La Probabilidad de Esperar en Sistemas de Atención.

En general, pensamos la probabilidad de que un cliente que llega a un sistema de atención deba esperar, como la probabilidad de que los canales de atención estén ocupados. Así por ejemplo en un sistema P/P/1 la probabilidad de esperar es la probabilidad de que el sistema no esté vacío:

$$(1 - p_0) = \rho.$$

Sin embargo esto es cierto siempre que las tasas de arribo e ingreso al sistema sean constantes en el tiempo. En términos más generales, la probabilidad de esperar es el cociente entre:

- La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en el intervalo Δt y deben esperar, y
- La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en el intervalo Δt .

$$D = \frac{\text{número de clientes que piden el servicio en } \Delta t \text{ y tienen que esperar}}{\text{número de clientes que piden el servicio en } \Delta t}$$

Sistema P/P/1

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en Δt es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot \Delta t$$

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema y deben esperar en Δt es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La probabilidad de esperar D es:

$$D = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\lambda \cdot \Delta t} = 1 - p_0 = \rho$$

En el caso P/P/1, D coincide con $p(1 \leq n \leq \infty)$

Sistema P/P/M

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en Δt es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot \Delta t$$

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema y deben esperar en Δt es:

$$\sum_{n=M}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La probabilidad de esperar D es:

$$D = \frac{\sum_{n=M}^{\infty} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\lambda \cdot \Delta t} = \sum_{n=M}^{\infty} p_n = \sum_{n=M}^{\infty} \left(\frac{\rho}{M}\right)^n \cdot \frac{M^M}{M!} \cdot p_0$$

$$D = p_0 \cdot \frac{\rho^M}{M^{M-1} \cdot (M - \rho)} \cdot \frac{M^M}{M!} = p_0 \cdot \frac{\rho^M}{(M - 1)! (M - \rho)}$$

En el caso P/P/M, D coincide con $p(M \leq n \leq \infty)$

Sistema P/P/M/N

En los sistemas de colas finitos, debemos distinguir entre la probabilidad de que un cliente que arriba e ingresa al sistema deba esperar para ser atendido, y la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema deba esperar para ser atendido o sea rechazado. Solo en este segundo caso, la probabilidad es $p(M \leq n \leq N)$.

a) Probabilidad de que un cliente que arriba e ingresa al sistema tenga que esperar:

La cantidad promedio de clientes que arriban e ingresan al sistema en Δt es:

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La cantidad promedio de clientes que arriban e ingresan al sistema y deben esperar en Δt es:

$$\sum_{n=M}^{N-1} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La probabilidad de esperar D es:

$$D = \frac{\sum_{n=M}^{N-1} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\sum_{n=0}^{N-1} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t} = \frac{\sum_{n=M}^{N-1} p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}{(1 - p_N) \cdot \lambda \cdot \Delta t}$$

$$D = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \sum_{n=M}^{N-1} p_n$$

En este caso, D no coincide con $p(M \leq n \leq N)$

b) Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema deba esperar para ser atendido o que sea rechazado.

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en Δt es:

$$\sum_{n=0}^N p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema y deben esperar para ser atendidos o son rechazados en Δt es:

$$\sum_{n=M}^N p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

La probabilidad de esperar y ser atendido o ser rechazado D' es:

$$D' = \frac{\sum_{n=M}^N p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\sum_{n=0}^N p_n \cdot \lambda \cdot \Delta t}$$

$$D' = \sum_{n=M}^N p_n$$

En este caso, D' coincide con $p(M \leq n \leq N)$.

Sistema P/P/M/ (N')

En los sistemas de población finita la cantidad de arribos en Δt dependen de la cantidad de clientes en el sistema.

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en Δt es:

$$\sum_{n=0}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n \cdot \lambda_r \cdot \Delta t$$

La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema y deben esperar en Δt es:

$$\sum_{n=M}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n \cdot \lambda_r \cdot \Delta t$$

La probabilidad de esperar D es:

$$D = \frac{\sum_{n=M}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n \cdot \lambda_r \cdot \Delta t}{\sum_{n=0}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n \cdot \lambda_r \cdot \Delta t}$$

$$D = \frac{\sum_{n=M}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n}{\sum_{n=0}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n} \quad 1$$

En el caso P/P/PM/(N'), D no coincide con $p(M \leq n \leq N')$

¹ Esta formulación de D es la empleada en las tablas de **Peck & Hazelwood** para la probabilidad de esperar.

Como:

$$J = \sum_{n=0}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n$$

D puede escribirse como:

$$D = \frac{1}{J} \cdot \sum_{n=M}^{N'-1} (N' - n) \cdot p_n$$