

MODELOS DE STOCK ESTOCÁSTICOS

Modelos de Stock Estocásticos

- Modelización Cuantitativa:
 - Modelos de período único y un solo ítem.
 - Modelos de períodos fijos y lotes variables.
- Modelización por Simulación de Montecarlo:
 - Modelos más complejos

BIBLIOGRAFIA (Modelización Cuantitativa)

H. A. Taha. Investigación de Operaciones (7ma edición) Capítulo 16.

M. Miranda. (Sistemas de optimización de Stocks (Educa). Capítulo IX.

I. Marín. Investigación Operativa (CEI) Tomo II Capítulo III.18.

PROBLEMAS

Guía TP:

Período único: (13.18); (13.19)

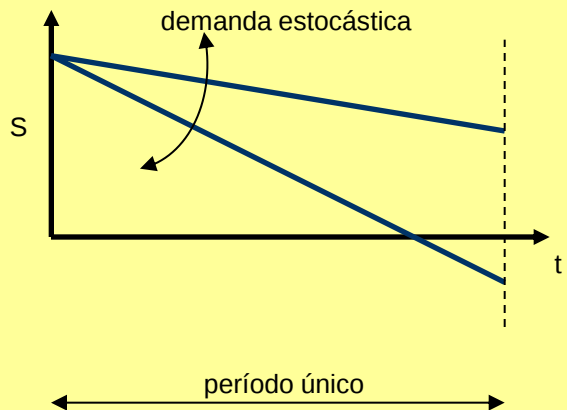
Períodos fijos: (13.20)

Simulación: (14.9); (14.11)

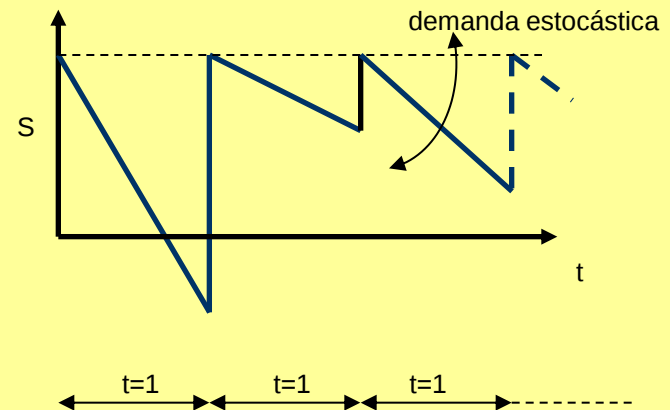
Modelos de Stock Estocásticos

Modelización Cuantitativa

Período único y un solo ítem.



Períodos fijos y lotes variables.



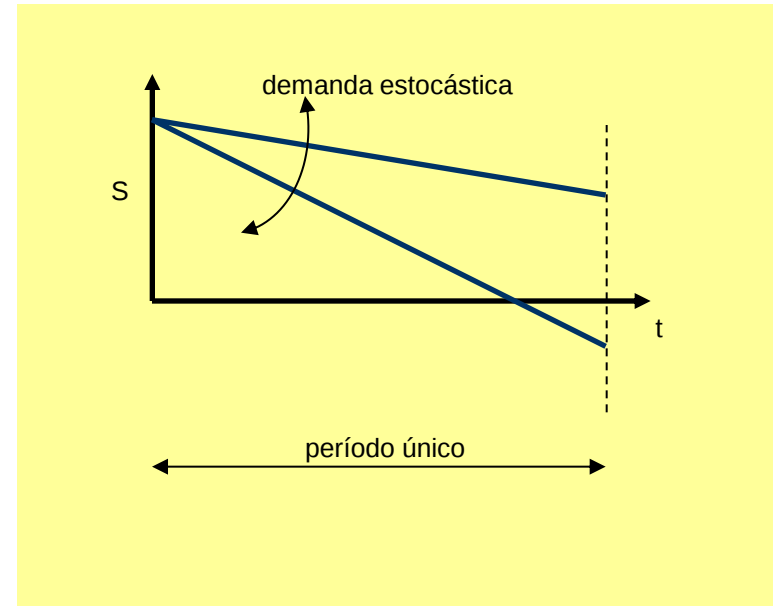
Modelos estocásticos de período único y un solo ítem

- Hipótesis, parámetros, variables
- Resolución para unidades discretas
- Ejemplo 1 (unidades discretas)
- Ejemplo 1 (análisis postoptimal)
- Resolución para unidades continuas. Ejemplo 2

Hipótesis, parámetros y variables

Hipótesis

- Período único
- Unidades discretas
- Lote único al comienzo
- Compras individuales al agotarse
- Sin costo de almacenamiento
- Con costo de agotamiento
- Con pérdida por excedente
- Estabilidad monetaria



Parámetros

- c_1 : Costo unitario del excedente (costo de compra – precio de reventa)
- c_2 : Costo unitario de agotamiento o lucro cesante (costo de compra posterior – costo de compra)

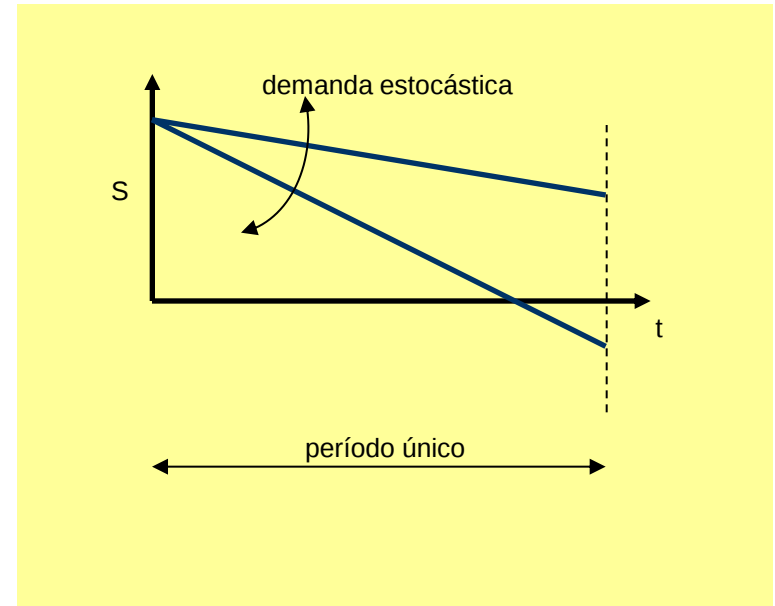
Variables

- x : demanda aleatoria en el período asociada a probabilidad $p(x)$
- S : lote inicial a adquirir

Hipótesis, parámetros y variables

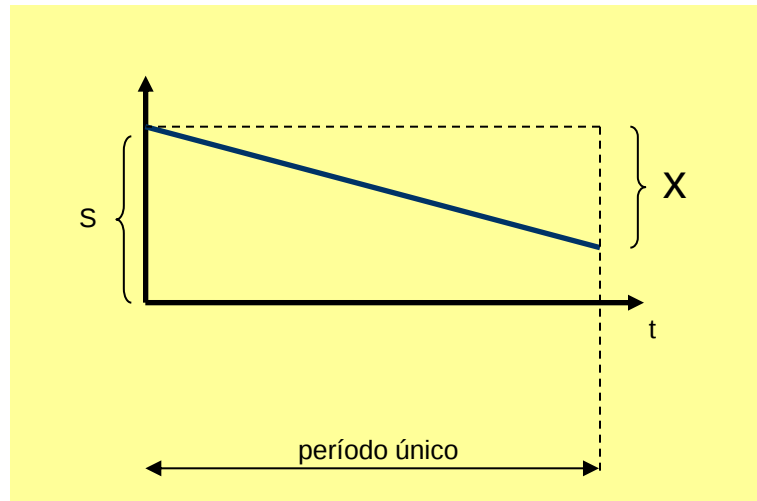
Casos de aplicación

- Compra de repuestos (costosos o críticos) que se deben adquirir juntamente con una máquina o equipo.
- Compra de un producto que será discontinuado próximamente.
- “El problema del canillita”: Determinar cuántas unidades se deben comprar de un semanario a fin de atender la demanda de la semana.



Resolución para unidades discretas

Situación "A"

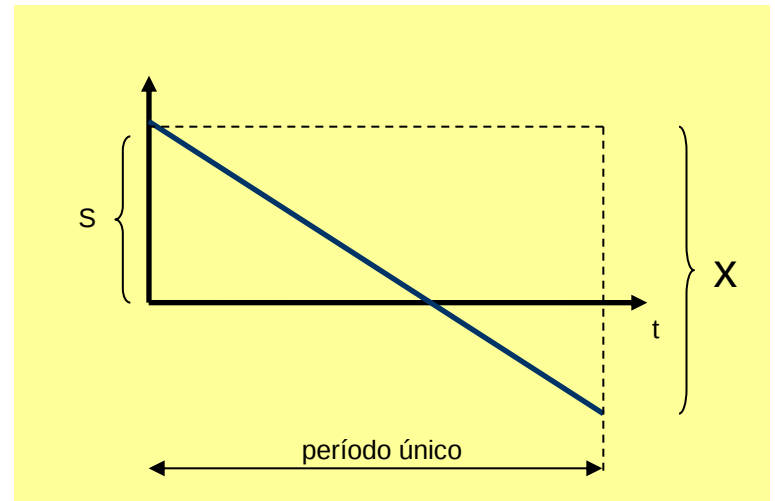


La demanda x es menor al stock inicial S
Al final del período hay excedente $(S-x)$
Costo = $c_1(S-x)$

La esperanza del costo es:

$$\sum_{x=0}^{x=S} c_1(S-x)p(x)$$

Situación "B"



La demanda x es mayor al stock inicial S
Al final del período hay un faltante $(x-S)$
Costo = $c_2(x-S)$

La esperanza del costo es:

$$\sum_{x=S+1}^{x=\infty} c_2(x-S)p(x)$$

Resolución para unidades discretas

El costo total esperado es:

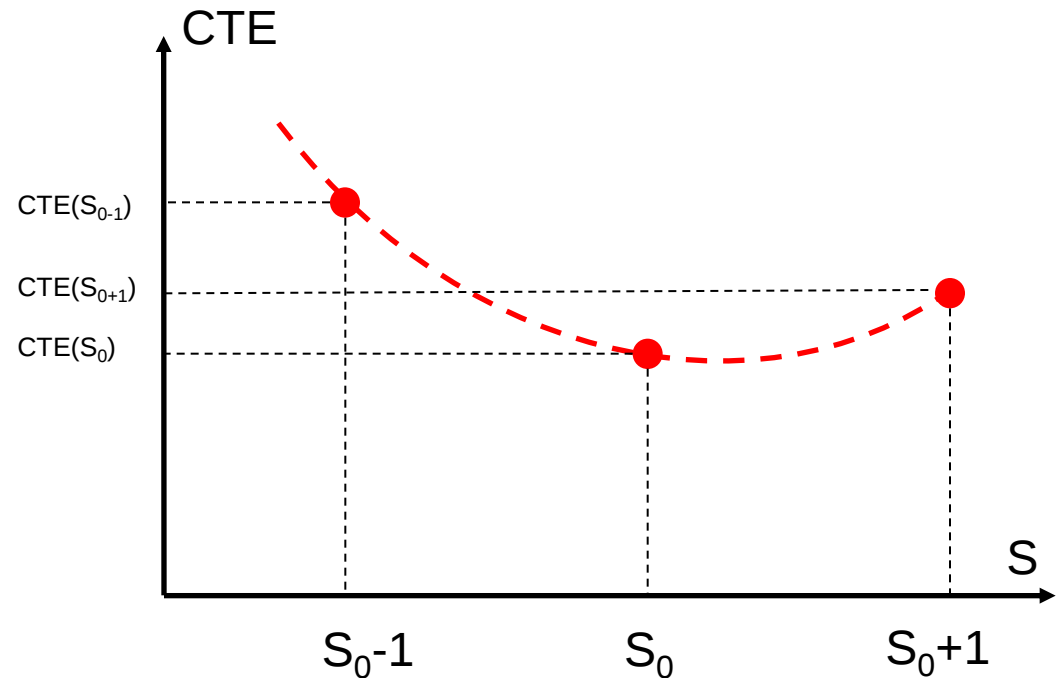
$$CTE(S) = \sum_{x=0}^{x=S} c_1(S-x)p(x) + \sum_{x=S+1}^{x=\infty} c_2(x-S)p(x) \longrightarrow \text{mínimo}$$

La condición de mínimo es:

$$CTE(S_0 + 1) - CTE(S_0) \geq 0$$

$$CTE(S_0) - CTE(S_0 - 1) < 0$$

donde S_0 es el lote óptimo a determinar



Resolución para unidades discretas

$$CTE(S_0 + 1) - CTE(S_0) \geq 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$CTE(S_0) - CTE(S_0 - 1) < 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$CTE(S) = \sum_{x=0}^{x=S} c_1(S-x)p(x) + \sum_{x=S+1}^{x=\infty} c_2(x-S)p(x)$$

A partir de (1) se puede escribir que:

$$CTE(S_0 + 1) - CTE(S_0) = \sum_{x=0}^{x=S_0+1} c_1(S_0 + 1 - x)p(x) + \sum_{x=S_0+2}^{x=\infty} c_2(x - S_0 - 1)p(x) - CTE(S_0)$$

Los límites de las sumatorias pueden ajustarse ya que cuando $x=S_0+1$

$$S_0 + 1 - x = S_0 + 1 - S_0 - 1 = 0$$

$$x - S_0 - 1 = S_0 + 1 - S_0 - 1 = 0$$

$$CTE(S_0 + 1) - CTE(S_0) = \sum_{x=0}^{x=S_0} c_1(S_0 + 1 - x)p(x) + \sum_{x=S_0+1}^{x=\infty} c_2(x - S_0 - 1)p(x) - CTE(S_0)$$

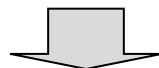
$$= \sum_{x=0}^{x=S_0} c_1(S_0 - x)p(x) + \sum_{x=0}^{x=S_0} c_1 p(x) + \sum_{x=S_0+1}^{x=\infty} c_2(x - S_0)p(x) - \sum_{x=S_0+1}^{x=\infty} c_2 p(x) - CTE(S_0)$$

Resolución para unidades discretas

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{x=S_0} c_1 p(x) - \sum_{x=S_0+1}^{x=\infty} c_2 p(x) \geq 0 \\ &= c_1 P(x \leq S_0) - c_2 P(x \geq S_0 + 1) \geq 0 \\ &= c_1 P(x \leq S_0) - c_2 [1 - P(x \leq S_0)] \geq 0 \\ &= c_1 P(x \leq S_0) - c_2 + c_2 P(x \leq S_0) \geq 0 \\ &= P(x \leq S_0)(c_1 + c_2) - c_2 \geq 0 \\ &= P(x \leq S_0) \geq \frac{c_2}{(c_1 + c_2)} \end{aligned}$$

Del mismo modo a partir de (2) puede demostrarse que:

$$= P(x \leq S_0 - 1) < \frac{c_2}{(c_1 + c_2)}$$



Regla de decisión:

$$P(x \leq S_0 - 1) < \frac{c_2}{(c_1 + c_2)} \leq P(x \leq S_0)$$

Ejemplo 1 (unidades discretas)

Una empresa desea programar la compra de un componente que se utilizará por una única vez durante un proyecto. El requerimiento de este componente responde a una distribución Poisson con media 4. El precio de adquisición antes de comenzar el proyecto es de \$900 por cada componente, mientras que el de cualquier orden posterior al inicio será de \$1.600. Un componente que quede en existencia al final del proyecto tendrá un valor residual de \$800. Calcular cuántos componentes se deberán adquirir antes de iniciar el proyecto

c_1 : Costo del excedente (costo de compra – precio de reventa) = $900 - 800 = 100$ [\$/u]

c_2 : Costo de agotamiento o lucro cesante (costo de compra posterior – costo de compra) = $1600 - 900 = 700$ [\$/u]

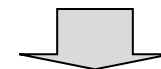
$$c_2 / (c_1 + c_2) = 700 / (100 + 700) = \underline{0,875}$$

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$\lambda = 4$$

x	p(x)	F(x)
0	0.018	0.018
1	0.073	0.092
2	0.147	0.238
3	0.195	0.433
4	0.195	0.629
5	0.156	0.785
6	0.104	0.889
7	0.060	0.949
8	0.030	0.979

$$p(x \leq S_0 - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq p(x \leq S_0)$$

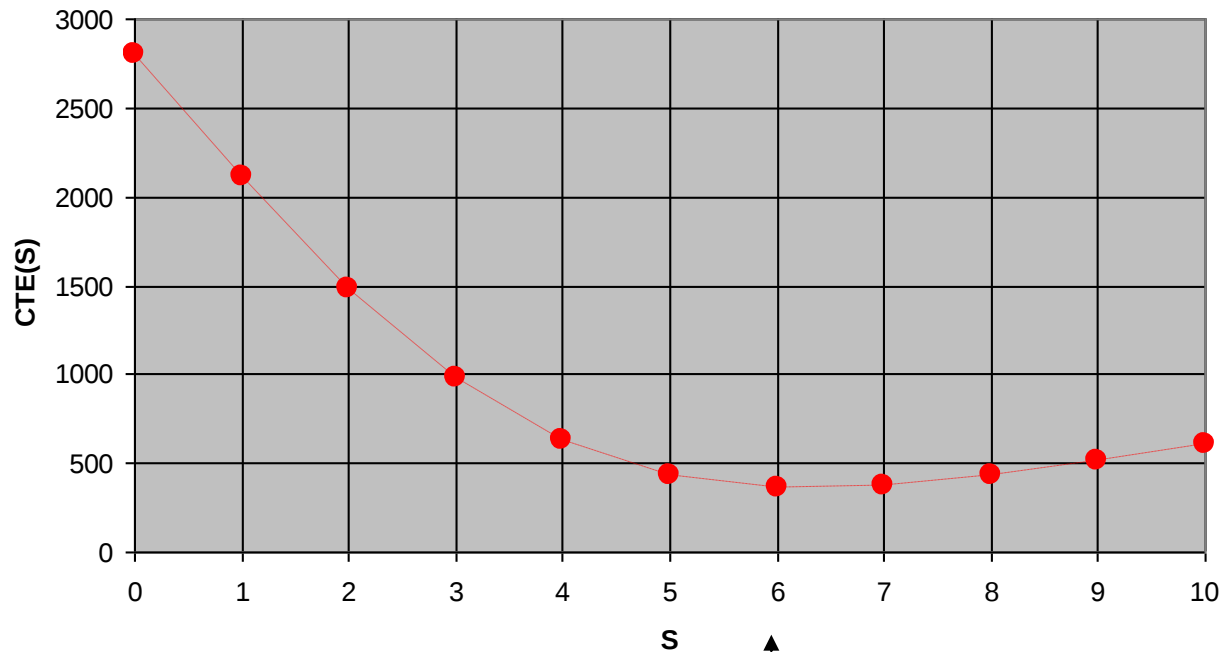
$$p(x \leq 5) < 0,875 \leq p(x \leq 6)$$



$$S_0 = 6$$

Ejemplo 1 (unidades discretas)

$$CTE(S) = \sum_{x=0}^{x=S} c_1(S-x)p(x) + \sum_{x=S+1}^{x=\infty} c_2(x-S)p(x)$$



S mínimo
CTE=356



Ejemplo 1 (análisis postoptimal)

Objetivo: determinar el rango de validez de los parámetros dentro de los que se mantiene la solución óptima obtenida.

$$p(x \leq S_0 - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq p(x \leq S_0)$$

$$= P(x \leq S_0) \geq \frac{c_2}{(c_1 + c_2)}$$

$$= P(x \leq S_0) = \frac{c_2^+}{(c_1 + c_2^+)} \Rightarrow c_2^+ = \frac{P(x \leq S_0)c_1}{1 - P(x \leq S_0)} = \frac{0,889 \cdot 100}{1 - 0,889} = 803,6$$

$$= P(x \leq S_0 - 1) < \frac{c_2}{(c_1 + c_2)}$$

$$= P(x \leq S_0 - 1) = \frac{c_2^-}{(c_1 + c_2^-)} \Rightarrow c_2^- = \frac{P(x \leq S_0 - 1)c_1}{1 - P(x \leq S_0 - 1)} = \frac{0,785 \cdot 100}{1 - 0,785} = 365,4$$

Ejemplo 1 (análisis postoptimal)

Objetivo: determinar el rango de validez de los parámetros dentro de los cuales se mantiene la solución óptima obtenida.

	Valor mínimo	Valor dado	Valor máximo
c_1 (costo del excedente)	87,1	100	191,6
c_2 (costo del faltante)	365,4	700	803,6

Resolución para unidades continuas (Ejemplo 2)

En el Ejemplo 1 se supone ahora que la demanda es de distribución normal con media 10 unidades y desvío estándar de 2

Los parámetros c_1 y c_2 se mantienen:

c_1 : Costo del excedente (costo de compra – precio de reventa) = $900 - 800 = 100$

c_2 : Costo de agotamiento o lucro cesante (costo de compra posterior – costo de compra)
= $1600 - 900 = 700$

$$c_2 / (c_1 + c_2) = 700 / (100 + 700) = \underline{0,875}$$

Cuando la naturaleza de la variable S es continua, por extensión tendremos que:

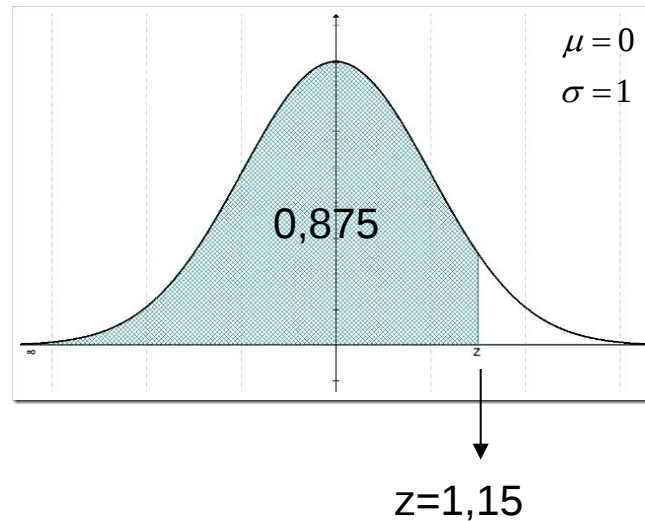
$$F(x) = \frac{c_2}{(c_1 + c_2)}$$

donde:
$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

Resolución para unidades continuas (Ejemplo 2)

Se debe hallar el valor de “z” para la función normal estándar correspondiente con una acumulada de:

$$c_2 / (c_1 + c_2) = 700 / (100 + 700) = \underline{0,875}$$



$$\frac{x - \mu}{\sigma} = 1,15 \Rightarrow x = \mu + 1,15\sigma = 10 + 1,15 \cdot 2 = 12,3$$

Resulta entonces $S_0 = 12,3$ unidades

Final

En clases anteriores se han desarrollado modelos de stock que suponen que existen condiciones de estabilidad suficientes como para considerar a la demanda como constante.

Cuando esa hipótesis de estabilidad no sea sustentable, pero pueda conocerse la distribución de probabilidad de la demanda, podremos plantear modelos estocásticos de stock.

En los casos más simples (como el desarrollado en esta clase), podrán emplearse modelos cuantitativos (analíticos) de stock. Es decir, modelos que establecen reglas de decisión en función de los parámetros del caso.

En situaciones más complejas deberemos recurrir a modelos de simulación de Montecarlo. Estos modelos son más flexibles. Como contrapartida son de implementación más lenta, y requieren la realización de una corrida suficientemente grande como para asegurar la confiabilidad estadística de los resultados.

Anexo

$$CTE(S) = \sum_{x=0}^{x=S} c_1(S-x)p(x) + \sum_{x=S+1}^{x=\infty} c_2(x-S)p(x)$$

$c_1=100$
 $c_2=700$

S=>	0	1	2	3	4	5	6
CTE(S)=>	2800.0	2114.7	1487.9	978.4	625.2	428.2	356.3

x	p(x)	F(x)							
0	0.01832	0.01832	0.000	1.832	3.663	5.495	7.326	9.158	10.989
1	0.07326	0.09158	51.284	0.000	7.326	14.653	21.979	29.305	36.631
2	0.14653	0.23810	205.135	102.568	0.000	14.653	29.305	43.958	58.610
3	0.19537	0.43347	410.270	273.514	136.757	0.000	19.537	39.073	58.610
4	0.19537	0.62884	547.027	410.270	273.514	136.757	0.000	19.537	39.073
5	0.15629	0.78513	547.027	437.622	328.216	218.811	109.405	0.000	15.629
6	0.10420	0.88933	437.622	364.685	291.748	218.811	145.874	72.937	0.000
7	0.05954	0.94887	291.748	250.070	208.391	166.713	125.035	83.357	41.678
8	0.02977	0.97864	166.713	145.874	125.035	104.196	83.357	62.517	41.678
9	0.01323	0.99187	83.357	74.095	64.833	55.571	46.309	37.047	27.786
10	0.00529	0.99716	37.047	33.343	29.638	25.933	22.228	18.524	14.819
11	0.00192	0.99908	14.819	13.472	12.125	10.777	9.430	8.083	6.736
12	0.00064	0.99973	5.389	4.940	4.491	4.042	3.592	3.143	2.694
13	0.00020	0.99992	1.796	1.658	1.520	1.382	1.244	1.105	0.967
14	0.00006	0.99998	0.553	0.513	0.474	0.434	0.395	0.355	0.316
15	0.00002	1.00000	0.158	0.147	0.137	0.126	0.116	0.105	0.095
16	0.00000	1.00000	0.042	0.039	0.037	0.034	0.032	0.029	0.026
17	0.00000	1.00000	0.011	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007
18	0.00000	1.00000	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
19	0.00000	1.00000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0.00000	1.00000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

