

### **Cadenas de Markov homogeneas de parámetro discreto**

#### **Problema del jardinero (Taha):**

Un jardinero atiende una porción de tierra. Todos los años al inicio de la estación de cultivo realiza pruebas químicas para revisar la condición de la parcela. Dependiendo de los resultados de las pruebas puede clasificar la productividad del jardín como "buena", "regular" o "mala".

La experiencia anterior indica que la productividad del año en curso puede suponerse dependiente solo de la condición del terreno del año anterior.

Por tanto, el jardinero, puede representar las probabilidades de transición en un período de un año de un estado de productividad a otro en términos de la siguiente cadena de Markov:

|                             |   | Estado del sistema el año próximo |        |        |
|-----------------------------|---|-----------------------------------|--------|--------|
|                             |   | 1                                 | 2      | 3      |
| Estado del sistema este año | 1 | 0.3000                            | 0.6000 | 0.1000 |
|                             | 2 | 0.1000                            | 0.6000 | 0.3000 |
|                             | 3 | 0.0500                            | 0.4000 | 0.5500 |

| <u>Estado del sistema</u> | <u>Productividad</u> |
|---------------------------|----------------------|
| 1                         | Buena                |
| 2                         | Regular              |
| 3                         | Mala                 |

### Cadenas de Markov homogeneas de parámetro discreto

Problema del jardinero: Ejemplo de aplicación de la ecuación de *Chapman-Kolgomorov*

|                |                                                                                                                  |                                                                                         |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $[P] =$        | $\begin{bmatrix} 0.3000 & 0.6000 & 0.1000 \\ 0.1000 & 0.6000 & 0.3000 \\ 0.0500 & 0.4000 & 0.5500 \end{bmatrix}$ | $[P]$ : Matriz de las probabilidades de transición para un período de un año.           |
| $[P]^{(2)} =$  | $\begin{bmatrix} 0.1550 & 0.5800 & 0.2650 \\ 0.1050 & 0.5400 & 0.3550 \\ 0.0825 & 0.4900 & 0.4275 \end{bmatrix}$ | $[P]^{(2)}$ = Matriz de las probabilidades de transición para un período de dos años    |
| $[P]^{(4)} =$  | $\begin{bmatrix} 0.1068 & 0.5330 & 0.3603 \\ 0.1023 & 0.5265 & 0.3713 \\ 0.0995 & 0.5219 & 0.3786 \end{bmatrix}$ | $[P]^{(4)}$ = Matriz de las probabilidades de transición para un período de cuatro años |
| $[P]^{(8)} =$  | $\begin{bmatrix} 0.1018 & 0.5255 & 0.3727 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \end{bmatrix}$ | $[P]^{(8)}$ = Matriz de las probabilidades de transición para un período de ocho años   |
| $[P]^{(10)} =$ | $\begin{bmatrix} 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \end{bmatrix}$ | $[P]^{(10)}$ = Matriz de las probabilidades de transición para un período de diez años  |
| $[P]^{(11)} =$ | $\begin{bmatrix} 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \end{bmatrix}$ | $[P]^{(11)}$ = Matriz de las probabilidades de transición para un período de once años  |

Si la matriz  $P$  tiene todos sus elementos no nulos en un número  $r$  de pasos la cadena es regular

### Cadenas de Markov homogeneas de parámetro discreto

#### Problema del jardinero: Vector de probabilidades de estado

Vector de probabilidades de Estado  $[ p (t+1) ] = [ p (t) ] \cdot [ P ]$

Matriz de las probabilidades de  
Transición de un año  $[ P ] = \begin{vmatrix} 0.3000 & 0.6000 & 0.1000 \\ 0.1000 & 0.6000 & 0.3000 \\ 0.0500 & 0.4000 & 0.5500 \end{vmatrix}$

#### Vector de probabilidades de estado para el año t

|        | Estado 1 | Estado 2 | Estado 3 |
|--------|----------|----------|----------|
| t = 0  | 1.0000   | 0.0000   | 0.0000   |
| t = 1  | 0.3000   | 0.6000   | 0.1000   |
| t = 2  | 0.1550   | 0.5800   | 0.2650   |
| t = 3  | 0.1178   | 0.5470   | 0.3353   |
| t = 4  | 0.1068   | 0.5330   | 0.3603   |
| t = 5  | 0.1033   | 0.5279   | 0.3687   |
| t = 6  | 0.1022   | 0.5263   | 0.3715   |
| t = 7  | 0.1019   | 0.5257   | 0.3724   |
| t = 8  | 0.1018   | 0.5255   | 0.3727   |
| t = 9  | 0.1017   | 0.5255   | 0.3728   |
| t = 10 | 0.1017   | 0.5254   | 0.3729   |
| t = 11 | 0.1017   | 0.5254   | 0.3729   |

### Cadenas de Markov homogéneas de parámetro discreto

#### Problema del jardinero: Ejemplo de aplicación de la ecuación de estado en régimen permanente

|               |                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $[P] =$       | $\begin{bmatrix} 0.3000 & 0.6000 & 0.1000 \\ 0.1000 & 0.6000 & 0.3000 \\ 0.0500 & 0.4000 & 0.5500 \end{bmatrix}$     | $[P]$ : Matriz de las probabilidades de transición para un período de un año.<br>Se cumple que: $[p] = [p].[P]$                                                                                                                                     |
| $[P] - [I] =$ | $\begin{bmatrix} -0.7000 & 0.6000 & 0.1000 \\ 0.1000 & -0.4000 & 0.3000 \\ 0.0500 & 0.4000 & -0.4500 \end{bmatrix}$  | Se cumple que $[p] \{ [P] - [I] \} = 0$                                                                                                                                                                                                             |
| $[A] =$       | $\begin{bmatrix} -0.7000 & 0.6000 & 1.0000 \\ 0.1000 & -0.4000 & 1.0000 \\ 0.0500 & 0.4000 & 1.0000 \end{bmatrix}$   | La matriz $[P]-[I]$ define un sistema de ecuaciones LD. Para poder calcular las probabilidades de estado en régimen permanente se excluye una de las ecuaciones y se reemplaza por una ecuación que indica que la sumatoria de probabilidades es 1. |
| $[A]^{-1} =$  | $\begin{bmatrix} -1.3559 & -0.3390 & 1.6949 \\ -0.0847 & -1.2712 & 1.3559 \\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \end{bmatrix}$ |                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $[B] =$       | $\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $[p] =$       | $\begin{bmatrix} 0.1017 & 0.5254 & 0.3729 \end{bmatrix}$                                                             | El vector $[p]$ se obtiene resolviendo $[p] = [B].[A]^{-1}$                                                                                                                                                                                         |