Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

D. Prelat - 2020

MATERIAL COMPLEMENTARIO: SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

RESUMEN COMPACTO

Lista de definiciones y propiedades que se suponen conocidas por los alumnos de Análisis Matemático III. NO es un apunte ni un texto didáctico

El tema tiene la edad del análisis matemático mismo, es decir, más de cuatro siglos. Por lo tanto, la literatura sobre el tema es inmensa y el alumno puede consultar la bibliografía que más le guste, siempre y cuando provenga de sitios académicamente serios (consejo procedente para cualquier tema de estudio y que debería ser innecesario). De esa manera puede repasar el tema y encontrar las demostraciones que aquí no va a encontrar. De vez en cuando, seguir una demostración es un ejercicio saludable, y la falta absoluta de esta ejercitación puede inducir al estudiante a creer que la matemática es una ciencia empírica (inolvidable observación de un querido amigo y colega).

En todo lo que sigue, $\mathbb{K}$ designa el cuerpo de los números reales o el de los complejos, indistintamente. Al inicio de cada definición y de cada propiedad, el símbolo $\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$ significa que esa definición o propiedad es válida para los números reales y para los números complejos. En cambio, $\mathbb{K} = \Re$ indica la validez solo para los números reales. Para los demás conjuntos numéricos, las notaciones son las habituales: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

DEFINICIÓN 1 [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Una *sucesión en* $\mathbb{K}$ es una función $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$.

NOTACIÓN 1 [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Dada una sucesión α en $\mathbb{K}$*,* para cada $n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha_n$ (notación tradicional) y la misma sucesión α se indica habitualmente $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, o bien $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, si se considera $0 \in \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN 2 : Dada una sucesión $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$:

(1)[$\mathbb{K} = \Re$]: α es *acotada superiormente* sii existe una constante real b tal que $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq b$; análogamente, α es *acotada inferiormente* sii existe una constante real a tal que $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq \alpha_n$; α es *acotada* sii es acotada inferior y superiormente (es decir: si α *es* acotada como función real).

(1)(bis) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: α es *acotada* sii existe una constante real b tal que $\forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| \leq b$.

(2)[$\mathbb{K} = \Re$]: α es *creciente* sii $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$; es *estrictamente creciente* sii $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n < \alpha_{n+1}$; es *decreciente* sii $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$; es *estrictamente decreciente* sii $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > \alpha_{n+1}$; es *monótona* sii es creciente o es decreciente y es *estrictamente monótona* sii es estrictamente creciente o es estrictamente decreciente.

(3) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Una *subsucesión* de α es una composición $\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{K}$ donde la sucesión σ es estrictamente creciente. Se trata de una sucesión en $\mathbb{K}$ cuyos valores se indican $\alpha(\sigma(k)) = \alpha(n_k) = \alpha_{n_k}$. Ejemplos importantes: $(\alpha_{2k})_{k=0}^{\infty}$, $(\alpha_{2k+1})_{k=0}^{\infty}$ y $(\alpha_{m+k})_{k=0}^{\infty}$ (para cualquier natural m).

(4) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: La *serie de término general* α_n es la sucesión $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \right)_{n=0}^{\infty}$, es decir, la sucesión $A : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N} : A(n) = A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. Estas sumas se denominan *sumas parciales* de la serie e indicaremos la misma con el símbolo $\sum_n \alpha_n$.

DEFINICIÓN 3: Dada una sucesión $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$:

(1)[$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: α es *convergente* a un límite $a \in \mathbb{K}$ (se indica $\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = a$) sii

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n - a| < \varepsilon .$$

(2)[$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: α es una *sucesión fundamental* o *sucesión de Cauchy* sii *:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geq n_\varepsilon \wedge n \geq n_\varepsilon : |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$$

(3)[$\mathbb{K} = \Re$]: $\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall b \in (0, +\infty) : \exists n_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_b : \alpha_n > b$

$$\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall b \in (0, +\infty) : \exists n_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_b : \alpha_n < -b$$

(3)(*bis*)[$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: $\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = \infty \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}^+ : \exists n_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_b : |\alpha_n| > b$

DEFINICIÓN 4[$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Dadas dos sucesiones $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ y dados dos constantes $a \in \mathbb{K}$ y $b \in \mathbb{K}$, quedan bien definidas las sucesiones

$$\begin{array}{l}(1)\ a.\alpha + b.\beta = (a\alpha_n + b\beta_n)_{n=1}^{\infty} \\ (2)\ \alpha.\beta = (\alpha_n\beta_n)_{n=1}^{\infty}\end{array},$$

y además, si $\forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \neq 0$, también queda definida

$$(3)\ \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

PRIMERAS CONSECUENCIAS:

1) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Si una sucesión converge a un límite, este límite es único.

2) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Toda sucesión convergente es de Cauchy.

3) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Toda sucesión de Cauchy es acotada (por lo tanto, toda sucesión convergente es acotada: propiedad 2)). No vale recíproca.

4) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: a) Si una sucesión es convergente, toda subsucesión de la misma converge al mismo límite que la sucesión. b) $\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = a \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_{k+n} = a$

5) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Toda sucesión constante converge a dicha constante. Por lo tanto, de la propiedad anterior se deduce que toda sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ para la cual existen una constante real *c* y un número natural *m* tales que $\forall n \geq m : \alpha_n = c$, converge a la constante *c*.

6) [$\mathbb{K} = \Re$]: Si $\underset{n \to \infty}{Lim} \alpha_n = a > 0$, entonces para todo $r \in \Re$ tal que $0 < r < a$ existe $n_r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_r : \alpha_n \geq r > 0$. (Vale resultado análogo en el caso $a < 0$).

7) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Dada una sucesión $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$:

$$a)\ \underset{b\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = a \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\left|\alpha_n - a\right| = 0$$
$$b)\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = a \Rightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\left|\alpha_n\right| = \left|a\right|$$
$$c)\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = 0 \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\left|\alpha_n\right| = 0$$

8) [$\mathbb{K} = \Re$]: (Lema del Sándwich o del Arriero):

Dadas tres sucesiones $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$, $\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\Re$ tales que:

$$H.1)\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : \alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$$
$$H.2)\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\,\gamma_n = c$$

Entonces:

$$T)\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n = c$$

9)[$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: (Aritmética de límites): Dadas dos sucesiones $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$, convergentes en $\mathbb{K}$, y dos constantes reales λ , μ :

$$a)\ \underset{n\to\infty}{Lim}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n + \mu\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n$$
$$b)\ \underset{n\to\infty}{Lim}(\alpha_n\beta_n) = (\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n).(\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n)$$
$$c)\forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \neq 0 \neq \underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n \Rightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n}{\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n}$$

d) Si para todo natural n es $\beta_n \neq 0$ y además $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n \neq 0$, entonces $\underset{n\to\infty}{Lim}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \dfrac{\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n}{\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n}$

e) Si para todo natural n es $\beta_n \neq 0$, entonces $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n = \infty \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\dfrac{1}{\beta_n} = 0$.

[Caso particular de ***a***): $\underset{n\to\infty}{Lim}(\alpha_n + i\beta_n) = \underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n + i\underset{n\to\infty}{Lim}\,\beta_n$]

10) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Si la serie $\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge entonces $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = 0$ (no vale recíproca. Contraejemplo: $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$, como se demostrará más adelante).

TEOREMAS DE COMPLETITUD Y DE CONTINUIDAD SECUENCIAL:

TEOREMA 1[$\mathbb{K} = \Re$]: Toda sucesión de números reales $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ creciente y acotada superiormente es convergente. Más precisamente: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Re$.

TEOREMA 2 [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ es convergente (en $\mathbb{K}$).

TEOREMA 3: [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: (*Continuidad secuencial*)

Dados $D \subseteq \mathbb{K}$, una función $f : D \to \mathbb{K}$, y un punto $a \in D$ de acumulación, entonces:

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow [\forall \alpha : \mathbb{N} \to D: \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(a)]$$

SEGUNDA LISTA DE CONSECUENCIAS:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Esta propiedad es equivalente a la *Propiedad arquimedeana de los reales*)

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a.n + b}{c.n + d} = \frac{a}{c}$ (cualesquiera sean las constantes *a*, *b*, *c* y *d* reales o complejas tales que $c \neq 0$ y $cn + d \neq 0$ para todo natural *n*; de todos modos, para todo natural $n > \frac{|d|}{|c|}$ se verifica $cn + d \neq 0$).

3) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Para todo número real o complejo *b* tal que $|b| < 1$: $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$

4) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Sumas y series geométricas:

(4.1) Para todo número real o complejo $b \neq 1$ y todo natural *m*: $\sum_{k=0}^{m} b^k = \frac{1 - b^{m+1}}{1 - b}$

(4.2) Para todo número real o complejo *b* tal que $|b| < 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1 - b}$ (y la serie converge sii $|b| < 1$)

5) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Criterio de Cauchy para convergencia de series (ver Teorema 2)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty} \textit{converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_\varepsilon, p \geq 1 : \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right| < \varepsilon$$

6) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$] (<u>Convergencia absoluta</u>): $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge* $\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge*.

No vale recíproca, como se puede ver con la serie $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n=0}^{\infty}$: esta serie converge (criterio de Leibniz, ver 18) de esta lista) pero $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=0}^{\infty}$ diverge (criterio de la integral, 17) de esta lista). Esto motiva la definición de <u>convergencia condicional</u>: $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty}$ *converge condicionalmente* si converge pero no absolutamente.

7) [$\mathbb{K} = \Re$]: Criterio de acotación para convergencia de series de <u>términos positivos</u>:

$$[\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq 0] \wedge [\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq K] \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n=1}^{\infty} \text{ converge.}$$

(esto es una aplicación directa del Teorema 1 de completitud)

8) [$\mathbb{K} = \Re$]: Criterio de la *mayorante convergente* y de la *minorante divergente* para series de <u>términos positivos</u>:

$(H.1) \forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n \leq b_n$

$(H.2) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n=0}^{\infty}$ converge

(T) $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty}$ converge

(Y si se reemplaza hipótesis (H.2) por la divergencia de $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty}$, entonces la tesis es la divergencia de $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n=0}^{\infty}$)

8.bis) (Criterio de comparación asintótica):

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a_n \\ 0 < b_n \\ \underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{a_n}{b_n} = l \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \sum_n a_n \quad converge \quad \Leftrightarrow \quad \sum_n b_n \quad converge \right.$$

9) [$\mathbb{K} = \Re$]: Criterio del cociente para convergencia de series de <u>términos positivos</u>:

(**9.a**) $[\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > 0\,] \wedge [\ \underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = L < 1\,] \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

(**9.b**) $[\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > 0\,] \wedge [\ \underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = L > 1\,] \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

10) [$\mathbb{K} \in \{\Re, \mathbb{C}\}$]: Para todo $z \in \mathbb{C}$ la serie $\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge absolutamente.

11) Para todo par de números reales $a > 1$ y $b > 1$ la serie $\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k^b}{a^k}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge

12) Para todo par de números reales $a > 1$ y $b > 1$: $\underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{n^b}{a^n} = \underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{a^n}{n!} = \underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

13) Para todo real positivo a : $\underset{n \to \infty}{Lim} a^{\frac{1}{n}} = 1$ y $\underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{1}{n^a} = 0$

14) Para todo real positivo a: $\underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{Ln(n)}{n^a} = 0$

15) $\underset{n \to \infty}{Lim} n^{\frac{1}{n}} = 1$

16) $[\mathbb{K}=\Re]$: Criterio de la raíz para series de <u>términos positivos</u>:

(16.a) $[\forall n\in\mathbb{N}: \alpha_n>0\,]\wedge[\,\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}}=L<1\,]\Rightarrow\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

(16.b) $[\forall n\in\mathbb{N}: \alpha_n>0\,]\wedge[\,\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}}=L>1\,]\Rightarrow\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

17) $[\mathbb{K}=\Re]$: Criterio de la integral para series de <u>términos positivos</u>.

$(H.1)\, f:[1,+\infty)\to\Re$ es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en su dominio (esto ocurre, en particular, si f es continua o seccionalmente continua)

$(H.2)$ f es positiva y decreciente (es decir: para todo par de puntos $1\le x\le y$ se verifica que $0<f(y)\le f(x)$.

$(H.3)$ Existe y es finito el límite $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$

(T) $\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)\right)_{n=0}^{\infty}$ converge [y si $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx=+\infty$, la serie $\left(\sum_{k=0}^{n}f(k)\right)_{n=0}^{\infty}$ diverge]

18) $[\mathbb{K}=\Re]$: Criterio de Leibniz para <u>series alternadas</u>.

$(H.1)\ \forall n\in\mathbb{N}: 0\le a_{n+1}\le a_n$

$(H.2)\ \lim_{n\to\infty} a_n=0$

(T) $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right)_{n=0}^{\infty}$ converge

19) Criterios de Dirichlet-Abel

19.1) $[\mathbb{K}\in\{\Re,\mathbb{C}\}]$: Lema (*Suma por partes*):

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)(\beta_k-\beta_{k+1})\quad+\quad(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\beta_n$$

(19.2) $[\mathbb{K} = \Re]$: Primer criterio de Dirichlet –Abel:

$$(H.1)\ \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right| \leq M$$

$$(H.2)\ \forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \geq \beta_{n+1} \geq 0$$

$$(H.3)\ Lim_{n \longrightarrow \infty} \beta_n = 0$$

(T) $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k\right)_{n=0}^{\infty}$ converge

(19.3) $[\mathbb{K} = \Re]$: Segundo criterio de Dirichlet –Abel:

$(H.1) \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{k=0}^{\infty}$ converge

$$(H.2)\ \forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \geq \beta_{n+1} \geq 0$$

$(T) \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k\right)_{k=0}^{\infty}$ converge

20) Momento cultural: (algunas joyitas informales)

20.1) Para todo real x tal que $|x| < 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \dfrac{1}{1+x}$. Integrando término a término (se justificará este paso más adelante), $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = Ln(1+x)$ (ambos miembros se anulan para x = 0, por lo tanto la «constante de integración» es 0). Para x = 1 (este es el paso más delicado: el interesado puede buscar el *Lema de Abel para series de potencias*) se obtiene $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = Ln(2)$.

20.2) Para todo real x tal que $|x| < 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \dfrac{1}{1+x^2}$. Integrando término a término (se justificará este paso más adelante), $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = artg(x)$ (ambos miembros se anulan para x = 0, por lo tanto la «constante de integración» es 0). Para x = 1 (este es el paso más delicado, ver ítem anterior) se obtiene $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$. Esta igualdad la obtuvo Leibniz en el siglo XVII. Que la serie converge se deduce del criterio que lleva su nombre (la sucesión de los valores absolutos de los términos es decreciente y converge a 0), pero el cálculo de la suma de la serie es un problema mucho más difícil, como ocurre con casi todas las series (en ese sentido, las series geométricas son excepcionalmente sencillas).

TEMAS ADICIONALES PARA EL INTERESADO

1) Criterio de Raabe y comparación de criterios.

3) Versión fuerte del criterio del cociente (para serie de términos positivos) : si existen $m \in \mathbb{N}$ y $l \in \Re$ tales que $l<1$ y para todo $n \geq m$ es $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq l$, entonces $\sum_n \alpha_n$ converge (versión análoga para criterio de la raíz)

4) *Límite superior* y *límite inferior* de sucesiones de números reales acotadas y su aplicación en la versión fuerte del criterio de la raíz (importante para la determinación de los radios de convergencia de series de potencias: Teorema de Cauchy-Hadamard).

5) Medias aritméticas, geométricas y armónicas. Límites de promedios.

6) Las sucesiones $\frac{a^n n!}{n^n}, \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ y la fórmula de Wallis-Strirling: $\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2\pi}$

7) Reordenamiento de series.

8) Series dobles. Teorema de Fubini.

9) Productos infinitos

10) Lema de Abel (para series de potencias)