Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat - 2020

NOTAS COMPLEMENTARIAS

EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO Y ALGUNAS CONSECUENCIAS IMPORTANTES
(*muy importantes*)

Estas notas son complementarias de los apuntes de Análisis de Variable Compleja, escritos durante los años de la pandemia y que actualmente se encuentran disponibles en la página de la asignatura. Que sean complementarias no significa que los temas que presentan estas notas sean de menor importancia que los previamente expuestos en los mencionados apuntes. Significa, sencillamente, que estos temas no figuran explícitamente en el programa de la materia que cursan los alumnos de ingeniería, o bien se mencionan brevemente y omitiendo las demostraciones correspondientes. Tal vez, la única excepción sea el caso del Teorema Fundamental del Álgebra, que en los cursos lo demostramos habitualmente como consecuencia del Teorema de Liouville. Aquí damos otra demostración, utilizando el Teorema de Rouché.

La exposición es extremadamente sintética y asume el conocimiento de prácticamente todos los temas desarrollados previamente en todas las asignaturas de matemática de la carrera de grado de Ingeniería. Por otra parte, damos todas las demostraciones, para que el alumno interesado pueda entender con mayor profundidad los resultados aquí presentados.

Dado que – muy probablemente – éste sea el último apunte que escribo para esta asignatura, aprovecho la oportunidad para agradecer profundamente a mis amigos y colegas de la cátedra, comenzando por la coordinadora de la asignatura, la Dra. Graciela González y continuando con mis queridos e inefables compañeros: el Dr. Fernando Acero, el Dr. Mario Cachile y el Ing. Gustavo Murmis.

Daniel Prelat
Mayo 2024

Índice:

***Referencias*:**

[Stein]: *Complex Analysis* – Elias Stein , Rami Shakarchi – Princeton Lectures in Analyisis (2003)

[Trejo]: *Análisis de Funciones de Variable Compleja* – César A. Trejo – Harper (1974)

[Titchmarsh]: *The Theory of Functions* – E. C. Titchmarsh – Oxford University Press – 2d ed. (1939)

§.1) PRINCIPIO DEL ARGUMENTO. Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Sean:

(a) Γ un circuito simple positivo en el plano complejo;

(b) $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto D del plano complejo que contiene al circuito Γ y tal que en el recinto interior $RI(\Gamma)$ la cantidad de singularidades de f es finita y éstas singularidades son polos (es decir: f es merofomorfa en un abierto que contiene a $RI(\Gamma)$ y es holomorfa en Γ)[1];

(c) $\mathcal{Z}_\Gamma(f)$ la cantidad de ceros de f (contados con sus multiplicidades) pertenecientes a $RI(\Gamma)$, es decir: $\mathcal{Z}_\Gamma(f)$ es la suma de las multiplicidades de los ceros de f en $RI(\Gamma)$);

(d) $\mathcal{P}_\Gamma(f)$ la cantidad de polos de f (contados con sus órdenes) pertenecientes a $RI(\Gamma)$, es decir: $\mathcal{P}_\Gamma(f)$ es la suma de los órdenes de los polos de f en $RI(\Gamma)$].

Entonces, si f no se anula en ningún punto de Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathcal{Z}_\Gamma(f) - \mathcal{P}_\Gamma(f) \tag{1.1}$$

Demostración: Obviamente, se trata de una aplicación directa del Teorema de los Residuos. Veamos cuáles son las singularidades del integrando $h(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$, que son los ceros y los polos de f. Sea z_0 un cero de multiplicidad m de f, es decir: $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde g es holomorfa y no nula en un entorno de z_0 . Entonces, en este entorno:

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ .$$

Es decir: z_0 es un polo simple de h y el residuo de h en este polo es m = multiplicidad de z_0 como cero de f.

Ahora, sea z_p un polo de orden k de f, es decir: en un entorno de z_p tenemos

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_p)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_p)^{k+1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_p} + c_0 + c_1(z - z_p) + c_2(z - z_p)^2 + \ldots =$$

[1] Una función es meromorfa en un abierto U sii (por definición) sus singularidades en U son aisladas, son polos y no admiten punto de acumulación en U. Por ser $RI(\Gamma) \cup \Gamma$ compacto, si f es meromorfa en $RI(\Gamma)$ y holomorfa en Γ , la cantidad de polos de f en $RI(\Gamma)$ debe ser finita.

$$= \frac{1}{(z-z_p)^k} \overbrace{\left[c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_p) + c_{-k+2}(z-z_p)^2 + \ldots + c_0 (z-z_p)^k + c_1 (z-z_p)^{k+1} + \ldots\right]}^{g(z)} =$$

$$= (z-z_p)^{-k} g(z)$$

donde g es analítica y no nula en un entorno de z_p (pues $g(z_p) = c_{-k} \neq 0$ y $|g|$ es continua: lo de siempre…). Entonces:

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k(z-z_p)^{-k-1} g(z) + (z-z_p)^{-k} g'(z)}{(z-z_p)^{-k} g(z)} = \frac{-k}{z-z_p} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ .$$

Es decir: z_p es un polo simple de h con residuo $= -k = -$ orden de z_p como polo de *f*. ■

Interpretación geométrica: En el caso en que *f* es holomorfa en todo el recinto interior de Γ (además de ser holomorfa en los puntos de Γ), mediante el cambio de variable $w = f(z)$ se tiene

$$Z_\Gamma(f) \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \overset{w=f(z)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w} \ . \qquad (1.2)$$

El último miembro es el *índice* de *f*(Γ) en torno del origen y lo que demuestra el Principio del Argumento es que este índice coincide con la cantidad de ceros de *f* en el recinto interior del circuito Γ (contados con su multiplicidad). En el caso en que existen polos de *f* en el recinto interior del circuito, se puede recurrir a la proyección estereográfica (= *esfera de Riemann*) o bien considerar la función $g = \frac{1}{f}$, pues $\frac{g'}{g} = -\frac{f'}{f^2} f = -\frac{f'}{f}$, y los polos de *f* son los ceros de *g*. Una interpretación clásica consiste en considerar el cociente $\frac{f'}{f}$ como la derivada de log(*f*), pero esto requiere muchísima delicadeza: cualquiera sea el logaritmo utilizado, los ceros de *f* son puntos de ramificación de log(*f*).

§.2) TEOREMA DE ROUCHÉ . Eugène Rouché (1832 – 1910)

Sean:

(a) Γ un circuito simple positivo en el plano complejo;

(b) *f* y *g* dos funciones holomorfas en un abierto *D* que contiene a Γ y a su recinto interior, tales que:

$$\text{para todo } z \in \Gamma : |g(z)| < |f(z)| \qquad (2.1)$$

Entonces: f y $f+g$ tienen la misma cantidad de ceros en $RI(\Gamma)$, contados con sus multiplicidades. Es decir: las sumas de las multiplicidades de los ceros de f y la de los ceros de $f+g$ en $RI(\Gamma)$ son iguales.

Demostración: La demostración dada en [Trejo] incluye un paso muy dudoso, lo que es realmente excepcional. La que sigue es de [Stein], que utiliza un par de herramientas topológicas muy eficientes: (a) las funciones continuas transforman conexos en conexos y (b) Los conexos en la recta real son los intervalos. En particular, los únicos conexos contenidos en $\mathbb{Z}$ son los conjuntos formados por un solo punto. Por lo tanto, las únicas funciones continuas $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ con imagen contenida en $\mathbb{Z}$ son las funciones constantes. Otra propiedad clave que utiliza es la continuidad uniforme en compactos.

Para cada $t \in [0,1]$, sea $f_t : D \longrightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa tal que para todo $z \in D$:

$$f_t(z) = f(z) + tg(z) \tag{2.2}$$

Entonces:

(1) $f_0 = f$ y $f_1 = f + g$.

(2) Para todo $t \in [0,1]$ y todo $z \in \Gamma$ es $f_t(z) \neq 0$. Veamos por qué: si fuera $f_{t_0}(z_0) = 0$ para algún $t_0 \in [0,1]$ y algún $z_0 \in \Gamma$, de (2.2) tendríamos $|f(z_0)| = |-t_0 g(z_0)| = |t_0||g(z_0)| \leq |g(z_0)|$, contra la hipótesis (2.1)

Podemos aplicar, entonces, el principio del argumento a cada una de estas funciones:

$$\mathbb{Z}_\Gamma(f_t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz$$

Ahora, probemos que la función $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(t) = \mathbb{Z}_\Gamma(f_t)$ es continua. Para esto, simplifiquemos la notación: $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz = \oint_\Gamma h(t,z) dz$, donde la función $h : [0,1] \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h(t,z) = \frac{f_t'(z)}{2\pi i\, f_t(z)} = \frac{f'(z) + tg'(z)}{2\pi i [f(z) + tg(z)]}$$

es continua. Por lo tanto, en el compacto $[0,1] \times \Gamma$ es uniformemente continua. Esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo par de puntos (t_0, z_0), (t_1, z_1) en $[0,1] \times \Gamma$ tales que $\sqrt{(t_1 - t_0)^2 + |z_1 - z_0|^2} < \delta_\varepsilon$ se verifica $|h(t_1, z_1) - h(t_0, z_0)| < \varepsilon$ (recordemos que la propiedad clave de la continuidad uniforme es que δ_ε no depende de los puntos (t_0, z_0), (t_1, z_1)). En particular, esto ocurre si $z_1 = z_0$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo par de puntos (t_0, z), (t_1, z) en $[0,1]\times\Gamma$ tales que $|t_1 - t_0| = \sqrt{(t_1 - t_0)^2 + |z - z|^2} < \delta_\varepsilon$ se verifica $|h(t_1, z) - h(t_0, z)| < \varepsilon$, y entonces resulta

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| = \left|\oint_\Gamma h(t_1, z)dz - \oint_\Gamma h(t_0, z)dz\right| = \left|\oint_\Gamma [h(t_1, z) - h(t_0, z)]dz\right| \leq$$
$$\leq \oint_\Gamma |h(t_1, z) - h(t_0, z)||dz| \leq \varepsilon \oint_\Gamma |dz| = \varepsilon\, L(\Gamma)$$

(donde $L(\Gamma)$ es la longitud de Γ). Hemos demostrado que $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua. Dado que su imagen está contenida en $\mathbb{Z}$, por lo observado previamente, resulta que φ es constante. En particular,

$$Z_\Gamma(f + g) = Z_\Gamma(f_1) = \varphi(1) = \varphi(0) = Z_\Gamma(f_0) = Z_\Gamma(f)$$

Hemos demostrado el Teorema de Rouché. ■

Observación: «The Rouché's theorem is, in some sense, a continuity statement. It says that a holomorphic function can be perturbed slightly without changing the number of its zeros» [Stein], page 91. En esta observación de Stein, la *pequeña perturbación* es la función *g* del enunciado, y esta perturbación es *pequeña* en comparación con *f* en el sentido de que para todo $z \in \Gamma : |g(z)| < |f(z)|$. No es una cota demasiado exigente para una perturbación, y en realidad una idea geométrica más precisa está dada por la deformación continua $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ utilizada en la demostración, que es una homotopía lineal entre la función f y su *perturbación* $f + g$. El entero $Z_\Gamma(f)$ es, en realidad, un invariante respecto de estas homotopías (siempre y cuando se verifique la condición (2.1)) , y esto es precisamente lo que se ha demostrado.

§.3) TEOREMA DE LA FUNCIÓN ABIERTA (*para funciones holomorfas*).

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, f es *abierta*, es decir: para todo abierto $\Omega \subseteq D$, $f(\Omega)$ es abierto en $\mathbb{C}$.

Demostración: Dado $w_0 \in f(\Omega)$, existe $z_0 \in D$ tal que $w_0 = f(z_0)$. Ahora, sea $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\boxed{g(z) = f(z) - w_0}$. Por hipótesis, *g* es holomorfa y no constante en *D*, y (obviamente) z_0 es un cero de *g*. Por el principio de los ceros aislados, existe $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ y además tal que z_0 es el único cero de g en $\overline{D(z_0,r)}$ (puede ser un cero múltiple, pero es el único punto en $\overline{D(z_0,r)}$ donde g se anula). Ahora, por ser $\partial\overline{D(z_0,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ compacto y por ser $|g|$ continua, existe $\rho = \min\{|g(z)| : |z - z_0| = r\}$ y este mínimo es estrictamente positivo, pues por definición de mínimo es $\rho = |g(z_{\min})|$ para algún $z_{\min} \in \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ y g no se anula en ningún punto de la circunferencia. Ahora, sea w_1 un punto cualquiera del disco $D(w_0,\rho)$ y sea $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\boxed{h(z) = f(z) - w_1}$. Entonces:

$$(*) \text{ para todo } z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \text{ es } |g(z)| \geq \rho > |w_0 - w_1|$$

Por el Teorema de Rouché, las funciones g y $g + \overbrace{w_0 - w_1}^{\textit{función cte}} = h$ tienen la misma cantidad de ceros (contados con su multiplicidad) en el recinto interior de la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, es decir, en el disco $D(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Dado que g tiene un único cero en este disco, h también tiene al menos un cero en dicho disco (puede tener más de uno: la suma de las multiplicidades de los ceros de h en el disco es igual a la multiplicidad de z_0 como cero de g). Es decir: existe al menos un $z_1 \in D(z_0,r) \subset \Omega$ tal que $h(z_1) = 0$, es decir: $f(z_1) - w_1 = 0$. Hemos demostrado que $w_1 \in f(\Omega)$ y dado que w_1 es un punto cualquiera del disco $D(w_0,\rho)$, hemos demostrado que $f(\Omega)$ es abierto. ■

***Observación* 1**: La hipótesis de conexidad no es necesaria. Sea $\Omega = \bigcup_\lambda \Omega_\lambda$ la partición de Ω en componentes conexas (son abiertas). Entonces, $f(\Omega) = \bigcup_\lambda f(\Omega_\lambda)$ es abierto, pues cada $f(\Omega_\lambda)$ lo es (por lo ya demostrado) .

***Observación* 2:** Para funciones analíticas de variable real, este resultado es manifiestamente falso. Un sencillo contraejemplo: la función $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = x^2$ transforma el abierto $(-1,1)$ en $[0,1)$. Si consideramos la topología inducida por el codominio en la imagen $[0,+\infty)$, $[0,1)$ es un abierto para esta topología relativa. Pero si consideramos las topologías inducidas en las imágenes, toda función sería abierta. Lo que afirma el teorema precedente es, obviamente, mucho más fuerte: $f(\Omega)$ es abierto <u>en</u> $\mathbb{C}$.

§.4) PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO (*demostrado como corolario del teorema de la función abierta*).

(*a*) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, $|f| : D \longrightarrow \mathfrak{R}$ no alcanza un máximo (ni local ni absoluto).

(*b*) Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con clausura $\overline{D}$ acotada y sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en *D*. Entonces,

$$\sup\{|f(z)| : z \in D\} \leq \max\{|f(z)| : z \in \overline{D} - D\} \tag{4.1}$$

***Demostración* (*a*):** Supongamos que *f* alcanza un máximo (local o absoluto) en un punto $z_0 \in D$. Por ser *D* abierto, existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq D$ y tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, r)$ Ahora, por ser *f* holomorfa y no constante, es abierta y por lo tanto $f(D(z_0, r))$ es abierto en $\mathbb{C}$. Entonces, dado que $f(z_0) \in f(D(z_0, r))$, existe $\rho > 0$ tal que $D(f(z_0), \rho) \subseteq f(D(z_0, r))$. Pero el disco $D(f(z_0), \rho)$ contiene puntos *w* tales que $|w| > |f(z_0)|$ (de hecho, infinitos…). Sea $w_1 \in D(f(z_0), \rho)$ uno de estos puntos. Por ser $D(f(z_0), \rho) \subseteq f(D(z_0, r))$, existe $z_1 \in D(z_0, r)$ tal que $w_1 = f(z_1)$. Pero entonces $|f(z_1)| = |w_1| > |f(z_0)|$: absurdo, pues $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, r)$. ■

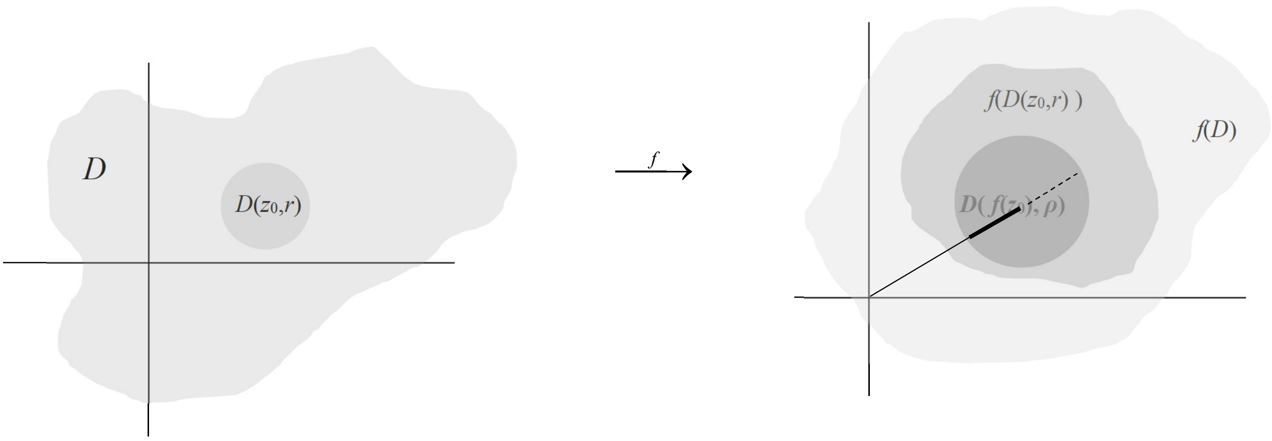

***Fig.* 1**

Los puntos del segmento punteado, contenido en el disco $D(f(z_0), \rho)$, son de la forma $f(z)$ donde *z* es un punto del disco $D(z_0, r)$, y claramente verifican $|f(z)| > |f(z_0)|$. Ahora, si $|f(z_0)| > 0$, podemos suponer que $D(f(z_0), \rho)$ no contiene el origen (es el caso de la figura) y por lo tanto los puntos del segmento sombreado (simétrico respecto del centro) contenido en $D(f(z_0), \rho)$ son de la forma $f(z)$ donde *z* es un punto del disco $D(z_0, r)$ y claramente verifican $|f(z)| < |f(z_0)|$. Por lo tanto, si $f(z_0) \neq 0$, $|f|$ tampoco puede alcanzar un mínimo local en ningún punto de *D*. La demostración de esto último dada más abajo (en el corolario) es más "eficiente" pero menos "visual".

***Demostración* (*b*):** Si *f* es constante, (4.1) es trivial. Observe que si *f* es constante en *D*, entonces es constante en $\overline{D}$ (por continuidad). Supongamos que *f* no es constante. Por ser $|f| : \overline{D} \longrightarrow \mathfrak{R}$ continua y por ser $\overline{D}$ compacto, existe $\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}\}$, y $|f|$ no puede alcanzar este máximo en *D*, por lo demostrado en (*a*). ■

***Observación* 1**: La hipótesis de que *D* es acotado para la afirmación (*b*) es inevitable. Por ejemplo: sea $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0 , y > 0\}$, es decir: $\overline{D} = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0 , y \geq 0\}$ es el primer cuadrante, y su frontera $\overline{D} - D$ es $\{x+iy \in \mathbb{C} : x = 0\,,\, y \geq 0\} \cup \{x+iy \in \mathbb{C} : x \geq 0\,,\, y = 0\}$. La función $f(z) = e^{-iz^2}$ es entera y por lo tanto holomorfa en D y continua en $\overline{D}$. Observemos que

$$f(x+iy) = e^{-i[x^2-y^2+2ixy]} = e^{2xy}e^{-i(x^2-y^2)},$$

por lo tanto, $|f(x+iy)| = 1$ para todo $x+iy \in \overline{D} - D$. Sin embargo, para todo $t > 0$ es $t+it \in D$ y se tiene que $f(t+it) = e^{2t^2}$ no es acotada.

COROLARIO: PRINCIPIO DEL MÓDULO MÍNIMO (es un chiste…)

(***a***) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa , no constante en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ y sin ceros en D. Entonces, $|f| : D \longrightarrow \Re$ no alcanza un máximo (ni local ni absoluto).

(***b***) Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con clausura $\overline{D}$ acotada y sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en D. Entonces, <u>si f no tiene ceros en D</u>:

$$\inf\{|f(z)| : z \in D\} \leq \min\{|f(z)| : z \in \overline{D} - D\} \qquad (4.2)$$

Demostración: Para la parte (a) de este corolario basta aplicar la correspondiente parte (a) del teorema precedente a la función $\dfrac{1}{f}$, que es holomorfa en D por hipótesis. La demostración de la parte (b) es exactamente la de parte (b) del teorema precedente, cambiando *max* por *min* y *máximo* por *mínimo*. ■

***Observación* 2:** El principio del máximo para armónicas es equivalente a que las armónicas no constantes sean funciones abiertas. Existen demostraciones del principio del máximo para armónicas que no utilizan este hecho (ver, por ejemplo, el Apéndice 1 (página 21) del *Breve apunte sobre Ecuaciones Diferenciales*). Por lo tanto, se puede probar que las armónicas no constantes son abiertas utilizando el principio del máximo (para armónicas) de la siguiente manera. Supongamos que $u : D \longrightarrow \Re$ es una función armónica no constante en un abierto conexo $D \subseteq \Re^n$ y sea D_0 un disco abierto tal que $\overline{D_0} \subset D$. La imagen $u(D_0)$ es un conexo en la recta real contenido en $u(\overline{D_0})$, que es compacto. Por lo tanto, $u(D_0)$ es un intervalo real acotado. Si fuera de la forma $u(D_0) = (a,b]$ o bien $u(D_0) = [a,b]$, b sería un máximo de u en el disco D_0 (absurdo). Si fuera de la forma $u(D_0) = [a,b)$ o bien $u(D_0) = [a,b]$, a sería un mínimo de u en el disco D_0 (absurdo). Por lo tanto, necesariamente $u(D_0)$ es un intervalo abierto. Finalmente, dado un abierto $A \subseteq D$, podemos expresarlo como unión de discos abiertos contenidos en D. Más precisamente, A es la unión de todos los discos abiertos contenidos en A. Digamos: $A = \bigcup_\lambda D_\lambda$. Entonces, $u(A) = u\left(\bigcup_\lambda D_\lambda\right) = \bigcup_\lambda u(D_\lambda)$ es abierto, pues cada $u(D_\lambda)$ es abierto.

Recíprocamente, asumiendo que las armónicas no constantes son abiertas, puede probarse el principio del máximo de manera totalmente análoga a la aquí dada para las funciones holomorfas. Sería interesante una demostración de que las armónicas no constantes son abiertas sin utilizar el principio del máximo.

§.5) TEOREMA DEL PUNTO FIJO. *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881 – 1966) (*demostrado para contracciones holomorfas del disco como corolario del Teorema de Rouché*).

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\overline{D(0,1)} \subset D$. Si $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \partial\overline{D(0,1)}$, entonces existe un único punto $z_0 \in D(0,1)$ tal que $f(z_0) = z_0$.

Demostración: La función $h(z) = -z$ es holomorfa en D y se tiene, para todo $z \in \partial\overline{D(0,1)}$, la desigualdad $|f(z)| < 1 = |h(z)|$. Por lo tanto (Teorema de Rouché), h y $f + h$ tienen la misma cantidad de ceros en $D(0,1)$ (contados con sus multiplicidades). La función h tiene un único cero (y es simple) en $D(0,1)$, por lo tanto $f + h$ tiene un único cero en $D(0,1)$, digamos $z_0 \in D(0,1)$. Pero es obvio que los ceros de $f + h$ son los puntos fijos de f. ■

Observación: Por el Principio del Máximo, la hipótesis «$|f(z)| < 1$ para todo $z \in \partial\overline{D(0,1)}$» es equivalente a «$|f(z)| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$». Además, observe que si f es constante en $\partial\overline{D(0,1)}$, el teorema sigue siendo válido: supongamos que $f(z) = w_0$ para todo $z \in \partial\overline{D(0,1)}$. Por la primera fórmula integral de Cauchy, resulta $f(z) = w_0$ para todo $z \in D(0,1)$. Ahora, dado que «$|f(z)| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$», resulta que $|w_0| < 1$, es decir: $w_0 \in D(0,1)$. Por lo tanto, $f(w_0) = w_0$. Finalmente, el hecho de que f sea constante implica inmediatamente que este punto fijo es único.

§.6) LEMA DE SCHWARZ. Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921)

Sean: R y M dos números reales positivos, D un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ que contiene es disco cerrado $\overline{D(0,R)}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que:

$$(H.1)\text{: } f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad (H.2)\text{: Para todo } z \in \partial\overline{D(0,R)} : |f(z)| \le M$$

Entonces: (*T*): Para todo $z \in \overline{D(0,R)}$: $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$. Además, vale la igualdad $|f(z_0)| = \frac{M}{R}|z_0|$ para algún punto interior $z \in D(0,R)$ <u>no nulo</u> si y solamente si *f* es de la forma $f(z) = az$ para algún complejo *a* tal que $|a| = \frac{M}{R}$ (observe que en este caso es $f'(0) = a$).

Demostración: La hipótesis (H.1) implica que la función $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & si \quad z \neq 0 \\ f'(0) & si \quad z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa en *D*. Probar esto solamente requiere probar que *g* es holomorfa en 0, y para probar esto basta considerar un desarrollo en serie de potencias de f centrada en 0 (el primer término es nulo) y mirar fijamente la serie y la función *g*. Ahora, basta aplicar el Principio del Módulo máximo a *g* en el disco $\overline{D(0,R)}$: para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ es $|g(z)| \leq \max\left\{|g(z)| : z \in \partial\overline{D(0,R)}\right\} \overset{(H.2)}{\leq} \frac{M}{R}$. Hemos probado que para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ es $|g(z)| \leq \frac{M}{R}$, lo que implica $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{M}{R}$ para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ no nulo, es decir: Ahora, $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$ para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ no nulo. Pero para $z = 0$ esta desigualdad es trivial (pues $f(0) = 0$).

Finalmente, si $|f(z_0)| = \frac{M}{R}|z_0|$ para algún punto interior $z_0 \in D(0,R)$ no nulo, entonces $\frac{M}{R} = |g(z_0)| \leq \max\left\{|g(z)| : z \in \partial\overline{D(0,R)}\right\} \leq \frac{M}{R}$, lo que significa que $|g(z_0)| = \max\left\{|g(z)| : z \in \partial\overline{D(0,R)}\right\}$ y por lo tanto $|g|$ alcanza su máximo en el interior del disco, lo que implica (nuevamente, por el Princiío del Módulo Máximo), que *g* es constante en *D*, es decir: existe algún complejo *a* tal que $g(z) = a$ para todo *z* en *D*. ■

Observación: Del caso particular $R = 1$ se deduce, mediante un cambio de escala, el resultado general aquí presentado. Este caso particular es un complemento muy importante del Teorema del Punto Fijo demostrado previamente. Además, el Lema de Schwarz interviene decisivamente en la demostración del Teorema de la Representación Conforme (de Bernhard Riemann, 1826 – 1866), un resultado tan profundo como asombroso.

§.7) TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA. Jean Le Rond D'Alembert (1717 – 1783) y Jean Robert Argand (1768 – 1822) (*demostrado como corolario del Teorema de Rouché*)

Sea $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función polinómica no constante. Entonces, *P* tiene al menos un cero. [Más aún: si *n* es el grado de *P*, entonces tiene *n* ceros, contando sus multiplicidades.]

Demostración: P es de la forma $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0$, donde $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$. Consideremos las funciones $f(z)=a_n z^n$ y $g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0$. Para cada $R \geq 1$ y cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|=R$:

$$|g(z)| \leq |a_{n-1}|R^{n-1}+...+|a_1|R+|a_0| \overset{R\geq 1}{\leq} (|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|)R^{n-1} \overset{a_m \neq 0}{=}$$

$$= \frac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|}{R|a_n|^n}|a_n|^n R^n = \frac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|}{R|a_n|^n}\left|a_n z^n\right| = \frac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|}{R|a_n|^n}|f(z)|$$

Por lo tanto, eligiendo $R > \dfrac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|}{|a_n|^n}$ se tiene, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|=R$, que $|g(z)|<|f(z)|$. Observe que, además, R debe cumplir la condición $R > 1$, necesaria para el razonamiento precedente; podemos elegir, por ejemplo: $R = 1+\dfrac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_0|}{|a_n|^n}$. Entonces, por el Teorema de Rouché, las funciones f y $f+g=P$ tienen la misma cantidad de ceros – contados con sus multiplicidades – en el disco $D(0,R)$. Dado que f tiene, obviamente, un cero de multiplicidad n en $D(0,R)$, se deduce que P tiene n ceros en $D(0,R)$, contados con sus multiplicidades. ■

Observación: La ubicación de los ceros de P dada en la demostración del teorema puede obtenerse mediante acotaciones bastante sencillas <u>a partir de la hipótesis de que *P* tiene, efectivamente, algún cero</u>. Por lo tanto, la parte conceptualmente importante del Teorema Fundamental del Álgebra es, como ya tenían claro los algebristas de los siglos XVI en adelante, la existencia de al menos una raíz compleja de cada polinomio no constante.

§.8) RECÍPROCA DEL TEOREMA DE INVERSIBILIDAD LOCAL PARA HOLOMORFAS.

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y localmente inyectiva en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$.

Demostración ([Titchmarsh] p. 198) Supóngase que $f'(z_0)=0$ para algún $z_0 \in D$. Dado que f no puede ser localmente constante (pues es localmente inyectiva), z_0 es un cero aislado de f'. Sea $r_1 > 0$ tal que $\overline{D(z_0,r_1)} \subset D$ y tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(z_0,r_1)} - \{z_0\}$. Ahora, la función $\boxed{h(z)=f(z)-f(z_0)}$ es analítica en D y tiene un cero de orden $k \geq 2$ en z_0, pues $h(z_0)=h'(z_0)=0$. Por ser h no idénticamente nula, (caso contrario, f sería constante) z_0 es un cero aislado de h. Sea

$r_2 > 0$ tal que $\overline{D(z_0,r_2)} \subset D$ y tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(z_0,r_2)} - \{z_0\}$. Sea $r = \min\{r_1,r_2\}$ y sea Γ la circunferencia de centro en z_0 y radio r. Entonces, $\Gamma \subset \overline{D(z_0,r_1) \cap D(z_0,r_2)} - \{z_0\}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&(a)\ h(z_0) = h'(z_0) = 0 : \ h \text{ tiene un cero de orden } k \geq 2 \text{ en } z_0. \\
&(b)\ \text{para todo } z \in \Gamma \text{ es } h(z) \neq 0 \text{ y } h'(z) \neq 0. \qquad (*) \\
&(c)\ \text{para todo } z \in RI(\Gamma) - \{z_0\} \text{ es } h(z) \neq 0 \text{ y } h'(z) \neq 0.
\end{aligned}$$

[observe que $RI(\Gamma) = D(z_0,r) = D(z_0,r_1) \cap D(z_0,r_2)$]. Por ser Γ compacto, existe

$$\mu = \min\{|h(z)| : z \in \Gamma\}$$

Observe que por ser mínimo, es $\mu = |h(z_*)|$ para algún $z_* \in \Gamma$ y entonces, por (*b*), es $\mu > 0$. Ahora, para cada $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |w_0| < \mu$ se tiene que:

$$\forall z \in \Gamma : |-w_0| < \mu \leq |h(z)|$$

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de Rouché a las funciones *h* y $g(z) = -w_0$ (constante), pues $\forall z \in \Gamma : |-w_0| = |g(z)| < \mu \leq |h(z)|$. Es decir: las funciones *h* y *h* + *g* tienen la misma cantidad de ceros en $RI(\Gamma) = D(z_0,r)$. Dado que $h(z) = f(z) - f(z_0)$ tiene un cero de orden $k \geq 2$ en z_0, la función $h(z) + g(z) = f(z) - f(z_0) - w_0$ tiene *k* ceros en $RI(\Gamma) = D(z_0,r)$, contado con sus multiplicidades. Pero ninguno de estos ceros puede ser z_0, pues $h(z_0) + g(z_0) = -w_0 \neq 0$, por lo tanto, los ceros de la función *h* + *g* en $RI(\Gamma) = D(z_0,r)$ están en el disco reducido $D(z_0,r) - \{z_0\}$. Pero en este disco reducido tenemos que $h'(z) \neq 0$ (ver (*) (c)), por lo tanto, los *k* ceros de la función $h(z) + g(z) = f(z) - f(z_0) - w_0$ en $D(z_0,r) - \{z_0\}$ <u>son simples</u>. Por ser $k \geq 2$, esto significa que existen por lo menos dos puntos <u>distintos</u> $z_1 \in D(z_0,r) - \{z_0\}$ y $z_2 \in D(z_0,r) - \{z_0\}$ tales que

$$f(z_1) - f(z_0) - w_0 = 0 = f(z_2) - f(z_0) - w_0$$

Es decir: $f(z_1) = f(z_0) + w_0 = f(z_2)$, donde $z_1 \neq z_2$ y por lo tanto *f* no es inyectiva. ■

***Observación* 1**: Como corolario inmediato, se tiene que si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, entonces, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. (Pues las funciones inyectivas son localmente inyectivas, por si hace falta aclarar…). Pero este corolario no es, en realidad, un resultado más débil, pues implica que cada restricción de una inyección holomorfa a un entorno abierto de cada punto tiene derivada nunca nula.

***Observación* 2**: Para funciones analíticas de variable real, este resultado es manifiestamente falso. Un contraejemplo muy sencillo es la función $x \mapsto x^3$, inyectiva en toda la recta y con derivada nula en el origen.

Corolario muy importante (de **§.3**) y **§.8**): Una función holomorfa e inyectiva en un abierto es un difeomorfismo analítico.

Demostración: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$. Por ser inyectiva, no puede ser constante y por lo tanto su imagen $f(D) = U$ es un abierto (§.3). Además, su derivada no se anula en ningún punto de *D* (§.8). Entonces, por el teorema de inversibilidad local, su inversa $f^{-1} : U \longrightarrow D$ es holomorfa. Por lo tanto, $f : D \longrightarrow U$ es un difeomorfismo analítico. ■

§.9) LÍMITES UNIFORMES Y DERIVACIÓN. (*Este resultado puede considerarse como complementario del Principio del Argumento y del Teorema de Rouché, pues se utiliza fuertemente en – por ejemplo – la demostración del Teorema de Hurwitz, ítem* 9).

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto *D* que converge uniformemente a una función *f* en cada compacto contenido en *D*. Entonces:

(*a*) *f* es holomorfa en *D* y
(*b*) la sucesión $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f' en cada compacto contenido en *D*.

***Demostración*:** [Stein], páginas 53 y 54. La convergencia uniforme en compactos permite intercambiar los límites involucrados con la integración en circuitos. El ítem (*a*) es consecuencia directa de la continuidad del límite uniforme de continuas y del Teorema de Morera. El (*b*) es consecuencia directa de (*a*) y de la segunda fórmula integral de Cauchy.

§.10) TEOREMA DE HURWITZ. **Adolf Hurwitz (1859 – 1919)**

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo *D* que converge uniformemente a una función *f* en cada compacto contenido en *D*. Si *f* no es idénticamente nula en *D*, entonces para $z_0 \in D$ y cada $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset D$ y tal que *f* no se anula en $\partial\overline{D(z_0, r)}$, existe un entero positivo n_r tal que para todo $n \geq n_r$: f_n y f tienen la misma cantidad de ceros en $D(z_0, r)$.

Demostración: Observe que por ser *f* no idénticamente nula en el abierto conexo *D*, sus ceros son aislados, por lo tanto para cada $z_0 \in D$ (sea un cero de *f* o no) existe, efectivamente un $r > 0$ que verifica las hipótesis del enunciado. La convergencia uniforme permite, una vez más, intercambiar límites con integrales sobre circuitos y la demostración es una aplicación directa de §.9) y del Teorema de Rouché.

Puede verse, por ejemplo, en la página 108 de los apuntes sobre análisis de variable compleja de R. B. Ash y W.P. Novinger (University of South Carolina):

https://people.math.sc.edu/girardi/m7034/book/AshComplexVariablesWithHyperlinks.pdf

Caso importante: si las funciones f_n no se anulan en ningún punto de D, entonces f tampoco o bien es idénticamente nula.

Corolario muy importante: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en un abierto conexo D que converge uniformemente a una función f en cada compacto contenido en D. Si f no es constante en D, entonces es inyectiva.

Demostración: Para cada $z_0 \in D$, se aplica el Teorema de Hurwitz a la sucesión $(f_n - f_n(z_0))_{n=1}^{\infty}$, que converge uniformemente en compactos a $f - f(z_0)$.