

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat – 2020

§ 9. INTEGRACIÓN.

Las integrales de funciones de variable compleja se pueden definir a partir del concepto de integral de línea de un campo vectorial en el plano, también llamada circulación o trabajo, cuando el campo vectorial representa un campo de velocidades o de fuerzas, respectivamente. Este tema se ha estudiado en Análisis II no hace mucho tiempo, por lo tanto, solamente haremos un breve repaso de lo que vamos a necesitar. Es como la mochila para el viaje: tiene que ser liviana y llevar solo lo esencial. En el capítulo III de estos apuntes ya hemos repasado los conceptos topológicos necesarios, incluyendo la conexidad y la conexidad simple, que van a ser claves.

Para cada campo vectorial $W : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de componentes escalares $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) Para todo par de caminos de integración $C_1 \subset D$ y $C_2 \subset D$ con el mismo punto inicial $(x_0, y_0) \in D$ y el mismo punto final $(x_1, y_1) \in D$, se verifica

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy \quad (9.1)$$

(ii) Para todo camino de integración cerrado (= circuito) $C \subset D$ se verifica

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0 \quad (9.2)$$

(iii) Existe un campo escalar $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $W = \nabla \varphi$ en D , es decir:

para todo $(x, y) \in D : P(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ y $Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$.

La función φ del ítem (iii) se denomina potencial escalar (o simplemente potencial) de W y tiene la propiedad de que para cada camino de integración $C \subset D$ de inicio (x_0, y_0) y final (x_1, y_1) : $\int_C Pdx + Qdy = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)$. Si D es conexo, dos potenciales del mismo campo vectorial W difieren en una constante (Si D no es conexo, esto es falso).

La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ es bastante sencilla para la intuición; la implicación $(iii) \Rightarrow (i)$ es una consecuencia inmediata de una de las tantas variantes de la “regla de la cadena”, y finalmente, la demostración de la implicación $(i) \Rightarrow (iii)$ es la que requiere un poco más de trabajo, pero no mucho.

Un campo que verifica una de estas (y por lo tanto las tres) propiedades, se define como conservativo en el dominio D . Se trata de uno de los conceptos más importantes de los que nacieron en el prolífico siglo XVIII. El alumno que ha pasado por Análisis II (y alguna Física) ya adquirió el reflejo de preguntarse automáticamente, cuando se encuentra con un campo vectorial en una reunión o en una esquina, si es conservativo o no. En general, los campos vectoriales no vienen con una etiqueta de conservatividad. Y si alguno la tiene, es mejor desconfiar. Por lo tanto, frente a un campo vectorial debemos averiguar de alguna manera si es conservativo o no. Las propiedades (i) y (ii) no son muy prácticas para esto, pues requieren tantas comprobaciones como caminos de integración entre dos puntos de D , o tantas como circuitos en D . En general son muchos.... La propiedad (iii) requiere resolver un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales sin saber de antemano si existe o no solución. Salvo en casos extremadamente sencillos, conviene alejarse prudentemente. Como suele ocurrir con estos problemas, las soluciones prácticas (cuando las hay) las aporta la teoría. Sí, la teoría. Recordemos cómo lo hace en este caso. En primer lugar, una consecuencia inmediata del Teorema de Schwarz sobre las simetrías de las derivadas segundas de un campo escalar de clase C^2 :

Proposición 9.1: Si un campo vectorial $W : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de componentes $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es conservativo, entonces

$$\forall (x, y) \in D : \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (9.3)$$

Demostración: Si W es de clase C^1 y conservativo, sus potenciales son de clase C^2 . ■

Como la inmensa mayoría de los campos vectoriales que uno encuentra por ahí son de clase C^1 (más aún, C^∞), este resultado nos permite desenmascarar rápidamente a los campos no conservativos de la vida cotidiana que pretenden serlo: basta ver que la igualdad (9.3) no se verifica en algún punto de D . Ahora, ¿qué pasa si se verifica (9.3) para todo punto del abierto D ? ¿Podemos afirmar que W es conservativo? Es decir: ¿vale la recíproca de la Proposición 9.1? Eso sería un golazo... Pero lamentablemente no es cierta. El ejemplo más popular de un campo de clase C^1 para el que se verifica (9.3) en todo su dominio y que sin embargo no es conservativo es el siguiente (está en la guía de Análisis II):

Contraejemplo 9.1 Sea $W : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $W(x,y) = \left(\frac{\overbrace{P(x,y)}^{-y}}{x^2 + y^2}, \frac{\overbrace{Q(x,y)}{x}}{x^2 + y^2} \right)$.

Este campo W es de clase C^∞ y se comprueba fácilmente haciendo las cuentas que:

- (a) W verifica la identidad (9.3) en todos los puntos de su dominio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, y
- (b) $\oint_C Pdx + Qdy = 2\pi$ para la circunferencia $C = \{(\cos(t), \sin(t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ (con el sentido de recorrido de la parametrización dada).

Pero el partido no está perdido. La matemática tuvo (y tiene) jugadores maravillosos. Para nuestro sencillo caso de campos en el plano, estos jugadores jugaron de taquito. La clave estaba en uno de los teoremas integrales que se estudian en Análisis II: el Teorema de Green, que pasamos a recordar.

Teorema de Green: Dado un campo vectorial $W : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de componentes $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, para todo circuito simple $C \subset D$ tal que $RI(C) \subset D$, se verifica la igualdad

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{RI(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (9.4)$$

[El circuito C debe estar orientado positivamente respecto de su recinto interior $RI(C)$, (ver *Observación 9.2* abajo), caso contrario (9.4) es válida con cambio de signo en uno cualquiera de sus miembros]. ■

Obsérvese que de la propiedad (9.1) se deduce que el Teorema de Green no dice nada interesante para campos conservativos, pues si W es conservativo, ambos miembros de la igualdad son nulos. La consecuencia más importante del Teorema es que implica

inmediatamente la recíproca de la Proposición (9.1), siempre y cuando para todo circuito simple $C \subset D$ se verifique que $RI(C) \subset D$. Pero esto es precisamente lo que caracteriza a los abiertos simplemente conexos del plano.

Proposición 9.2 Sea $W : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de componentes $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 en un abierto simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, W es conservativo en D si y solamente si para todo $(x, y) \in D$: $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$. ■

Por lo tanto, para dominios simplemente conexos, la detección de campos conservativos es muy sencilla. Para finalizar el repaso, una observación y una nota.

Observación 9.1: Mi experiencia docente me obliga a aclarar un malentendido que suele propagarse inexplicablemente a partir de la proposición anterior: “en un dominio que no es simplemente conexo no puede haber campos conservativos”. En el Contraejemplo 9.1, el dominio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo, obviamente (no existen contraejemplos en dominios simplemente conexos: Proposición 9.2). Pero esto no significa que en un dominio no simplemente conexo no puedan existir campos conservativos y es muy fácil dar ejemplos. Uno trivial es el campo nulo. Pero veamos uno más interesante: el campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ es de clase C^∞ , por lo tanto $\nabla \varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo conservativo de clase C^∞ en el abierto no simplemente conexo $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. La caracterización (iii) dada en página 1 de los campos conservativos permite construir ejemplos de campos conservativos de manera muy sencilla: dado un abierto D (simplemente conexo o no), elija su campo escalar preferido $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Entonces $\nabla \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo continuo conservativo. Además, todos los campos conservativos en D son de esta forma, como vimos al principio de este capítulo (nuevamente: página 1).

Nota 9.1: Sobre orientaciones de bordes de recintos. Recintos triangulables.

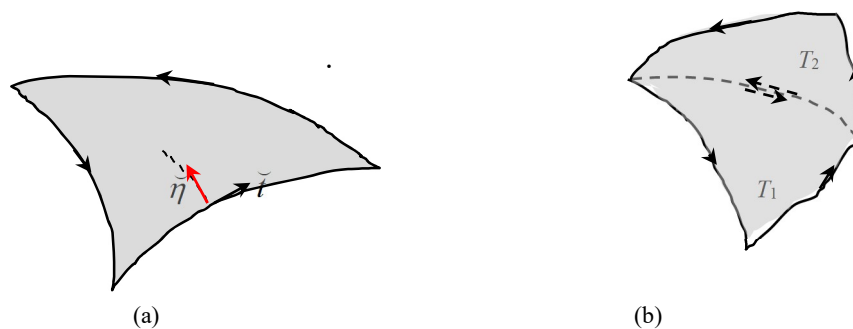


Fig. 1

En la figura 1 (a) ilustramos lo que se denomina un *triángulo curvilíneo*, con su borde orientado positivamente. Esto debe entenderse de la siguiente manera: el borde de un triángulo curvilíneo es un circuito simple formado por la concatenación de tres arcos de curvas regulares. Cada uno de estos arcos regulares es un lado del triángulo. El triángulo curvilíneo que determina este circuito es la unión del circuito y de su recinto interior, por lo tanto, un triángulo curvilíneo es cerrado y acotado. Ahora, la orientación *positiva* a la que nos referimos es aquella que “deja a la izquierda” el recinto interior. Existen formas más precisas de definir esto sin referencias antropomórficas. Por ejemplo: en cada punto de cada lado del triángulo, existe una base ordenada $[\tilde{\tau}, \tilde{\eta}]$ de $\mathbb{R}^2$ donde $\tilde{\tau}$ es un versor tangente al lado del triángulo en ese punto (este versor indica la dirección tangente y además el sentido de recorrido) y $\tilde{\eta}$ es un versor tangente a un arco de curva contenido en triángulo y cuyo origen es el punto de tangencia. En la Figura 1 (a) está ilustrado uno de estos versores en rojo. Ahora, la orientación del lado del triángulo es la correcta cuando la matriz de cambio de base entre la canónica y la base $[\tilde{\tau}, \tilde{\eta}]$ tiene determinante positivo. Esto, que parece excesivamente complicado, elimina toda referencia a manos derechas y manos izquierdas, además de permitir la generalización de estos conceptos a cualquier dimensión. Por otra parte, hay algo que hay que tener presente y que se suele omitir. La forma “antihoraria” en que se dibuja la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es absolutamente convencional y no hay razón geométrica alguna para esa elección. Lo único que se puede definir con un sentido geométrico absoluto es si dos bases (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ tienen *la misma orientación*, y eso está dado por el signo del determinante de la matriz de cambio de base. Si es positivo, ambas tienen *la misma orientación*, si es negativo, tienen *orientaciones distintas*. Tal vez, más adelante, con un poco más de tranquilidad, vuelva a mencionar el concepto de orientación en los espacios vectoriales reales. Por ahora, podemos mantener la tradición “antihoraria” para hacer los dibujitos de las bases orientadas positivamente (es decir: como la canónica).

Antes de pasar a figuras más variadas, mencionaré que los triángulos clásicos son triángulos curvilíneos cuyos lados son segmentos de recta, pero que también un círculo es un triángulo curvilíneo:

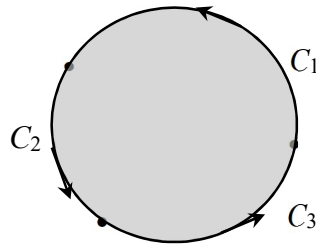


Fig. 2

Basta elegir tres puntos en su borde y se obtienen los tres lados concatenados muy prolijamente (como los lados C_1 , C_2 y C_3 de la Figura 2, por ejemplo). Los triángulos curvilíneos son bastante más variados que lo que su nombre parece indicar.

Ahora, como se ilustra en la Figura 1 (b), uniendo dos triángulos curvilíneos por una arista común, se obtiene lo que se podría llamar “cuadrilátero curvilíneo”. El borde de esta figura es el conjunto de lados de los triángulos que no son comunes a los dos. La observación crucial (y sencilla) es la siguiente: por un lado, la suma de las circulaciones de un campo vectorial a lo largo de los bordes orientados de ambos triángulos es igual a la circulación del campo a lo largo del borde del cuadrilátero orientado, pues las circulaciones sobre el lado común se cancelan (observar las orientaciones del lado común en la Figura 1 (b)). Por otro lado, la suma de las integrales dobles de un campo escalar (continuo) en cada uno de los triángulos, es igual a la integral de dicho campo escalar sobre todo el cuadrilátero curvilíneo. Esto permite inferir lo siguiente: la igualdad (9.4) del Teorema de Green para triángulos curvilíneos implica, automáticamente, igualdad para cuadriláteros curvilíneos: si se verifican las igualdades

$$\oint_{\partial T_1} Pdx + Qdy = \iint_{T_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{y} \quad \oint_{\partial T_2} Pdx + Qdy = \iint_{T_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

entonces

$$\underbrace{\oint_{\partial(T_1 \cup T_2)} Pdx + Qdy}_{\oint_{\partial T_1} Pdx + Qdy + \oint_{\partial T_2} Pdx + Qdy} = \underbrace{\iint_{T_1 \cup T_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy}_{\iint_{T_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{T_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy} \quad (9.5)$$

pues, como hemos observado, las circulaciones del campo en el lado común se cancelan.

Utilizaremos la expresión «arista cancelada» para referirnos a la arista o lado común de dos triángulos unidos (o “pegados”) por dicha arista, como ilustra la Figura 1 (b). De la misma manera en que se pueden unir (o “pegar”) dos triángulos curvilíneos por una arista común (que por lo tanto queda «cancelada»), se pueden unir más triángulos para formar *polígonos curvilíneos*, que son regiones que pueden ser bastante complicadas, como la de la Figura 3:

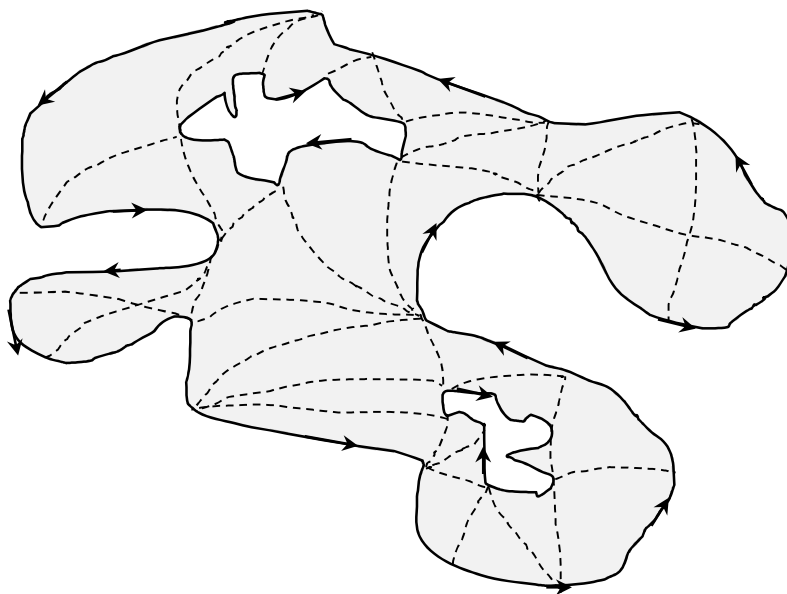
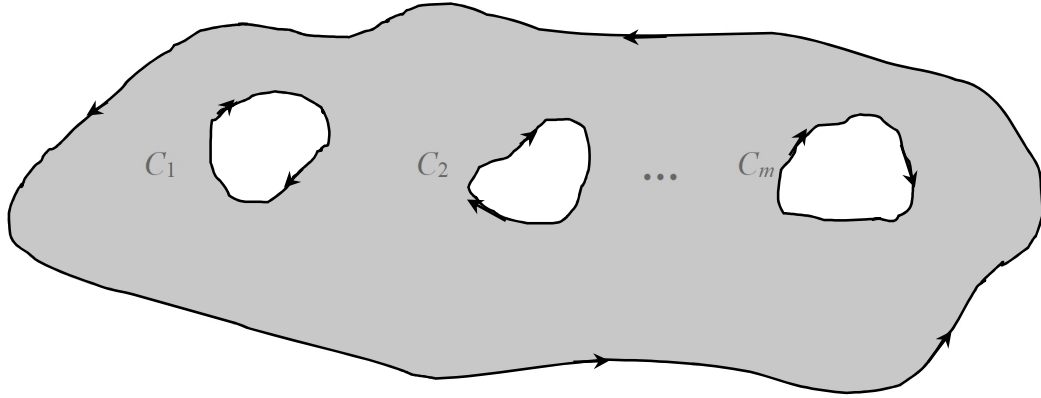


Fig. 3

Observe que el borde de esta figura es la unión de las aristas no canceladas de los triángulos, y que dicho borde está formado por tres circuitos simples: dos de ellos, llamémoslos “interiores”, están contenidos en el recinto interior del tercero, que denominaremos “exterior”. Observe, también, que el sentido de recorrido de estos circuitos no es ni “horario” ni “antihorario”: el sentido de recorrido es aquél que “deja la región gris a la izquierda”. Este tipo de recintos, es decir, los que se pueden obtener “pegando prolijamente” triángulos curvilíneos, se denominan *triangulables*. El adverbio “prolijamente” se refiere a que cada triángulo que se agrega a los ya elegidos, debe compartir una arista completa con alguno de los anteriores, no solamente una parte de la misma ni tampoco puntos interiores. Algo interesante: existe una manera de definir y precisar lo que estamos describiendo como “triángulos orientados pegados por una arista” y “recintos triangulables”, que es extremadamente sencilla, pero es considerada demasiado abstracta para ser mencionada en este curso. El interesado puede consultar, por ejemplo, la obra clásica *Calculus on Manifolds*, de Michael Spivak [Addison–Wesley (1965)] (La versión en castellano se llama *Introducción al Cálculo en Variedades*)

Los recintos triangulables son integrables, es decir: existe la integral de Riemann de cualquier función continua en un recinto triangulable. Ahora, es claro que el Teorema de Green se puede extender a cualquier recinto triangulable: sea R un recinto triangulable

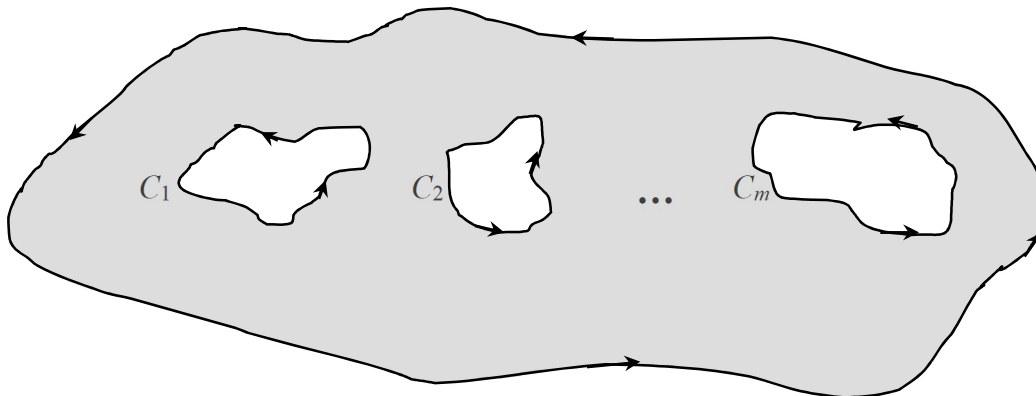
con borde $\Gamma \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$, siendo Γ el circuito exterior y $C_1, C_2, \dots, C_m$ los circuitos interiores, con las orientaciones compatibles según se ha explicado.



Entonces,

$$\oint_{\partial R} Pdx + Qdy \stackrel{\text{definición}}{=} \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} Pdx + Qdy \stackrel{\text{Teorema de Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (9.6)$$

Esta identidad es una generalización inmediata de (9.5) y se suele presentar con los circuitos interiores orientados al revés, es decir, como en la figura siguiente (Figura 5):



En este caso, el teorema de Green toma la siguiente forma:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy - \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (9.7)$$

Una aplicación particularmente interesante de esta fórmula es al caso de un campo que verifica $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en un dominio que contiene al recinto R , sin ser conservativo (para campos conservativos, la fórmula (9.7) sigue sin decir nada interesante), pues entonces su circulación sobre el circuito exterior es la suma de las circulaciones en los circuitos interiores. Veremos una variante de este fenómeno en poco tiempo.

Nos hemos extendido bastante sobre esta versión fuerte del Teorema de Green por dos razones: la presentación del teorema a partir de triángulos curvilíneos se puede utilizar para el Teorema de Stokes, para el cual tienen que ser precisados rigurosamente los conceptos de superficie con borde, superficie orientable (o bilátera) y orientaciones compatibles de bordes con superficies. Las superficies triangulables constituyen una clase más que suficiente para las aplicaciones usuales del Teorema de Stokes, donde habitualmente aparecen superficies no regulares en todos sus puntos. Otra razón es que de esta manera va a ser presentada la versión más fuerte de un pariente muy cercano del Teorema de Green: el Teorema de Cauchy-Goursat. El alumno no debe temer la aparición de recintos espeluznantes como el de la Figura 3. Y dudo que alguna vez tenga que construir una triangulación con más de cuatro triángulos curvilíneos. El concepto de superficies triangulables facilita inmensamente el trabajo teórico de precisar conceptos y demostrar propiedades importantes, como los teoremas integrales. Por ejemplo: para la demostración del Teorema de Green (o el de Stokes), alcanza con demostrarlo primero para un triángulo ubicado en el lugar más cómodo del plano, luego extenderlo a cualquier triángulo curvilíneo mediante un cambio de coordenadas (“coordenadas curvilíneas”, en general) y la correspondiente transformación de la integral doble. El resto consiste en “pegar prolijamente” triangulitos curvilíneos. El interesado en este método, ya clásico, puede consultar, por ejemplo *Calculus on Manifolds*, del Maestro Michael Spivak [Addison -Wesley - 1965] (La versión en castellano se llama *Introducción al Cálculo en Variedades*) (Hemos citado esta obra de arte por segunda vez en este capítulo, lo que no es un olvido ni una distracción)

Fin Nota 9.1.

Volviendo a Análisis III, nuestro propósito ahora es darle un significado al símbolo $\int_C f(z)dz$, donde $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ y $C \subset D$ es un camino de integración. El nombre para este símbolo ya lo tenemos y no es muy original: *integral de f sobre C*. Si u y v son las componentes real e imaginaria de f , es

decir, si para cada $z = x + iy \in D$ es $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la siguiente secuencia de igualdades parece (y es) muy natural:

$$\int_C f(z)dz = \int_C \overbrace{[u + iv]}^f \overbrace{[dx + idy]}^{dz} = \int_C [udx - vdy + i(vdx + udy)] = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \quad (9.8)$$

En la última igualdad hemos utilizado una linealidad que justificaremos enseguida. Lo que vamos a hacer ahora es definir la integral de f sobre C a partir del último miembro de (9.8), que es un número complejo cuyas partes real e imaginaria son perfectamente conocidos desde nuestro paso por Análisis II y que hemos recordado en los párrafos anteriores: son las circulaciones de dos campos vectoriales sobre C .

Definición 9.1: Dada una función continua $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ en $D \subseteq \mathbb{C}$ y un camino de integración $C \subset D$, se define como integral de f sobre C al número complejo

$$\int_C f(z)dz \stackrel{def}{=} \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \quad (9.9)$$

donde u y v son las componentes real e imaginaria de f .

Observación 9.2: Al igual que en el caso de las integrales definidas de Análisis I, la letra z en el símbolo $\int_C f(z)dz$ no juega ningún papel especial, como el índice en una sumatoria.

Es decir, $\int_C f(z)dz = \int_C f(w)dw = \int_C f(p)dp = \int_C f(\lambda)d\lambda = \dots$ etc, etc, etc. El origen de esta notación debe buscarse en las sumas de Riemann, lo mismo que en las integrales definidas de Análisis I, y volveremos en un ratito a mencionarlas. Mientras tanto, es bueno saber que también se puede utilizar la notación $\int_C f$, mucho más sencilla y sin “variables mudas”.

La integral (9.9) es, entonces, un número complejo cuya componente real es la integral de línea del campo $\vec{f}_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}_1(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$, y la componente imaginaria es la integral de línea del campo $\vec{f}_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}_2(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$. Por lo tanto, todos los ejemplos y propiedades básicas de las integrales de línea de campos vectoriales en el plano se trasladan a las integrales de funciones complejas. Algunas de estas propiedades las resumimos en la siguiente proposición:

Proposición 9.3: Sean: $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, $C \subset D$ un camino de integración, λ una constante compleja y $C = C_1 \cup C_2$ una descomposición de C en dos caminos concatenados. Entonces:

$$(i) \int_C (f + g) = \int_C f + \int_C g$$

$$(ii) \int_C (\lambda f) = \lambda \int_C f$$

$$(iii) \int_{C^{(-)}} f = - \int_C f \quad (\text{donde } C^{(-)} \text{ es el opuesto del camino } C)$$

$$(iv) \int_{C_1 \cup C_2} f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$

Demostración: son consecuencias directas de la definición (9.9) y de las correspondientes propiedades de las integrales de línea de campos vectoriales que se estudiaron en Análisis II ■

Antes de pasar a algunas propiedades específicas de las integrales de funciones complejas, veremos a continuación otra forma, más clásica, de definir estas integrales. Desde luego, ya las hemos definido de manera muy expeditiva utilizando algunas herramientas de Análisis II, pero esta otra forma tiene un par de ventajas que ya se ven en las integrales de línea: la invariancia respecto de las parametrizaciones regulares de los caminos de integración y una acotación del módulo de la integral extremadamente importante en todo lo que sigue. Las “quebradas” del nombre del siguiente lema es un término antiguo para designar a las poligonales. El enunciado incluye detalles técnicos que conviene ir visualizando en la Figura 6 a continuación.

Lema 9.1 (“Aproximación por quebradas”)

Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $D \subseteq \mathbb{C}$, y $C \subset D$ un camino de integración de punto inicial p y punto final q . [Los puntos de este camino están ordenados según el sentido de recorrido del mismo. Indicaremos con $\prec$ este orden]. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una secuencia de puntos

$$p = z_0 \prec z''_1 \prec z_1 \prec z''_2 \prec z_2 \prec z''_3 \prec z_3 \prec z''_4 \prec z_4 \prec z''_5 \prec \dots \prec z_{n-1} \prec z''_n \prec z_n = q \quad (9.10)$$

del camino C

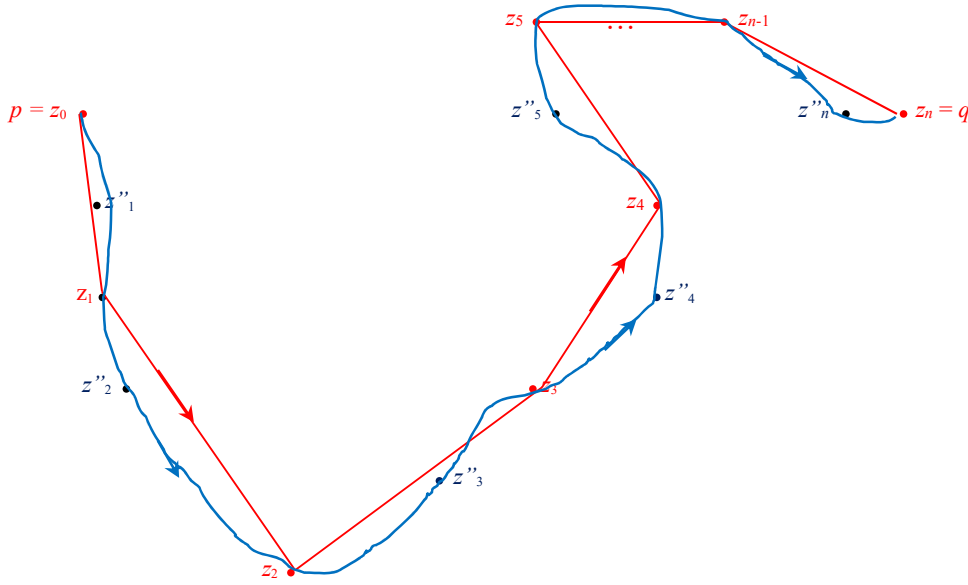


Fig. 6
Poligonal (en rojo) inscripta en el camino C (azul)

tales que

$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z''_k) \overbrace{(z_k - z_{k-1})}^{\Delta z_k} \right| < \varepsilon \quad (9.11)$$

Además, $\int_C f(z) dz$ es el único número complejo con esta propiedad.

Demostración: Hemos incluido la notación $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ para rescatar del olvido una notación clásica tan hermosa como útil. Con las notaciones habituales, tenemos que las componentes real e imaginaria de las sumas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(z''_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(x''_k, y''_k) + iv(x''_k, y''_k)] [\Delta x_k + i \Delta y_k] = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(x''_k, y''_k) \Delta x_k - v(x''_k, y''_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(x''_k, y''_k) \Delta x_k + u(x''_k, y''_k) \Delta y_k] \end{aligned}$$

son sumas de Riemann de $\int_C u dx - v dy$ y de $\int_C v dx + u dy$ respectivamente. ■

Observación 9.3: Es importante para lo que sigue observar que las sumas

$$\sum_{k=1}^n |f(z_k'')| |\Delta z_k|$$

son sumas de Riemann de la integral $\int_C |f(z)| |dz|$, que es la integral de línea del campo escalar $\varphi(x, y) = |f(x + iy)|$ sobre la curva C , pues por un lado tenemos que $|\Delta z_k| = |\Delta x_k + i\Delta y_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ (utilizamos las notaciones habituales) y por otro lado, $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dl$: el elemento infinitesimal tangente de longitud de arco.

Corolario 9.1: Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $D \subseteq \mathbb{C}$ y $C \subset D$ un camino de integración. Sea $M_C(f)$ una cota superior cualquiera de $|f|$ en C , es decir: $M_f(C) \geq \max \{|f(z)| : z \in C\}$ (este máximo existe pues $|f|$ es continua en el cerrado y acotado C), y sea $L(C)$ la longitud de C . Entonces:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M_f(C) L(C), \quad (9.12)$$

(Respecto de la segunda integral, ver Observación precedente)

Demostración: (Solo para los interesados audaces. Los interesados no tan audaces, pueden probar de llegar solamente hasta las desigualdades (9.13), donde está concentrada la idea de porqué valen las desigualdades (9.12). Los no interesados pueden ignorarla olímpicamente sin consecuencia alguna para la aprobación de la materia). Para las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(z_k'') \Delta z_k$ el enunciado no presenta ninguna dificultad. Sea P_C la poligonal inscrita en C asociada a la secuencia de puntos correspondientes (ver Figura 6). Sea $L(P_C)$ la longitud de la poligonal. Entonces:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k'') \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k'')| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n M_C(f) |\Delta z_k| = M_f(C) \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| = M_f(C) L(P_C)$$

Ahora bien: es evidente que $L(P_C) \leq L(C)$, pues la longitud de cada segmento de recta de extremos z_{k-1} y z_k es siempre menor o igual que cualquier arco de curva que tenga esos mismos extremos. Por lo tanto,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq M_f(C) L(C) \quad (9.13)$$

para cualquier suma de Riemann. Ahora, para cada entero positivo m sea S_m una suma de Riemann para $\int_C f(z) dz$ tal que $\left| \int_C f(z) dz - S_m \right| < \frac{1}{m}$, y sea S'_m una suma de Riemann para $\int_C |f(z)| |dz|$ tal que $\left| \int_C |f(z)| |dz| - S'_m \right| < \frac{1}{m}$. Entonces, $S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz$ y $S'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_C |f(z)| |dz|$. Por otro lado, de (9.13) tenemos $|S_m| \leq S'_m \leq M_f(C) L(C)$ para todo m . Tomando límites en estas desigualdades para $m \rightarrow \infty$ obtenemos la tesis, es decir: $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M_f(C) L(C)$ ■

Observación 9.3: La existencia de sucesiones de sumas de Riemann convergentes a las integrales, probada y utilizada en esta demostración, permite completar los detalles de las demostraciones – que damos esquemáticamente – de los siguientes corolarios.

Corolario 9.2. (Invariancia respecto de las parametrizaciones) Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $D \subseteq \mathbb{C}$, y $C \subset D$ un camino de integración. Entonces, la integral $\int_C f(z) dz$ no depende de las parametrizaciones (regulares, locales y orientadas) del camino C .

Demostración: En las sumas de Riemann no intervienen las parametrizaciones. ■

Corolario 9.3: Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $D \subseteq \mathbb{C}$, y $C \subset D$ un camino de integración. Entonces, $\overline{\int_C f(z) dz} = \int_C \overline{f(z)} \overline{dz}$, donde (con la notación habitual) $\overline{dz} = \overline{dx + i dy} = dx - i dy = d\overline{z}$.

Demostración: Para cada suma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(z_k'') \Delta z_k$ para la integral $\int_C f(z) dz$ tenemos $\overline{\sum_{k=1}^n f(z_k'') \Delta z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{f(z_k'') \Delta z_k}$, donde $\overline{\Delta z_k} = \overline{\Delta x_k + i \Delta y_k} = \Delta x_k - i \Delta y_k$. ■

Terminamos esta parte con una cuestión práctica de notación. Recordemos que un camino de integración en el plano es la concatenación de arcos regulares de curvas orientadas, es decir, de arcos de curvas que admiten una parametrización regular, lo que significa todo lo siguiente: un arco de curva regular es un conjunto $C = \{\gamma(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ donde $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1 en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[t_0, t_1] \subset I$, γ es inyectiva en (t_0, t_1) y además $\forall t \in (t_0, t_1) : \gamma'(t) \neq 0$. Trabajando en el plano complejo, es habitual (y muy cómodo) utilizar la notación $z : I \longrightarrow \mathbb{C}$ para las parametrizaciones $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Escribiremos $z(t) = x(t) + iy(t)$ en lugar de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, y $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ en lugar de $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$: para evitar confusiones, en este párrafo vamos a reservar el símbolo ' para las derivadas de funciones complejas (respecto de su variable compleja) y el punto ' para las derivadas de las parametrizaciones (respecto de su parámetro real). Obviamente, un arco regular admite parametrizaciones no regulares, pero convendremos en que cuando se mencione una parametrización de un arco regular, se sobreentiende que se trata de una parametrización regular, salvo mención explícita en contrario. Con estas notaciones y esta convención, dada una función continua $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ en $D \subseteq \mathbb{C}$, de componentes real e imaginaria u y v respectivamente, y un arco de curva regular $C = \{z(t) : t_0 \leq t \leq t_1\} \subset D$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy = \int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t)) \overbrace{\dot{x}(t)}^{dx} - v(x(t), y(t)) \overbrace{\dot{y}(t)}^{dy}] + \\ &+ i \int_{t_0}^{t_1} [v(x(t), y(t)) \overbrace{\dot{x}(t)}^{dx} + u(x(t), y(t)) \overbrace{\dot{y}(t)}^{dy}] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \overbrace{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]}^{f(x(t)+iy(t))} \overbrace{[\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)]}^{\dot{z}(t)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \overbrace{f(z(t)) \dot{z}(t)}^{dz} dt \end{aligned}$$

Es decir, para arcos de curvas regulares $C = \{z(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ se verifica que

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (9.14)$$

Recordemos que el miembro izquierdo de esta igualdad no depende de la parametrización regular utilizada en el segundo (Corolario 9.2). Pero la fórmula (9.14), además de ser maravillosamente natural desde el punto de vista de la escritura, no solo facilita el cálculo de estas integrales, si no que permite estudiar fácilmente lo que pasa cuando se hace un cambio de variables, por un lado, y deducir la *Regla de Barrow* para variable compleja por el otro. Veamos:

Proposición 9.4: (*Cambio de variables*) Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $D \subseteq \mathbb{C}$, y $C \subset D$ un arco de curva regular. Sea $h : \tilde{D} \longrightarrow D$ una función holomorfa en un abierto $\tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ y biyectiva, tal que $h^{-1} : D \longrightarrow \tilde{D}$ es holomorfa¹. Entonces, $C_h = \{w \in \tilde{D} : h(w) \in C\} = h^{-1}(C)$ es un arco de curva regular en $\tilde{D}$ y se verifica

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_h} f(h(w))h'(w)dw \quad (9.15)$$

¹ Veremos en el capítulo siguiente que si una función holomorfa es biyectiva, su inversa también es holomorfa. Esta propiedad no es para nada trivial y – de hecho – no ocurre en análisis de variable real. Volvemos con el ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$, que es de clase C^∞ en toda la recta y biyectiva, pero su inversa no es derivable en 0.

Demostración: Con la notación ya establecida y de manera esquemática:

$$(a) \ C = \{z(t) : t_0 \leq t \leq t_1\} \Rightarrow C_h = h^{-1}(C) = \left\{ \overbrace{h^{-1}(z(t))}^{\mathfrak{w}(t)} : t_0 \leq t \leq t_1 \right\}, \text{ donde } \mathfrak{w} = h^{-1} \circ z$$

es una parametrización regular (ejercicio sencillito). Por lo tanto, C_h es, efectivamente, un arco de curva regular.

$$(b) \ C = h(C_h) = \left\{ \overbrace{h(\mathfrak{w}(t))}^{z(t)} : t_0 \leq t \leq t_1 \right\}, \text{ por lo tanto:}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &\stackrel{(9.14)}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\dot{z}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(h(\mathfrak{w}(t)))\frac{d}{dt}[(h(\mathfrak{w}(t)))]dt = \\ &\int_{t_0}^{t_1} f(h(\mathfrak{w}(t)))h'(\mathfrak{w}(t))\dot{\mathfrak{w}}(t)dt \stackrel{(9.14)}{=} \int_{C_h} f(h(w))h'(w)dw \end{aligned}$$

■

Proposición 9.5: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ que admite primitiva en D , es decir, una función $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$. Entonces, para todo camino $C_{[p,q]} \subset D$ de punto inicial p y punto final q , se verifica:

$$\int_{C_{[p,q]}} f(z) dz = F(q) - F(p) \quad (9.16)$$

Demostración: Probemos primero la fórmula para el caso en que $C_{[p,q]}$ es un arco de curva regular, $C_{[p,q]} = \{z(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$, donde – obviamente – $z(t_0) = p$ y $z(t_1) = q$. Entonces, utilizando (9.14), la hipótesis y la “regla de la cadena” de la Proposición 5.3:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} F'(z(t)) \dot{z}(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [F(z(t))] dt \stackrel{(*)}{=} F(z(t_1)) - F(z(t_0)) = F(q) - F(p) \end{aligned}$$

Para entender la cuarta igualdad (la indicada con (*)), basta exhibir las componentes real e imaginaria, por ejemplo $F(z(t)) = \alpha(t) + i\beta(t)$, pues entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [F(z(t))] dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\alpha(t)}{dt} dt + i \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\beta(t)}{dt} dt = \alpha(t_1) - \alpha(t_0) + i[\beta(t_1) - \beta(t_0)] = \\ &= \alpha(t_1) + i\beta(t_1) - [\alpha(t_0) + i\beta(t_0)] = F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \end{aligned}$$

Ahora, veamos el caso general en que el camino es una concatenación

$$C_{[p,q]} = C_{[p,p_1]} \cup C_{[p_1,p_2]} \cup C_{[p_2,p_3]} \cup \dots \cup C_{[p_{m-1},p_m]} \cup C_{[p_m,q]}$$

de arcos regulares $C_{[p,p_1]}, C_{[p_1,p_2]}, C_{[p_2,p_3]}, \dots, C_{[p_{m-1},p_m]}, C_{[p_m,q]}$. Ya hemos probado (9.16) para cada uno de estos arcos, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_{[p,q]}} f(z) dz &= \int_{C_{[p,p_1]}} f(z) dz + \int_{C_{[p_1,p_2]}} f(z) dz + \int_{C_{[p_2,p_3]}} f(z) dz + \dots + \int_{C_{[p_{m-1},p_m]}} f(z) dz + \int_{C_{[p_m,q]}} f(z) dz = \\ &= \overbrace{F(p_1) - F(p)}^{(1)} + \overbrace{F(p_2) - F(p_1)}^{(2)} + \overbrace{F(p_3) - F(p_2)}^{(3)} + \dots + \overbrace{F(p_m) - F(p_{m-1})}^{(m)} + \overbrace{F(q) - F(p_m)}^{(m)} = \\ &= F(q) - F(p) \end{aligned}$$

Hemos etiquetado los pares de términos que se cancelan. ■

La última proposición merece una pregunta y una observación, por lo menos. La pregunta es si las funciones continuas de variable compleja (en abiertos conexos, para facilitar el planteo) admiten primitivas. Esto sí ocurre para funciones continuas de variable real (en intervalos, que son los conexos de la recta, también para facilitar el planteo).

Ahora, la observación al respecto es que el segundo miembro de la fórmula (9.16) no depende del camino de integración, solamente de los puntos inicial y final. Por otra parte, recordemos que la integral del miembro izquierdo de (9.16) es un número complejo cuya componente real es la integral de línea del campo $\vec{f}_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}_1(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$, y la componente imaginaria es la integral de línea del campo $\vec{f}_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}_2(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$. Por lo tanto, si esta integral no depende del camino de integración, estos dos campos son conservativos. Esto ya indica que no cualquier función compleja continua tiene primitivas. Finalmente, veamos qué pasa en el caso en que $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$ son conservativos: sean $U : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ los respectivos potenciales, es decir: $\vec{f}_1 = \nabla U$ y $\vec{f}_2 = \nabla V$. Entonces,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u$$

Pero esto significa que la función $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ es holomorfa (sus componentes son de clase C^1 , por lo tanto diferenciables, y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann). Más aún, su derivada es

$$F' = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f$$

Es decir: F es una primitiva de f . Vemos que existe una relación estrecha entre la independencia de las integrales de una función respecto de los caminos y la existencia de primitivas. Ya vimos que no toda función continua (de variable compleja) tiene primitivas. Para saber cuáles son las funciones que admiten primitivas, pasemos al capítulo siguiente. La respuesta es tan sencilla como sorprendente.
