

ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – CUARTA FECHA – 04/08/2022
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. Comprobar que la función $f(x) = \frac{\cos(x^p)}{x^p(x+1)}$, con $p \in (0, 1)$, es absolutamente integrable en $(0, +\infty)$. Calcular su integral en $(0, +\infty)$ para un valor particular de p .

Resolución: Para cada par de números reales ε, b tales que $0 < \varepsilon < 1 < b$:

$$\int_{\varepsilon}^b \left| \frac{\cos(x^p)}{x^p(x+1)} \right| dx \leq \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x^p(x+1)} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p(x+1)} dx + \int_1^b \frac{1}{x^p(x+1)} dx$$

Por comparación asintótica del integrando con $\frac{1}{x^p}$ deducimos que si $p < 1$, entonces la integral $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p(x+1)} dx$ converge cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

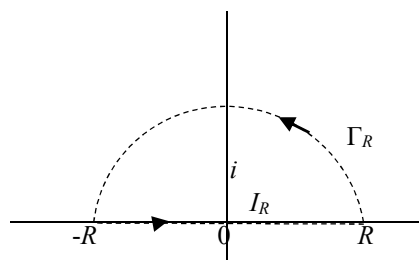
Por comparación asintótica del integrando con $\frac{1}{x^{p+1}}$ deducimos que si $p > 0$, entonces la integral $\int_1^b \frac{1}{x^p(x+1)} dx$ converge cuando $b \rightarrow +\infty$.

Cálculo de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^p)}{x^p(x+1)} dx$ para el caso $p = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(x+1)} dx \stackrel{x=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t(t^2+1)} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt \stackrel{\text{Integrando par}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

Utilizando la función $h(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$, los populares circuitos $\Gamma_R \cup I_R$ ilustrados en la figura, acotaciones adecuadas y Lema de Jordan, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx = 2\pi \text{RES}(h, i) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$



Por lo tanto: $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \frac{\pi}{e}$.

2. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones que modele la oscilación $u(x, t)$ de una cuerda de longitud 2π y extremos fijos, con condiciones iniciales $u(x, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \text{sen}(3x)$. Graficar aproximadamente $u(\pi, t)$ y $u(\frac{3}{2}\pi, t)$.

Resolución: Bajo determinadas simplificaciones físicas (como por ejemplo no considerar la fricción ni la fuerza gravitatoria), el modelo matemático es, como se sabe desde el siglo XVIII, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ (ii) u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ (iii) (a) u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 2\pi \\ & (b) \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \text{sen}(3x) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \end{array} \right. \quad (*)$$

Para cualquier constante real A , la función $u(x, t) = A \text{sen}(3x) \text{sen}(3ct)$ es solución de las ecuaciones (i), (ii) y (iii) (a). Por otra parte,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 3cA \text{sen}(3x) \cos(3ct),$$

Por lo tanto, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \text{sen}(3x)$ sii $3cA \text{sen}(3x) = \text{sen}(3x)$ (para todo $x \in [0, 2\pi]$) sii

$A = \frac{1}{3c}$. Por lo tanto, la única solución del sistema (*) es

$$u(x, t) = \frac{1}{3c} \text{sen}(3x) \text{sen}(3ct)$$

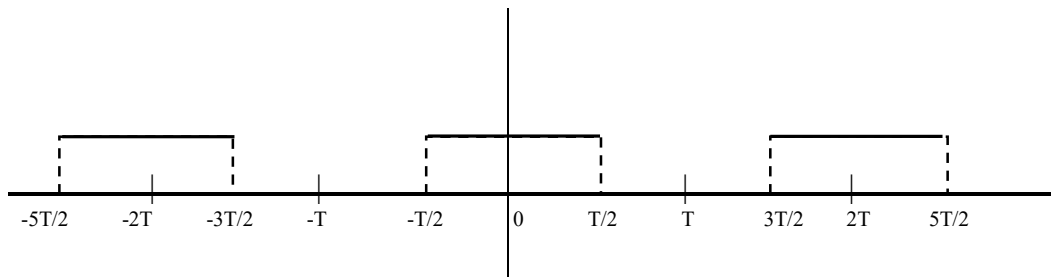
El gráfico de $u(\pi, t)$ es el gráfico de la función nula, por lo tanto puede hacerse sin demasiada dificultad. Tampoco debería presentar muchas dificultades el gráfico de la sinusoide $u(\frac{3}{2}\pi, t) = \frac{1}{3c} \text{sen}(\frac{9}{2}\pi) \text{sen}(3ct) = \frac{1}{3c} \text{sen}(3ct)$.

3. Sea $f: [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2}T \end{cases}$. Determinar ω_0 tal que

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_0 k t}$ es su desarrollo en serie exponencial de Fourier en $[-T, T]$. Calcular

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(c_k) .$$

Resolución: La extensión $2T$ -periódica $\tilde{f}$ de f es una función seccionalmente continua y par.



Su serie exponencial de Fourier es $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{2T}kt}$, por lo tanto: $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$ y los coeficientes están dados por

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\theta) e^{-\frac{n\pi}{T}i\theta} d\theta .$$

Ahora, por ser $\tilde{f}$ real y par:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\theta) e^{-\frac{n\pi}{T}i\theta} d\theta = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overbrace{f(\theta) \cos(\frac{n\pi}{T}\theta)}^{\text{par}} d\theta + i \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overbrace{f(\theta) \sin(\frac{n\pi}{T}\theta)}^{\text{impar}} d\theta = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta) \cos(\frac{n\pi}{T}\theta) d\theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (*)$$

Es decir, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de f son reales y además verifican (se deduce directamente de (*1)):

$$\forall n \in \mathbb{Z} : c_{-n} = c_n \quad (*)2$$

Observación: si usted hace las cuentas para este caso particular, encuentra que para todo n entero:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (*)3$$

Estos coeficientes verifican, obviamente, las propiedades (*)1 y (*)2).

Entonces:

$$(a) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{2T} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\theta = \frac{1}{2}. \text{ Por lo tanto:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \stackrel{(*)2)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = \\ &= |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \stackrel{(*)3)}{=} \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Es decir: } \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \text{ y por lo tanto: } \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{8}. \text{ Resulta, entonces:}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}}$$

$$(b) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(c_k) \stackrel{(*)1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \stackrel{\text{Dirichlet}}{=} f(0) = 1. \text{ Por lo tanto:}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \stackrel{(*)2)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \\ &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \stackrel{(*)3)}{=} \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \end{aligned}$$

$$\text{Es decir: } 1 = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \text{ y por lo tanto: } \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \frac{1}{4}. \text{ Resulta, entonces:}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

4. Resolver:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - tu = 0 & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = e^{-4x} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Resolución: Supondremos que u es una función tan maravillosa que permite los siguientes cálculos extremadamente exigentes (u tendría que provenir de algún espacio de Schwartz):

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega \quad (*1)$$

De la ecuación diferencial obtenemos:

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega, t) - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) - t \hat{u}(\omega, t) = 0$$

es decir:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + (t + \omega^2) \hat{u}(\omega, t) = 0$$

Resolvemos esta ecuación diferencial (es una ordinaria disfrazada):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + (t + \omega^2) \hat{u}(\omega, t) = 0 & \Leftrightarrow e^{(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + e^{(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)} (t + \omega^2) \hat{u}(\omega, t) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} [e^{(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)} \hat{u}(\omega, t)] = 0 & \Leftrightarrow e^{(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)} \hat{u}(\omega, t) = c(\omega) \Leftrightarrow \boxed{\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)}} \end{aligned}$$

donde $c(\omega)$ es una función a determinar por la condición inicial. Hasta ahora, tenemos entonces que las soluciones maravillosas de la ecuación diferencial son:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{-(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)} e^{i\omega x} d\omega \quad (*2)$$

Ahora, de $\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-(\frac{1}{2}t^2 + \omega^2 t)}$ tenemos, para $t = 0$:

$$c(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 e^{-4x - i\omega x} dx = \frac{e^{-(4+i\omega)} - e^{4+i\omega}}{-(4+i\omega)} = 2 \frac{\sinh(4+i\omega)}{4+i\omega}$$

Por lo tanto:

$$\hat{u}(\omega, t) = 2 \frac{\sinh(4 + i\omega)}{4 + i\omega} e^{-(\frac{1}{2}t^2 + t\omega^2)}$$

y

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sinh(4 + i\omega)}{4 + i\omega} e^{-(\frac{1}{2}t^2 + t\omega^2)} e^{i\omega x} d\omega = \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh(4 + i\omega)}{4 + i\omega} e^{-t\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

Control: $c(\omega) = 2 \frac{\sinh(4 + i\omega)}{4 + i\omega} = 2 \sinh(4) \frac{\cos(\omega)}{4 + i\omega} + 2 \cosh(4) \frac{\sin(\omega)}{4 + i\omega}$ tiende a 0, efectivamente, cuando $|\omega| \longrightarrow \infty$.

5. Sabiendo que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua a trozos, de orden exponencial tal que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$ y $\mathcal{L}[f](s) = \text{Log}\left(1 + \frac{2}{s}\right)$ para cada $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 0$, calcular

$$\int_0^t (t-x)f(t-x)dx.$$

Resolución: La función a estudiar es $k(t) = \int_0^t (t-x)f(t-x)dx$, es decir:

$$k(t) = t \int_0^t f(t-x)dx - \int_0^t xf(t-x)dx = t(H * f)(t) - (g * f)(t)$$

donde H es la función de Heaviside y $g(x) = xH(x)$. Aplicando la transformación de Laplace:

$$K(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} F(s) \right) - \frac{1}{s^2} F(s) = \frac{1}{s^2} F(s) - \frac{1}{s} \frac{dF}{ds}(s) - \frac{1}{s^2} F(s) = -\frac{1}{s} \frac{dF}{ds}(s)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de f , es decir: $F(s) = \text{Log}\left(1 + \frac{2}{s}\right)$. Entonces:

$$K(s) = -\frac{1}{s} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s}} - \frac{2}{s^2} \right) = \frac{2}{s^2(s+2)} \stackrel{\text{fracciones simples}}{=} \frac{(-\frac{1}{2})}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

de donde resulta:

$$k(t) = \left(-\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) H(t)$$

Observación: Por si usted se quedó con las ganas de conocer la función f : su transformada de Laplace $F(s) = \text{Log}\left(1 + \frac{2}{s}\right) = \text{Log}(s+2) - \text{Log}(s)$, $\text{Re}(s) > 0$, es $\frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s}$

y por lo tanto, $\frac{d}{ds}F(s)$ es la transformada de Laplace de $(e^{-2t} - 1)H(t) = -tf(t)$. Es decir:

$$f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t} H(t). \text{ Obsérvese que } f(0^+) = 2.$$
