

El tiempo en cola de los clientes que hacen cola.

En los sistemas de atención es conveniente conocer también el tiempo de espera de aquellos clientes que efectivamente tienen que esperar. El tiempo en cola (W_c) es un promedio del tiempo en cola de aquellos clientes que efectivamente esperan en la fila y de aquellos que no esperan y pasan directamente a los canales de atención (para estos últimos clientes $W_c = 0$). Analizaremos el tiempo en cola de los clientes que hacen cola en dos sistemas infinitos y luego veremos el caso de un sistema finito.

1) Sistema P/P/1

Llamaremos $W_{c/n>0}$ al tiempo promedio en cola para aquellos clientes que arriban al sistema cuando hay al menos un cliente en el sistema; es decir cuando $n > 0$. El tiempo promedio en el sistema para estos clientes será el tiempo promedio en cola más el tiempo de servicio (T_s). Como la fracción del tiempo que el sistema está en estados para los que $n > 0$ es $1 - p(0)$ y todos los clientes que llegan al sistema ingresan en él; la fracción de clientes que deben esperar en cola es también $1 - p(0)$.

La fracción de los clientes que no deben esperar en fila es $p(0)$. Para estos clientes que no esperan, el tiempo promedio en el sistema es el tiempo en el canal de atención (T_s).

El tiempo promedio en el sistema es entonces:

$$W = (W_{c/n>0} + T_s) (1 - p(0)) + T_s p(0)$$

$$W = W_{c/n>0} (1 - p(0)) + T_s$$

$$W_{c/n>0} = \frac{W - T_s}{1 - p(0)} = \frac{W_c}{1 - p(0)}$$

que se puede reducir a:

$$W_{c/n>0} = W$$

En un sistema P/P/1 el tiempo promedio en cola de los clientes que hacen cola es igual al tiempo promedio en el sistema de todos los clientes.

2) Sistema P/P/2

Un razonamiento similar nos permite plantear que para un sistema P/P/2 el tiempo promedio en el sistema es:

$$W = (W_{c/n>1} + T_s) (1 - p(0) - p(1)) + T_s (p(0) + p(1))$$

$$W = W_{c/n>1} (1 - p(0) - p(1)) + T_s$$

El tiempo promedio en cola de los clientes que hacen cola en un sistema P/P/2 es entonces:

$$W_{c/n>1} = \frac{W - T_s}{1 - p(0) - p(1)} = \frac{W_c}{1 - p(0) - p(1)}$$

3) Sistema P/P/2/4

En los sistemas finitos no todos los clientes que llegan al sistema ingresan en él. En el caso de un sistema P/P/2/4 cuando el sistema está en el estado $n = 4$ los clientes que llegan no ingresan y son rechazados. Por tanto, durante la fracción del tiempo $p(4)$ no hay ingresos al sistema. Los ingresos al sistema ocurren durante la fracción de tiempo $p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$. Distinguiremos entonces entre:

- $p(n)$ fracción del tiempo que el sistema está en el estado n (probabilidad en régimen permanente de que el sistema esté en el estado n); y
- $q(n)$ probabilidad en régimen permanente de que un cliente que llega e ingresa al sistema lo encuentre en el estado n .

Para un sistema P/P/M/K Las probabilidades $q(n)$ se derivan fácilmente de las probabilidades $p(n)$:

$$q(n) = \frac{p(n)}{1 - p(K)} \quad n \leq K - 1$$

Notar que si $K \rightarrow \infty$ entonces $p(K) \rightarrow 0$ y $q(n) = p(n)$. Por esta razón en los dos modelos anteriores (P/P/1 y P/P/2) no debimos introducir las probabilidades $q(n)$.

En un sistema P/P/2/4 la fracción de clientes que hacen cola es: $q(2) + q(3)$. Y la fracción de clientes que no hacen cola y son atendidos inmediatamente al llegar al sistema es $q(0) + q(1)$.

Llamaremos $W_{c/n>1}$ al tiempo promedio en cola para los clientes que hacen cola en el sistema P/P/2/4. El tiempo promedio total en el sistema es entonces:

$$W = (W_{c/n>1} + T_s) (q(2) + q(3)) + T_s (q(0) + q(1))$$

$$W = W_{c/n>1} (q(2) + q(3)) + T_s$$

El tiempo promedio en cola de los clientes que hacen cola en un sistema P/P/2/4 es entonces:

$$W_{c/n>1} = \frac{W - T_s}{q(2) + q(3)} = \frac{W_c}{q(2) + q(3)}$$

Actividad 1

Para un sistema P/P/2 con $\lambda=5$ y $\mu=6$ se obtuvieron los siguientes resultados:

The probability ($p_0, p_1, \dots, p_n$) of the $n = 10$ clients in the system are:
0.4117647 0.3431373 0.1429739 0.05957244 0.02482185 0.01034244 0.004309349 0.001795562 0.0007481509 0.0003117295 0.0001298873
The traffic intensity is: 0.8333333333333333
The server use is: 0.4166666666666667
The mean number of clients in the system is: 1.00840336134454
The mean number of clients in the queue is: 0.175070028011205
The mean number of clients in the server is: 0.8333333333333333
The mean time spend in the system is: 0.201680672268908
The mean time spend in the queue is: 0.0350140056022409
The mean time spend in the server is: 0.1666666666666667
The mean time spend in the queue when there is queue is: 0.142857142857143
The throughput is: 5

- Verificar que el valor del tiempo en cola para los clientes que hacen cola es: 0.142857

Actividad 2

Para un sistema P/P/2/4 con $\lambda=10$ y $\mu=6$ se obtuvieron los siguientes resultados:

The probability ($p_0, p_1, \dots, p_k$) of the clients in the system are:
0.1618786 0.2697977 0.2248314 0.1873595 0.1561329
The traffic intensity is: 1.40644516612541
The server use is: 0.703222583062703
The mean number of clients in the system is: 1.90607044716463
The mean number of clients in the queue is: 0.49962528103922
The mean number of clients in the server is: 1.40644516612541
The mean time spend in the system is: 0.225873297809355
The mean time spend in the queue is: 0.059206631142688
The mean time spend in the server is: 0.1666666666666667
The mean time spend in the queue when there is queue is: 0.121212121212121
The throughput is: 8.43867099675244

- Verificar que el valor del tiempo en cola para los clientes que hacen cola es: 0.121212