática por varios años. Y en matemática, la única posibilidad de que estar seguro de lo que se está diciendo es demostrarlo rigurosa y detalladamente, entendiendo cabalmente cada paso de la demostración. Cuando estas demostraciones son excesivamente largas o tediosas, o exceden el alcance del curso, creo conveniente relegarlas a un apéndice, para no interrumpir la exposición de los conceptos y propiedades más importantes del tema.

En estas demostraciones van a ser muy utilizadas las funciones $\sigma_\lambda : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tales que

$$\sigma_\lambda(t) = \begin{cases} = \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ = \lambda & \text{si } t = 0 \end{cases}, \text{ donde } \lambda \text{ es un parámetro real cualquiera. Son funciones}$$

continuas (y mucho más: son analíticas) y en particular la función σ_1 ha sido bautizada, en el siglo XX, con el nombre de *seno cardinal*. Con la intención de facilitar un poco la

lectura de estas demostraciones, nosotros no utilizaremos ninguna notación especial para estas funciones y escribiremos directamente $\frac{\text{sen}(\lambda t)}{t}$ para cualquier $t \in \mathfrak{R}$, sobreentendiendo que en $t = 0$ este cociente toma el valor λ .

(A) Lema de Riemann-Lebesgue (para las transformadas de Fourier en \mathfrak{R}): Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada constante real β se verifica:

$$\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0 \quad (\text{A.1})$$

En particular,

$$(a) \text{ para } \beta = 0: \lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t) dt = 0,$$

$$(b) \text{ para } \beta = \frac{\pi}{2}: \lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

y como consecuencia inmediata:

$$(c) \omega \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 0 \text{ y } \omega \underline{\text{Lim}}_{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 0, \text{ es decir:} \quad (\text{A.2})$$

$$\omega \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \hat{f}(\omega) = \omega \underline{\text{Lim}}_{-\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

Observación: para cada par de números reales λ y β , la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt$ converge absolutamente, pues f es absolutamente integrable y $|f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta)| \leq |f(t)|$.

Demostración: Es evidente que basta con probar el lema para el caso en que f toma valores reales, pues en el caso general se aplica este resultado a las componentes real e imaginaria de la función. Una de las demostraciones más conocidas procede por pasos sucesivos, comenzando con funciones muy sencillas hasta llegar al caso de funciones $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continuas y absolutamente integrables en general.

Caso 1: $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ es la función característica de un intervalo acotado $[a, b)$, es decir

$$\mathbf{1}_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b) \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b) \end{cases}. \text{ Entonces, para todo } \lambda > 0 :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b)}(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = \int_a^b \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = -\frac{\cos(\lambda b + \beta)}{\lambda} + \frac{\cos(\lambda a + \beta)}{\lambda}$$

y por lo tanto es claro que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b)} \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0$.

Caso 2: f es una función escalonada, es decir, una combinación lineal de funciones características de intervalos disjuntos, es decir: $f = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{[a_k, b_k)}$, donde c_1, c_2, \dots, c_m son constantes reales y

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{m-1} < b_{m-1} \leq a_m < b_m$$

En este caso, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = \sum_{k=1}^m c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a_k, b_k)}(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ por lo demostrado en el caso 1.

Caso 3: f es continua en un intervalo acotado $[a, b]$ y se anula fuera de dicho intervalo.

En este caso, tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = \int_a^b f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt$. Por la definición

de integral definida (la que estamos utilizando: la de Riemann), para cada $\varepsilon > 0$ existe un par de sumas de Riemann (o de Darboux, como prefiera), $s_\varepsilon = \sum_{k=1}^m c_k (t_{k+1} - t_k)$ («suma inferior») y $S_\varepsilon = \sum_{k=1}^m d_k (t_{k+1} - t_k)$ («suma superior») tales que $s_\varepsilon \leq \int_a^b f(t) dt \leq S_\varepsilon$ y además

$S_\varepsilon - s_\varepsilon \leq \varepsilon$. Pero la clave de todo este asunto es que estas sumas son integrales de funciones escalonadas: más precisamente, de las funciones $g_\varepsilon = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}$ y

$h_\varepsilon = \sum_{k=1}^m d_k \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}$, pues $\int_a^b g_\varepsilon(t) dt = \sum_{k=1}^m c_k \int_a^b \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t) dt = \sum_{k=1}^m c_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \sum_{k=1}^m c_k (t_{k+1} - t_k) = s_\varepsilon$ y

análogamente $\int_a^b h_\varepsilon(t) dt = S_\varepsilon$. Recordemos la construcción de estas sumas: la secuencia de puntos $a = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$ establece una partición del intervalo $[a, b]$ y en cada $[t_k, t_{k+1})$ se elige $c_k = \inf\{f(t) : t_k \leq t < t_{k+1}\}$ y $d_k = \sup\{f(t) : t_k \leq t < t_{k+1}\}$. Resulta, claramente, que para todo $t \in [a, b]$: $g_\varepsilon(t) \leq f(t) \leq h_\varepsilon(t)$. Por lo demostrado en el caso anterior, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene

$\int_a^b h_\varepsilon(t) dt = S_\varepsilon$. Recordemos la construcción de estas sumas: la secuencia de puntos $a = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$ establece una partición del intervalo $[a, b]$ y en cada $[t_k, t_{k+1})$ se elige $c_k = \inf\{f(t) : t_k \leq t < t_{k+1}\}$ y $d_k = \sup\{f(t) : t_k \leq t < t_{k+1}\}$. Resulta, claramente, que para todo $t \in [a, b]$: $g_\varepsilon(t) \leq f(t) \leq h_\varepsilon(t)$. Por lo demostrado en el caso anterior, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0$$

Por definición de límite, dado un $\varepsilon > 0$ existe λ_ε tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < \varepsilon$$

Entonces para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| = \\ & = \left| \int_a^b [f(t) - g_\varepsilon(t)] \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt + \int_a^b g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |f(t) - g_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_a^b g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| = \int_a^b |f(t) - g_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |h_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| = S_\varepsilon - s_\varepsilon + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe λ_ε tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < 2\varepsilon$$

Es decir: que $\lambda \underline{\operatorname{Lim}}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0$.

Caso 4: f es seccionalmente continua en un intervalo acotado $[a, b]$ y se anula fuera de dicho intervalo. Por definición de continuidad seccional existe a lo sumo una cantidad finita de puntos $a = c_1 < c_2 < \dots < c_m < c_{m+1} = b$ donde f tiene una discontinuidad de salto finito (puede ocurrir que en los extremos del intervalo f sea continua, lo que no altera el razonamiento que sigue). Entonces, para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, la función $f_k : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$f_k(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (c_k, c_{k+1}) \\ {}_t \underline{\operatorname{Lim}}_{c_k^+} f(t) & \text{si } t = c_k \\ {}_t \underline{\operatorname{Lim}}_{c_{k+1}^-} f(t) & \text{si } t = c_{k+1} \\ 0 & \text{si } t \notin [c_k, c_{k+1}] \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[c_k, c_{k+1}]$ y se anula fuera de él, es decir: está comprendida en el caso anterior. Además, obviamente,
$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt .$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt = \sum_{k=1}^m \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt = \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

(por lo demostrado en el caso anterior)

Caso 5 (y último): Sea, finalmente, $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ una función seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon > 0$ tal que para todo $b > b_\varepsilon$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{-b}^b |f(t)| dt < \varepsilon$$

Entonces, cualesquiera sean $b > b_\varepsilon$, $\lambda > 0$ y $\beta \in \mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| &= \left| \int_{-\infty}^{-b} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt + \int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt + \int_b^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{-b} |f(t)| dt + \left| \int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| + \int_b^{+\infty} |f(t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{-b}^b |f(t)| dt + \left| \int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < \varepsilon + \left| \int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \end{aligned}$$

Es decir: para todos $b > b_\varepsilon$, $\lambda > 0$ y $\beta \in \mathfrak{R}$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < \varepsilon + \left| \int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| \quad (*)$$

Ahora bien:
$$\int_{-b}^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t) \operatorname{sen}(\lambda t + \beta) dt ,$$
 donde $f_b : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ está definida por:

$$f_b(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (-b, b) \\ {}_t\text{Lim}_{-b^+} f(t) & \text{si } t = -b \\ {}_t\text{Lim}_{b^-} f(t) & \text{si } t = b \\ 0 & \text{si } t \notin [-b, b] \end{cases}$$

Es evidente que f_b es continua en $[-b, b]$ y se anula fuera de este intervalo, por lo tanto está comprendida en el caso 4, y entonces ${}_\lambda\text{Lim}_{+\infty} \int_{-b}^b f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt = 0$. Por lo tanto,

dado $\varepsilon > 0$ y dado $b > b_\varepsilon$ existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\left| \int_{-b}^b f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < \varepsilon. \text{ Reemplazando en (*) obtenemos}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t + \beta) dt \right| < 2\varepsilon$$

para todo $\lambda > \lambda_\varepsilon$. ■

(B) Lema del «seno cardinal» (una aproximación de la unidad). Sea $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada $x \in \mathfrak{R}$ donde existen y son finitas las derivadas laterales de f , se tiene:

$${}_\lambda\text{Lim}_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Observación (B.1): En el transcurso de la demostración probaremos la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt$ (para cada real λ). Más precisamente, la convergencia se deduce de la igualdad (B.1) y la desigualdad (B.2), que aparecen a continuación.

Demostración: Para facilitar las cuentas que siguen, definamos $\mathcal{f} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que para

todo $x \in \mathfrak{R} : \mathcal{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$. En los puntos $x \in \mathfrak{R}$ donde f es continua, obviamente

$\mathcal{f}(x) = f(x)$. Como los puntos de discontinuidad de f en cada intervalo acotado son

finitos, tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} \mathcal{f}(t) dt$. Por otra parte, por

la misma razón, si existen las derivadas laterales de f en un punto x , lo mismo ocurre con \mathcal{f} , que tiene, entonces, las mismas derivadas laterales que f . Por lo tanto, lo que tenemos que demostrar es:

$$\lambda \lim_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = f(x)$$

En la página 23 del apunte sobre integrales impropias hemos visto que para cada $\lambda > 0$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\theta} d\theta = \pi$. (Previamente, en la página 7, habíamos comprobado la convergencia de la integral). Recordemos, por otra parte, que la convergencia es condicional, no

absoluta. En particular, para cada $\lambda > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta = 1$. Puesto que el integrando es

par: $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta = \frac{1}{2}$, identidad que también vamos a necesitar. Entonces, dado el punto

x del enunciado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(t-x))}{\pi(t-x)} f(t) dt \stackrel{\theta=t-x}{=} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\theta=t-x} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} f(\theta+x) d\theta = \int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} f(x+\theta) d\theta + \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} f(x+\theta) d\theta =$$

$\theta = -\alpha$ en la primera integral

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{-\text{sen}(\lambda\alpha)}{-\pi\alpha} f(x-\alpha) (-d\alpha) + \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} f(x+\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\alpha)}{\pi\alpha} f(x-\alpha) d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} f(x+\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta$$

Es decir, hasta ahora tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta \quad (B.1)$$

Ahora dado $N > 1$, para todo $\theta \geq N$ se verifica $\left| \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\theta} \right| \leq \frac{1}{|\theta|} \leq \frac{1}{N}$. Por lo tanto, para

todo $N > 1$:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta \right| \leq \frac{1}{N\pi} \int_N^{+\infty} |f(x-\theta) + f(x+\theta)| d\theta = \\
& \leq \frac{1}{N\pi} \int_N^{+\infty} |f(x-\theta)| d\theta + \frac{1}{N\pi} \int_N^{+\infty} |f(x+\theta)| d\theta = \frac{1}{N\pi} \int_{x-N}^{-\infty} |f(t)| (-dt) + \frac{1}{N\pi} \int_{x+N}^{+\infty} |f(t)| dt = \\
& = \frac{1}{N\pi} \int_{-\infty}^{x-N} |f(t)| dt + \frac{1}{N\pi} \int_{x+N}^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{1}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt + \frac{1}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt
\end{aligned}$$

(tener presente que f y f tienen las mismas integrales y que f es absolutamente integrable, y por lo tanto también f). Entonces, para todo $N > 1$ tenemos:

$$\left| \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta \right| \leq \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad (B.2)$$

Como hemos mencionado en la observación B.1, de (B.1) y (B.2) se deduce la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt$.

Ahora, de (B.1) y (B.2) tenemos, para cada $N > 1$:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt - f(x) \right| \stackrel{(B.1)}{=} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - f(x) \right| = \\
& = \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta + \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - f(x) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - f(x) \right| + \left| \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta \right| \stackrel{(B.2)}{\leq} \\
& \leq \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - f(x) \right| + \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \\
& = \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - 2f(x) \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta \right| + \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \\
& = \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta)] d\theta - 2f(x) \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta - 2f(x) \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta \right| + \\
& + \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^N \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} [f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)] d\theta - 2f(x) \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\pi\theta} d\theta \right| + \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^N \text{sen}(\lambda\theta) \frac{f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)}{\theta} d\theta \right| + \frac{2}{\pi} |f(x)| \left| \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\theta} d\theta \right| + \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt
\end{aligned}$$

Resumiendo esta última cuenta: para cada $\lambda > 0$ y cada $N > 1$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt - f(x) \right| \leq \tag{B.3}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left(\overbrace{\int_0^N \text{sen}(\lambda\theta) \frac{f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)}{\theta} d\theta}^{A(N,\lambda)} + \overbrace{2|f(x)| \left| \int_N^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\theta)}{\theta} d\theta \right|}^{B(N,\lambda)} + \overbrace{\frac{2}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx}^{C(N)} \right)$$

Estuiemos cada término del segundo miembro de esta desigualdad.

(1) Para cada $x \in \mathfrak{R}$ y cada $N > 1$, sea $F_{x,N} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ la función tal que

$$F_{x,N}(\theta) = \begin{cases} \frac{f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)}{\theta} & \text{si } 0 < \theta \leq N \\ f'(x^-) + f'(x^+) & \text{si } \theta = 0 \\ 0 & \text{si } \theta \in (-\infty, -N) \cup (N, +\infty) \end{cases}$$

Esta función es seccionalmente continua y absolutamente integrable. Esto último es obvio y para comprobar que es seccionalmente continua basta ver lo que pasa en 0, pues por hipótesis, f (y por lo tanto f') es seccionalmente continua. Tomando límite para $\theta \longrightarrow 0^+$ en

$$\frac{f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)}{\theta} = \frac{f(x-\theta) - f(x)}{\theta} + \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta}$$

obtenemos, efectivamente, $f'(x^-) + f'(x)$. Podemos aplicar entonces el Lema de Riemann–Lebesgue y obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^N \operatorname{sen}(\lambda\theta) \frac{f(x-\theta) + f(x+\theta) - 2f(x)}{\theta} d\theta \right| = \\
& = \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(\lambda\theta) F_{x,N}(\theta) d\theta \right| = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda, N) = 0 \quad (B.4) \\
& \text{(esto vale para cada } N > 1)
\end{aligned}$$

(2) Para cada $\lambda > 0$: $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_N^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\theta)}{\theta} d\theta \right| = 0$, pues para cada $\lambda > 0$ la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\theta)}{\theta} d\theta \text{ converge a } \frac{\pi}{2}, \text{ por lo tanto: para cada } \lambda > 0, \lim_{N \rightarrow +\infty} B(\lambda, N) = 0$$

(3) El tercer término, $C(N) = \frac{2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$, obviamente tiende a cero cuando $N \rightarrow +\infty$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$:

(a) Sea $N_\varepsilon > 1$ tal que $\forall N \geq N_\varepsilon : C(N) < \varepsilon$. Luego, dado este N_ε :

(b) sea $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_\varepsilon : A(\lambda, N_\varepsilon) + B(\lambda, N_\varepsilon) < \varepsilon$

Entonces, para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt - f(x) \right| = A(\lambda, N_\varepsilon) + B(\lambda, N_\varepsilon) + C(N_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

lo que prueba que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt = f(x)$, que es lo que queríamos demostrar ■

(C) Teorema 3.1 (Teorema de Inversión): Sea $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathfrak{R} . Entonces, para cada $x \in \mathfrak{R}$ donde existen y son finitas las derivadas laterales de f , se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] \quad (C.1)$$

Demostración:

Para cada par de números reales positivos a y b :

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega &= \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a f(t) e^{i\omega(x-t)} dt d\omega = \int_{-a}^a \left(\int_{-b}^b e^{i\omega(x-t)} d\omega \right) f(t) dt = \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{-a}^a \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t} f(t) dt \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t} f(t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

La igualdad (1) es una cuenta sencilla: si $x-t \neq 0$, $\int_{-b}^b e^{i\omega(x-t)} d\omega = \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t}$, y si

$x-t \neq 0$, $\int_{-b}^b e^{i\omega(x-t)} d\omega = \int_{-b}^b d\omega = 2b$. Hubiera sido más riguroso considerar la función

$\sigma_b : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\sigma_b(\theta) = \frac{2\operatorname{sen}(b\theta)}{\theta}$ si $\theta \neq 0$ y $\sigma_b(0) = 2b$. Esta función es

continua, pues $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sen}(b\theta)}{\theta} = 2b$. Debe sobreentenderse que en el segundo miembro

de la igualdad (1) el integrando es, en realidad, $\sigma_b(x-t)f(t)$. Por otra parte, esta función

es acotada: $\forall \theta \in \mathfrak{R} - \{0\} : |\sigma_b(\theta)| = 2 \frac{|\operatorname{sen}(b\theta)|}{|\theta|} \leq 2 \frac{|b\theta|}{|\theta|} = 2b$, y $\sigma_b(0) = 2b$. Por lo tanto,

para cada $b > 0$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t} f(t) dt$ es absolutamente convergente, por ser

f absolutamente integrable. Entonces, hemos probado con bastante detalle que

$$\int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t} f(t) dt \quad (C.2)$$

Ahora, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}(b(x-t))}{x-t} f(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(b(x-t))}{\pi(x-t)} f(t) dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 2\pi \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$,

(por el *Lema del seno cardinal*). Por lo tanto, lo que tenemos es

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \right) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad (C.3)$$

Entonces, para demostrar la igualdad (C.1) solamente nos falta probar (para cada $b > 0$) la validez de

$${}_a \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega = \int_{-b}^b \left({}_a \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \quad (C.4)$$

pues ${}_a \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega)$. La demostración no es difícil pero sí algo engorrosa.

Vuelvo a repetir (todavía no lo había hecho en este apunte) que puede omitir la lectura de las demostraciones, sobre todo si no entiende por qué hay que demostrar (C.4). Le comento que el intercambio de integrales con límites es uno de los temas más delicados y sutiles de todo el análisis matemático. En la demostración que sigue, utilizaremos la notación U_a para designar, para cada número real $a > 0$, la función característica $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ del intervalo $[-a, a]$, es decir, la función $U_a : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que :

$$U_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{si } t \notin [-a, a] \end{cases}$$

Observe que para todo $t \in \mathfrak{R} : |U_a(t) - 1| = 1 - U_a(t)$. Por último: en este paso, la hipótesis de que f es absolutamente integrable interviene de manera decisiva:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega - \int_{-b}^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \right| = \\ & = \left| \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega - \int_{-b}^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega \right| = \\ & = \left| \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a f(t) e^{i\omega(x-t)} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega \right| = \\ & = \left| \int_{-b}^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) U_a(t) e^{i\omega(x-t)} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega \right| = \\ & = \left| \int_{-b}^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [U_a(t) - 1] e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega \right| \leq \int_{-b}^b \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [U_a(t) - 1] e^{i\omega(x-t)} dt \right| d\omega \leq \\ & \leq \int_{-b}^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) [U_a(t) - 1]| dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) [U_a(t) - 1]| dt \int_{-b}^b d\omega = 2b \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) [U_a(t) - 1]| dt = \\ & = 2b \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) [1 - U_a(t)]| dt = 2b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) U_a(t)| dt \right) \\ & = 2b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{-a}^a |f(t)| dt \right) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(D) Continuidad de la transformada de Fourier de una función $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable. (versión DP: controlar)

Demostración: Dado $\omega_0 \in \mathfrak{R}$ y $b \in (0, +\infty)$, para cada $\omega \in \mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{-i\omega x} - e^{-i\omega_0 x}) dx \right| = \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \{ \cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x) - i[\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)] \} dx \right| \leq \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx + \\
 &+ \int_{-b}^b |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx + \\
 &+ \int_b^{+\infty} |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_b^{+\infty} |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx \\
 &\leq 2 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + 2 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + \\
 &+ \int_{-b}^b |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx + \\
 &+ 2 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx + 2 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx
 \end{aligned}$$

Es decir, hasta ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0) \right| &\leq 4 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + 4 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx + \\
 &+ \int_{-b}^b |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Por el teorema del valor medio en la forma de Lagrange, tenemos que para todo par de reales t y t_0 :

$$|\cos(t) - \cos(t_0)| = |t - t_0| |\operatorname{sen}(t_1)| \leq |t - t_0|$$

y

$$|\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t_0)| = |t - t_0| |\cos(t_2)| \leq |t - t_0|$$

donde t_1 y t_2 son dos puntos intermedios entre t_0 y t . Entonces, cualesquiera sean los reales x , ω y ω_0 :

$$|\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| \leq |\omega x - \omega_0 x| = |x| |\omega - \omega_0|$$

y

$$|\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| \leq |\omega x - \omega_0 x| = |x| |\omega - \omega_0|$$

Reemplazando en (D.1):

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| &\leq 4 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + 4 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx + \\ &\quad + \int_{-b}^b |f(x)| |\cos(\omega x) - \cos(\omega_0 x)| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega_0 x)| dx \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + 4 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |x| |\omega - \omega_0| dx + \int_{-b}^b |f(x)| |x| |\omega - \omega_0| dx \end{aligned}$$

es decir:

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| \leq 4 \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| dx + 4 \int_b^{+\infty} |f(x)| dx + 2|\omega - \omega_0| \int_{-b}^b |f(x)| dx \quad (D.2)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de esta desigualdad tienden a cero cuando $b \rightarrow +\infty$, pues f es absolutamente integrable. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe

$b_\varepsilon > 0$ tal que $4 \int_{-\infty}^{-b_\varepsilon} |f(x)| dx + 4 \int_{b_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, dado este $b_\varepsilon > 0$, si $\int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx > 0$

sea $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4 \int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx}$, y si $\int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx = 0$ elegimos $\delta_\varepsilon = 19$. En el primer caso resulta:

$$|\omega - \omega_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| \stackrel{(4.1)}{\leq} 4 \int_{-\infty}^{-b_\varepsilon} |f(x)| dx + 4 \int_{b_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx + 2|\omega - \omega_0| \int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta_\varepsilon \int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx = \frac{\varepsilon}{2} + 2 \frac{\varepsilon}{4 \int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx} \int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Y si $\int_{-b_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)| dx = 0$:

$$|\omega - \omega_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0) \right| \stackrel{(4.1)}{\leq} 4 \int_{-\infty}^{-b_\varepsilon} |f(x)| dx + 4 \int_{b_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Es decir que en todos los casos: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\omega - \omega_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0) \right| \leq \varepsilon$$

Lo que demuestra la continuidad de \hat{f} en un punto cualquiera ω_0 de su dominio. ■

(E) Casi-inyectividad de \mathfrak{F} : Por ser $\mathfrak{F}: L^1(\mathfrak{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{R}, \mathcal{C})$ una transformación lineal, alcanza con probar que si $\mathfrak{F}(f) = 0$, entonces f es casi-nula, es decir, que en cada intervalo acotado solamente existe una cantidad finita de puntos donde f no se anula. Equivalentemente, que $\|f\|_1 = 0$.

Demostración: Sea $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ seccionalmente continua y absolutamente integrable tal que $\forall \omega \in \mathfrak{R}: \hat{f}(\omega) = 0$. Queremos probar que, entonces, f es casi-nula. Si f verificara la condición de Dirichlet en cada punto de su dominio, el Teorema de Inversión liquidaría inmediatamente la cuestión, pero no podemos asumir esta hipótesis. Lo que tenemos como hipótesis es que para todo $\omega \in \mathfrak{R}: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = 0$. Para cada $\alpha \in \mathfrak{R}$, hagamos el cambio de variables $x = \alpha + \theta$ en la integral, obteniendo

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha + \theta) e^{-i\omega(\alpha + \theta)} d\theta = e^{-i\omega\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha + \theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$$

es decir:

$$\forall \omega \in \mathfrak{R}, \forall \alpha \in \mathfrak{R}: \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta + \alpha) e^{-i\omega\theta} d\theta = 0 \quad (E.1)$$

Para cada número real λ , sea $\varphi_\lambda: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\varphi_\lambda(x) = \int_0^\lambda f(x+t) dt$. Entonces, para cada real λ , la función φ_λ verifica:

(a) φ_λ es continua y verifica las condiciones de Dirichlet en todos los puntos de la recta: en primer lugar, mediante un simple cambio de variable obtenemos la identidad

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^\lambda f(x+t)dt \stackrel{\theta=x+t}{=} \int_x^{x+\lambda} f(\theta)d\theta = \overbrace{\int_0^{x+\lambda} f(\theta)d\theta}^{\psi(x+\lambda)} - \overbrace{\int_0^x f(\theta)d\theta}^{\psi(x)}$$

Por lo tanto, si f es continua, entonces ψ es una primitiva de f y por lo tanto φ_λ es, directamente, de clase C^1 . En el caso general en que f es seccionalmente continua, ψ es una primitiva de f en cada intervalo donde es continua y por lo tanto φ_λ resulta continua y seccionalmente de clase C^1 . La clave está en probar que ψ es continua y con derivadas laterales finitas en cada punto: por hipótesis, para cada $x_0 \in \mathfrak{R}$ o bien f es continua en x_0 o bien tiene una discontinuidad de salto finito en x_0 . En ambos casos, existen intervalos $(x_0 - a, x_0)$ y $(x_0, x_0 + b)$ a izquierda y derecha, respectivamente, donde f es continua y acotada (los números a y b son positivos, obviamente). Entonces, la función $f_1: [x_0 - a, x_0] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in (x_0 - a, x_0)$, y tal que $f_1(x_0 - a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 - a + t)$ y $f_1(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 - t) = f(x_0^-)$, es continua; y también lo es la función $f_2: [x_0, x_0 + b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f_2(x) = f(x)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + b)$, $f_2(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t) = f(x_0^+)$ y $f_2(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + b - t)$, pues por hipótesis, f admite límites laterales finitos en x_0 . Entonces, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral: para cada $r > 0$ tal que $r < a$ y $r < b$, tenemos

$$\text{que } \psi(x_0) - \psi(x_0 - r) = \int_{x_0 - r}^{x_0} f(\theta)d\theta = \int_{x_0 - r}^{x_0} f_1(\theta)d\theta = r f_1(x_r) \text{ donde } x_r \text{ es algún punto del}$$

intervalo $(x_0 - a, x_0)$. Puesto que f_1 es acotada en $[x_0 - a, x_0]$, se tiene que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(x_0 - r) = \psi(x_0)$. Obsérvese que además tenemos

$$\frac{\psi(x_0) - \psi(x_0 - r)}{r} = f_1(x_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} f_1(x_0) = f(x_0^-)$$

Por otro lado, de manera totalmente análoga se prueba que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(x_0 + r) = \psi(x_0)$ y que

$$\frac{\psi(x_0 + r) - \psi(x_0)}{r} = f_2(\tilde{x}_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} f_2(x_0) = f(x_0^+)$$

(b) φ_λ es absolutamente integrable: si $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_\lambda(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_x^{x+\lambda} f(\theta) d\theta \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_x^{x+\lambda} |f(\theta)| d\theta \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_x^{x+\lambda} dx \right) |f(\theta)| d\theta = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\theta)| d\theta$$

(en la igualdad * hemos utilizado la hipótesis de integrabilidad absoluta de f para permutar el orden de integración). Finalmente, si $\lambda < 0$, la integrabilidad absoluta de φ_λ se deduce de la identidad obvia $\varphi_\lambda = -\varphi_{-\lambda}$.

(c) $\forall \lambda \in \mathfrak{R} : \forall \omega \in \mathfrak{R} : \hat{\varphi}_\lambda(\omega) = 0$:

$$\hat{\varphi}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\lambda f(x+t) dt \right) e^{-i\omega x} dx \stackrel{**}{=} \int_0^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-i\omega x} dx \right) dt = 0$$

(en la igualdad ** también hemos utilizado la hipótesis de integrabilidad absoluta de f para permutar el orden de integración)

Finalmente, lo demostrado en (a) y (b) nos permite aplicar el Teorema de Inversión a cada φ_λ y poder afirmar que $\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_\lambda(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ en cada punto $x \in \mathfrak{R}$. Pero la transformada de cada una de estas funciones es idénticamente nula, por lo probado en (c). Por lo tanto, hemos probado que $\varphi_\lambda(x) = \int_0^\lambda f(x+t) dt = 0$ para todo x y

todo λ . En particular, que $\int_0^\lambda f(t) dt = 0$ para todo λ . Pero esto implica que f se anula en todos los intervalos abiertos donde es continua: sea (a, b) uno de tales intervalos, sea $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $f(x_0) > 0$. Por ser continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ y $f(x) \geq \mu > 0$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, siendo $\mu > 0$ el mínimo de f en este intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Resultaría entonces el absurdo

$$0 = \int_0^{x_0+\delta} f(t) dt - \int_0^{x_0-\delta} f(t) dt = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t) dt \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mu dt = 2\delta\mu > 0$$

Si $f(x_0) < 0$ se puede aplicar el mismo razonamiento a $-f$. Hemos probado que f se anula en todos los puntos donde es continua. Por ser seccionalmente continua, esto implica que es casi nula. ■